Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Emil Lampe und **Georg Wallenberg.**

Band 29.
Jahrgang 1898.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1900.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Abh. zur Gesch. d. Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **8**.

Acc. Peloritana: Atti della R. Accademia Peloritana. Messina. 8°. **13**.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. **22**.

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors 4°. **24**.

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. 8°. **33, 34**.

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. **20**.

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by T. S. Fiske, A. Ziwet, F. Morley, F. N. Cole. New York. 8°. (2) **4, 5**.

Am. J. of science: The American Journal of Science. Editor: Edward S. Dana. Associate editors: Professors Geo. L. Goodale etc. New Haven, Connecticut. 8°. (4) **5, 6**.

Amst. Akad. Verh.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Verhandelingen.

Amst. Versl.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Verslagen. **6, 7**.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, U. Dini. Milano. 4°. (2) **26**, (3) **1**.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New York. 4°. **12**.

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Friedel, Mascart, Moissan. Paris: Masson et Cie, éditeurs. 8°. (7) **13, 14, 15**.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (3) **15**.

Annuaire Belg.: Annuaire de l'observatoire royal de Belgique. Par F. Folie. Bruxelles: Hayez.

Archivo de Mat.: Archivo de matemáticas puras y aplicadas. Periodico mensual publicado por D. Luis Gonzago Gascó con la colaboración de E. León, M. Belmás. Madrid, Valencia. 8°. **2**.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha, secrétaire. Harlem. 8°. (2) **1**.

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8°. (4) **6**.

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 26me session. Congrès de St. Etienne (1897). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson et Cie. 8° (1898).

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von H. Kreutz. Kiel. 4°. **145, 146, 147**.

Atti Acc. Gioenia: Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) **11**.

Atti dell'Acc. Pont.: Atti dell'Accademia Pontaniana. Napoli. **28** oder (2) **3**.

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli. gr. 8°. **36**.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 8°. (3) **35, 36**.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. In 4°. **53**.

Belg. Mém. cour.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles: F. Hayez. **55**.

Belg. Mém. cour. et sav. étr.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 4°. **56**.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1898.

Berl. Phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Leipzig: Barth. 8°. **17**.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. 8°. (2) **12**.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) **7**.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 8°. 1897-98.

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (5) **1, 2, 3, 4.**

Bordeaux Procès-verbaux: Procès verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. Année 1894/95, 1895/96, 1896/97, 1897/98.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1898.

Brux. Ann.: Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. Annales astronomiques. Bruxelles: F. Hayez. 1898.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars et Fils. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B; A = 1ère partie, B = 2e partie.) **22.**

Bull. intern. de l'Ac. François Joseph: Siehe *Rozpravy.*

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 8°. **9.**

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 4°.

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) **27.**

Centralbl. der Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und O. Hossfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) **6.**

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. **126, 127.**

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Beltrami etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) **22.**

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Vereins deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure: K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin: E. Toeche.

Deutsche Math. Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Wangerin, A. Gutzmer. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **5, 6.**

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 8°.

Dublin Trans.: The Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. 4°. **31.**

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. **16.**

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. **22.**

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. **39.**

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times". Edited by D. Biddle. London: Francis Hodgson. 8°. **68, 69.**

Encykl. d. math. Wiss.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt u. Fr. Meyer. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. **1.**

Finska Vet. Förh. **39** (1897).

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. (2) **1**.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1898. Göttingen. 8°. 1898.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **3**.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung der Herren u. s. w. herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **29**.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig: C. A. Koch. 8°. (2) **16**.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (2) **4**.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von L. Fuchs. Berlin: G. Reimer. 4°. **119**.

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 4°. **17, 18**.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von W. Jordan und C. Steppes. Stuttgart. 8°. **27**.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (5) **4**.

Journ. de Phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, G. Lippmann, E. Mascart, A. Potier et B. Brunhes. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (3) **7**.

Kansas Univ. Quart.: The Kansas University Quarterly. Series A: Science and mathematics. Published by the University. Lawrence, Kansas. 8°. **7**.

Kasan Ges.: Nachrichten der physiko-mathematischen Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kasan. (Russisch.) (2) **8**.

Kasan Univ.: Gelehrte Schriften der kaiserlichen Universität Kasan. Jährlich 12 Nummern.

Kiew Univ. Nachr.: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.) 1898.

Kjöbenhavn Overs.: Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kjöbenhavn. 1898.

Königsb. Physik.-ökon. Ges.: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg i. Pr. gr. 4°. 1898.

Krakau. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Krakau. Ber.: Sitzungsberichte der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: 4°.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. **50** (1898).

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Halle. 4°. **71, 72**.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ der Kais. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgeg. von K. v. Fritsch. Halle a. S. gr. 4°. **34**.

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret. **20**.

Lisboa Jorn. da Ac.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa. 1898. (2) **5**.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) **31**.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. **29**.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. **191**.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. **62, 63**.

Loria Bollettino: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Torino: Carlo Clausen. 8°. **1**.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, D. Hilbert, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **50, 51**.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars et Fils. Gand: Hoste. 8°. (2) **8**.

Math. Magazine: The Mathematical Magazine. A Journal of elementary and higher mathematics. Edited and published by Artemas Martin. Washington D. C. 4°. **2**.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge: Macmillan and Co. 8°. (2) **27, 28**.

Meteor. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. G. Hellmann. Wien: Ed. Hölzel. gr. 8°. **15**.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. u. K. technischen Militär-Comité. Wien: R. v. Waldheim. 8°. **29**.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (3) **1**.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und L. Gegenbauer in Wien. Wien. 8°. **9**.

Monthly Notices: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8°.

Moskau. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) **20**.

Moskau. Phys. Sect.: Arbeiten der physikalischen Section der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde, Anthropologie und Ethnographie. Moskau. (Russisch.) (Auch unter dem Titel: Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft etc.)

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. **19**.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. **28**.

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (3) **4**.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4°. **57, 58**.

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. (2) **3**.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant et X. Antomari. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (3) **17**.

Nova Acta Leop. s. Leop. Nova Acta.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria per la fisica e la chimica. Continuato da R. Felici, A. Batelli, V. Volterra per la fisica esperimentale e matematica. Pisa: Salvioni. gr. 8°. (4) **7, 8**.

Nyt Tidss. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Foldberg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. **9**.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.)

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova.

Paedag. Samml.: Paedagogische Sammlung, herausgegeben bei dem paedagogischen Museum der Hauptverwaltung der Militärschulen in St. Petersburg. 12 Nummern jährlich. 8°.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. **12**.

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario fondato da D. Besso. continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Organo dell'Associazione „Mathesis". Livorno. 8°. **13,** (2) **1**.

Petersb. Bull.: Bulletin der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg.

Petersb. Denkschr.: Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. (8) **6**.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, G. F. Fitzgerald, W. Francis. London. 8°. (5) **45, 46**.

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.)

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa.

Politecnico: Il Politecnico. Giornale dell'ingegnere architetto civile ed industriale. Milano: Tipografia e Litografia degli Ingegneri. gr. 8°.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8°. **11**.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1898.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8°. (Polnisch.) **9**.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1898.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8°. **29, 30**.

Revue d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. **51, 52, 53**.

Revue de Math.: Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. Peano. Turin. 8°. **6**.

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par M. M. R. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Nony et Cie. Bruxelles: Ramlot. 4°. **8, 9**.

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Louvain: Secrétariat de la Société scientifique. gr. 8°. (2) **13, 14, 15**.

Revue scientif.: Revue scientifique de ia France et de l'étranger. Paris. 4°. (4) **10**.

Rivista di Mat.: Siehe *Revue de Math.*

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (5) **2**.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma. 4°. (5) **7** (1898). (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{7}_1$ und $\mathbf{7}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **51**.

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **12, 13, 14**.

Rozpravy: Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) **7.** (Dazu: *Bulletin international.* Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.)

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Gegenwärtig herausgegeben von R. Mehmke und M. Cantor. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **43.**

Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. **26.**

Soc. Philom. Bull.: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (8) **10.**

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, früher herausgegeben von Spaczinski, jetzt von Gernet und Zimmermann in Odessa. 24 Nummern jährlich. Die Nummern laufen vom Anfange des Journals an. (Russisch.) 1898.

Stockh. Akad. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. **24.**

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. **54, 55.**

Suppl. al Period.: Supplemento al Periodico di Matematica diretto dal Dott. G. Lazzeri. Livorno: R. Giusti. 8°. **1, 2.**

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. **13.**

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. **9.**

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. **33, 34.**

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) **48.**

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. **12.**

Toulouse Bull.: Bulletin de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. **1.**

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. (9) **9.**

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°. **15.**

Unterrichtsbl. f. Math.: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von B. Schwalbe u. Fr. Pietzker. Berlin: O. Salle. 4°. **4.**

Upsala Nova Acta: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis (3) **17.**

Ven. Ateneo: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (7) **9, 10.**

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°.

Verh. d. intern. Math. Congr. I: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses in Zürich 1897. Hrsg. von F. Rudio. Leipzig: B. G. Teubner. 8°.

Verh. Naturf. Ges. Braunschweig: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu Braunschweig 1897. Herausgegeben von A. Wangerin und O. Taschenberg. Leipzig: F. C. W. Vogel. **1, 2** (1898).

Vestnik: Vestnik Česke Akademie (Bericht der kaiserlich böhmischen Akademie). 8°. **6, 7.** (Böhmisch)

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8°. **33.**

Warschau Phys. Sect.: Arbeiten der Warschauer Gesellschaft der Naturforscher; Verhandlungen der Section für Physik und Chemie. Jährlich ein Band.

Warschau. Univ. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.)

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington, D. C. Judd and Dettweiler, Printers.

Wiad. Mat.: Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. Warszawa (Polnisch). 8°. **2.**

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn M. Planck herausgegeben von G. und E. Wiedemann. Leipzig: Barth. 8°. **64, 65, 66.**

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. **107.**

Wundt Philos. Studien: Philosophische Studien. Herausgegeben von Wilhelm Wundt. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 8°. **14.**

Zeitschr. deutscher Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin: J. Springer. 4°.

Zeitschr. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure: O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°.

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8°. **43.**

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

Seite

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Kapitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

B. Determinanten.

C. Elimination und symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Kapitel 3. Kettenbrüche.

Seite

Vierter Abschnitt. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Kapitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunction und der hypergeometrischen Reihen).

B. Elliptische Functionen.

Kapitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie).

Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Seite

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

Kapitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

Seite

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Kapitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Seite

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Seite

Kapitel 4. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

Kapitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildnngen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.)

Kapitel 2. Kinematik.

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Kapitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Capillarität.

Kapitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1. Geodäsie.

Kapitel 2. Astronomie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, welche für den neunundzwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A.S. Herr Prof. A. Sommerfeld, Aachen.
Bdn. „ Dr. Brodén, Lund.
Bö. „ Prof. Börsch, Potsdam.
Br. „ Dr. Brix, Steglitz.
Dn. „ Prof. Dickstein, Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek, Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström, Stockholm.
El. „ Prof. Engel, Leipzig.
F. „ Dr. Faerber, Berlin.
F. K. „ Prof. F. Kötter, Berlin.
F. L. „ Dr. F. Lampe, Berlin.
Fr. „ Prof. Fricke, Braunschweig.
Gbg. „ Dr. Guldberg, Christiania.
Gbs. „ Prof. Gibson, Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher, Cambridge.
Gt. „ Dr. Güntsche, Berlin.
Gz. „ Prof. Gutzmer, Jena.
H. „ Prof. Hoppe †, Berlin.
Hae. „ Dr. Haentzschel, Berlin.
Hau. „ Prof. Haussner, Giessen.
Hk. „ Prof. Hauck, Berlin.
Hmg. „ Dr. Holmgren, Upsala.
Hr. „ Prof. Hamburger, Berlin.
Hsb. „ Dr. Hessenberg, Charlottenburg.
Hz. „ Prof. Hurwitz, Zürich.
Jhk. „ Dr. Jahnke, Berlin.
Jk. „ Prof. Joukovsky, Moskau.
Js. „ Prof. Jolles, Halensee.
Kls. „ Major Klussmann, Berlin.
Kr. „ Prof. Krazer, Strassburg i. E.
La. „ Prof. Loria, Genua.
Lg. „ Direct. Lange, Berlin.
Lh. „ Prof. Lerch, Freiburg, Schweiz.
Lp. Herr Prof. Lampe, Berlin.
Lsg. „ Prof. Landsberg, Heidelberg.
Ly. „ Dr. Loewy, Freiburg i. B.
M. „ Prof. F. Müller, Steglitz.
Mi. „ Prov.-Schulrat Michaelis, Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion, Gent.
My. „ Prof. F. Meyer, Königsberg i. Pr.
Mz. „ Prof. Maynz, Ludwigslust.
Ot. „ Dr. Oster, Leipzig.
R.M. „ Dr. R. Müller, Berlin.
Rn. „ Oberl. Riens, Berlin.
Sbt. „ Prof. Siebert, Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel, Hagen.
Scht. „ Prof. Schubert, Hamburg.
Sda. „ Prof. Sucharda, Prag.
Sfs. „ Prof. Schönflies, Königsberg i. Pr.
Sh. „ Dr. Schafheitlin, Charlottenburg.
Si. „ Dr. Sintzow, Ekaterinoslaw.
St. „ Prof. Stäckel, Kiel.
Stz. „ Dr. Steinitz, Charlottenburg.
T. „ Prof. Toeplitz, Breslau.
Tn. „ Direct. Treutlein, Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira, Porto.
V. „ Dr. Valentiner, Kopenhagen.
Vi. „ Prof. Vivanti, Messina.
Wbg. „ Dr. Wallenberg, Berlin.
Wgt. „ Prof. Weingarten, Charlottenburg.
Wn. „ Prof. Wangerin, Halle a. S.
Wz. „ Prof. Weltzien, Zehlendorf.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W. 35, Kurfürstenstr. 139.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1.

G e s c h i c h t e.

A. Biographisch - Litterarisches.

M. CANTOR. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter (Schluss-)Band. Von 1668-1758. Leipzig: B. G. Teubner. XIV S. u. S. 473-893.

Mit dem vorliegenden Endstück des 1880 zuerst an die Oeffentlichkeit getretenen Werkes ist „mein Anteil an der Geschichte der Mathematik vollendet", sagt der Verf.; die Fortsetzung seines Lebenswerkes überlässt er berufenen Nachfolgern. — Das Vorwort des vorliegenden Bandes giebt (S. V - XII) Verbesserungen und Zusätze zu den beiden ersten Abteilungen des dritten Bandes, die in Abschnitt 16 und 17 die Zeit von 1668 bis 1726 behandelt hatten, und legt dann im 18. Abschnitt (S. 475 - 878) die geschichtliche Entwickelung der Mathematik von 1727 bis 1758 dar. In 18 Kapiteln werden in bekannter eingehender und doch möglichst den Ueberblick wahrender Darstellung zunächst die Geschichte der Mathematik selbst (bis S. 491) behandelt, dann die Entwickelung des Rechnens und der Elementargeometrie (bis S. 542), hierauf die Geschichte der Algebra samt den anschliessenden Abschnitten über die Combinatorik und die Lehre von den Reihen (bis S. 676). Ein besonderes Kapitel, das 111., wird dem ersten Band von Euler's Introductio vom Jahre 1748 gerecht und bereitet auf desselben grossen Mathematikers Arbeiten über Reihen und Differentialrechnung vor, die eingehend besprochen werden (S. 698-748). Die Entwickelung der Lehren über analytische Geometrie (S. 748-816), über Maxima und Minima (S. 816-842), über bestimmte Integrale und Differentialgleichungen (S. 842-878) macht den Schluss.

So liegt denn das grosse Werk, die Lebensarbeit Cantor's, der zeitgemässe Ersatz Montucla's, noch vor Schluss des Jahrhunderts

vollendet vor uns; sein Ruhm wird durch die Jahrhunderte währen. Herzlicher Dank gebührt dem Verfasser; möge er sich der allseitigen Anerkennung noch lange erfreuen! Tn.

G. Eneström. Ueber die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen. Verh. d. intern. Math.-Congr. I, 1897, 281-288.

Nach einem Rückblick auf die bis zur Mitte der 80er Jahre vorhandenen mathematisch-bibliographischen Hülfsmittel bespricht der Verf. ausführlicher das von einer internationalen Commission bearbeitete „Répertoire bibliogr. des sciences math.“ und die „Allgem. mathem. Bibliographie“ von Valentin: er legt Ursprung, Plan und Art der Ausführung beider dar, weist auch auf wünschenswerte Verbesserungen der Unternehmungen hin (vergl. F. d. M. **28,** 1, 1897). Tn.

G. Eneström. Questions 67-68, 70-72. Réponse à la question 70.

M. Steinschneider. Anfrage 69.

G. Wertheim. Beantwortung der Anfrage 61.

A. von Braunmühl. Beantwortung der Anfrage 68.

M. Curtze. Antwort auf die Anfrage 69.

Bibl. Math. (2) **12,** 31-32, 64, 94-96, 119-120.

Anfragen und Antworten über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik (vergl. F. d. M. **28,** 2, 1897).

61) Wertheim bemerkt, dass die älteste bisher bekannte Münze mit arabischen Ziffern eine 1458 geprägte Silbermünze sein dürfte.

67) Ueber die erste Behandlung der logarithmischen Curve.

68) Ueber einen von E. Porto (1636) erwähnten Mathematiker „Josteglio“. A. v. Braunmühl weist nach, dass dieser mit dem Wittenberger Professor Melchior Jöstel, der eine bisher ungedruckte „Logistica prosthaphairesis astronomica“ verfasst hat, identisch ist.

69) Ueber einige typographische Eigentümlichkeiten in dem 6. und 12. Bande (1873 und 1879) vom „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche“. Curtze bemerkt, dass mit Bezug auf den 12. Band ein vollständiger Umdruck gewisser Bogen vorgenommen wurde.

70) Ueber eine in Lund in Schweden 1771 gedruckte Auflage von Euler's „Vollständige Anleitung zur Algebra“.

71) Ueber die erste Anwendung von drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten, um die Gleichung einer Oberfläche darzustellen.

72) Ueber eine von Frenicle de Bessy 1657 publicirte, jetzt verschollene Broschüre. E.

F. J. Studnička. Archimedes. Litterarisch-historische Studie. Ziva, Zeitschrift für Naturkunde. 8, Prag. (Böhmisch.) Sda.

H. Suter. Ueber zwei arabische mathematische Manuscripte der Berliner kgl. Bibliothek. Bibl. Math. (2) **12,** 73-78.

Suter giebt zuerst ein Verzeichnis des Inhalts der zwei fraglichen Manuscripte, woraus hervorgeht, dass diese hauptsächlich Uebersetzungen und Commentare zu griechischen Mathematikern und Astronomen umfassen. Dann bespricht er eine dort befindliche, von Nassir Eddin herrührende Uebersetzung der Schrift von Archimedes über die Kreisrechnung und bemerkt, dass diese sich vom Originale teils durch die Reihenfolge der Sätze, teils durch grössere Ausführlichkeit der Darstellung unterscheidet. Zuletzt macht er auf eine arabische Berechnung des Wertes von π aufmerksam, die der soeben genannten Uebersetzung hinzugefügt ist, und deren Resultat, in einem Decimalbruch ausgedrückt, $= 3.141568$ ist. E.

M. Steinschneider. Die Mathematik bei den Juden. Bibl. Math. (2) **12,** 5-12, 33-40, 79-89.

Fortsetzung der im Jahrgange 1893 begonnenen Reihe von Artikeln (vergl. F. d. M. **25,** 4, 1893/94; **26,** 8, 1895; **27,** 2, 1896; **28,** 2, 1897). Die drei neuen Artikel berichten über eine Anzahl von Schriften aus dem 14. Jahrhundert; wie die früher besprochenen Arbeiten behandeln auch diese vorzugsweise Kalenderkunde, Kosmographie und Astrologie. Der einzige hervorragende Verfasser, den Steinschneider hier erwähnt, ist Immanuel ben Jakob (gest. c. 1380), der sich nicht nur mit Astronomie und Astrologie, sondern auch mit der reinen Mathematik beschäftigte; seine bekannteste Arbeit, welche viele hebräische Commentare hervorgerufen hat, trägt in den meisten Handschriften den Titel „Sechsflügel“ und ist 1872 in Szitomir herausgegeben worden. E.

P. Riccardi. Contributo degli Italiani alla storia delle scienze matematiche pure ed applicate. (Parte II.) Bologna Mem. (5) **7,** 371-425.

Nach einer überschauenden Einleitung werden in fünf Abschnitten (Theoretische und praktische Arithmetik, Algebraische Analysis, Höhere Analysis, Reine Geometrie, Analytische Geometrie) nach der Zeitfolge die Werke von Italienern aufgeführt, die die Geschichte des betreffenden Wissenschaftszweiges behandeln (vergl. F. d. M. **28,** 37, 1897). Tn.

G. Vailati. Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi. Torino Atti **33,** 559-583.

Nach kurzem Bericht über Benedetti's Leben (1530-90) wird seine Bedeutung als Vorläufer Galilei's in Bezug auf die Ansichten über den Fall und überhaupt über die Bewegung der Körper dargethan. Es wird dabei auch festgestellt, dass Benedetti sich mit der Lösung geometrischer Aufgaben mit einer Zirkelöffnung beschäftigt hat (S. 560),

dass er die Wirkung der Sonne bei der Bewegung der Luft richtig beurteilt (S. 568), dass er schon das Verharren bewegter Körper in ihrer Bewegung und in ihrer Geschwindigkeit richtig erfasst hat (S. 576).
Tn.

GALILEO GALILEI. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspizii di sua Maestà il Re d'Italia. Volume VIII. Firenze: Tipografia di G. Barbèra. 645 S. 4°.

Der achte Band der Nationalausgabe von Galilei's Werken enthält die berühmteste Schrift aus seiner Feder: die Discorsi e Dimostrazioni nebst den mit ihnen im Zusammenhange stehenden schriftlichen Aufzeichnungen. Zur Uebersicht setzen wir das Inhaltsverzeichnis her:

Dieselben Gelehrten, welche bei der Bearbeitung des siebenten Bandes mitgewirkt haben (vergl. F. d. M. **28**, 5, 1897), sind auch bei der Herausgabe des gegenwärtigen unter der Leitung von A. Favaro thätig gewesen. Dieser verdienstvolle Galilei-Forscher selbst giebt in dem Vorworte Kunde von den mannigfachen Arbeiten, die zu erledigen waren, bis das Meisterwerk Galilei's in der monumentalen Prachtausgabe erscheinen konnte. Zuerst wird die Geschichte der Entstehung der Dialoge erzählt und die der Schwierigkeiten, welche bei der ersten Drucklegung zu überwinden waren, bis endlich 1638 die Elzevir-Ausgabe in Leiden erschien. Diese Ausgabe ist dem Neudruck zu Grunde gelegt, ihr Titelblatt in getreuer Nachbildung vorgedruckt worden. In ausführlicher Darlegung verbreitet sich dann Favaro über die Verbesserungen, die unter Benutzung eines reichen Quellenmaterials haben vorgenommen werden können, indem die Abweichungen von der Erstausgabe jedoch immer kenntlich gemacht sind. Für die beiden ersten Tage

ist dabei eine Handschrift der Florentiner Nationalbibliothek von unschätzbarem Nutzen gewesen, die Abschrift des an Pieroni nach Deutschland geschickten Manuscriptes, das durch diesen Pieroni in Prag zum Drucke befördert werden sollte. Es ist nicht möglich, die anderen Quellen hier einzeln zu erwähnen; allein jedenfalls müssen wir auf die gründliche Untersuchung bezüglich der Entstehung des fünften und sechsten Tages hinweisen. „Nach unserem Urteile kann weder der eine noch der andere der sogenannten fünften und sechsten Tage in Wahrheit der sechste genannt werden, sondern alle beide sind nur angehängte Tage (so zu sagen beide fünfte Tage), von denen jeder direct an den vierten anknüpft, und zwischen ihnen kann man in Wirklichkeit keine Reihenfolge feststellen. Galileo hat sie zu verschiedenen Zeiten dictirt. Bei der Niederschrift des Tages über den Stoss beabsichtigte er nicht, andere hinzuzufügen ..... Hiernach blieb uns nur übrig, die beiden Tage nach der Zeitfolge ihrer Abfassung anzuordnen und die Titel „sechster Tag“ und „fünfter Tag“ bloss als nunmehr historisch gewordene Namen beizubehalten“.

Die „Bruchstücke“ zu den Dialogen entstammen verschiedenen Perioden des wissenschaftlichen Schaffens von Galilei, sind daher für die Beurteilung der Entwickelung dieses Genius von hohem Werte; wir brauchen nur auf die Wohlwill'sche Abhandlung in dem Jubelbande für M. Cantor hinzuweisen, wo auf Grund dieser Fragmente Galilei von der durch Caverni erhobenen Anschuldigung der unrechtmässigen Aneignung der Entdeckungen seiner Zeitgenossen gereinigt ist.

Die nach den Dialogen abgedruckten „astronomischen Operationen“, welche nach Beendigung des Druckes jenes Werkes entstanden sind, sollten sich dem fünften Tage der Dialoge anschliessen und enthalten die von Galilei nach Erfindung des Fernrohrs für notwendig und nützlich erachteten Messmethoden. Das dem Drucke zu Grunde liegende Manuscript rührt von dem „letzten Schüler“ Galilei's her, dem Viviani, der die Schrift nach einem Dictate von Vincenzio Galilei, dem Sohne Galilei's, aus hinterlassenen Papieren aufsetzte.

Während dieser Aufsatz nebst seinem Anhange inhaltlich zu den Dialogen gehört, beschäftigen sich die Briefe an den Fürsten Leopold von Toscana sowie die damit in Zusammenhang stehenden anderen Mitteilungen mit der im Jahre 1604 von Vincenzio Casciarolo entdeckten Eigenschaft des Bologneser Schwerspats, durch Beleuchtung selbstleuchtend zu werden. — Dem ganzen Bande ist ein Namenregister angehängt. Lp.

P. Grandenigo. La malattia che determinò la cecità di Galileo. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 421-430.

G. Eneström. A propos de l'interprétation du titre „samielois“ d'Albert Girard. Bibl. Math. (2) **12**, 18.

Es wird darauf aufmerksam gemacht, dass vier Verfasser (de Gua,

Terquem, P. Tannery, Dannreuther) fast unabhängig von einander den Titel „samielois“ des Albert Girard richtig mit „aus Saint-Mihiel in Lothringen herstammend“ wiedergegeben haben. E.

P. Fr. Schwab. P. Aegyd Everard von Raitenau, 1605 bis 1675 Benedictiner von Kremsmünster, Mathematiker, Mechaniker und Architekt. Ein Lebensbild, nach Quellen entworfen. Salzburg. 105 S. [Sep. aus Mitt. der Salzb. Landeskunde **38**; Ref. Schlömilch Z. **44**, Hl. A. 10-11.]

E. Heydenreich. Dénis Papin. Schlömilch Z. **43**, 130-138 Hl. A.

Auf Grund der gedruckten Quellen wird hier eine übersichtliche Darstellung vom Leben (1647-1711?) und von den Arbeiten des bedeutenden Physikers gegeben. Tn.

C. J. Gerhardt. Ueber die vier Briefe von Leibniz, die Samuel König in dem Appel au public, Leide MDCCLIII, veröffentlicht hat. Berl. Ber. 1898, 419-427.

Gegen das von Maupertuis im Jahre 1748 veröffentlichte Princip der kleinsten Wirkung sprach sich 1751 König aus und führte zu seiner Unterstützung Meinungen von Leibniz an, die dieser in Briefen ausgesprochen hätte. In dem nachfolgenden Streit ward einer der Briefe als untergeschoben bezeichnet; Gerhardt macht es dagegen auf Grund von archivalischen Untersuchungen glaubhaft, dass das betreffende Briefstück, aus dem Jahre 1707, thatsächlich von Leibniz geschrieben ist, und dass der Brief freilich nicht an Hermann, wie König gesagt hatte, sondern an Varignon adressirt war (vergl. F. d. M. **21**, 13, 1889). Tn.

A. Amati. Di don Pietro Agnesi e delle sue figlie Maria Gaetana, Maria Teresa e Paolina. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 1380-1394, 1493-1520.

In einer Reihe mit den Mathematikerinnen Hypatia, du Châtelet, Sophie Germain, Mary Somerville und Sophie Kowalewski werden auch die Töchter des P. Agnesi (1692-1752) genannt, nämlich Maria Gaetana (1718-99), Maria Teresa (1720-95) und Paolina (1751-1824), der Reihe nach das 1., das 2. und das 22. Kind aus den drei Ehen ihres Vaters. Ueber deren Leben und Wirken wird hier, im wesentlichen nach älteren gedruckten Quellen, gehandelt. Tn.

G. Valentin. Beitrag zur Bibliographie der Euler'schen Schriften. Bibl. Math. (2) **12**, 41-49.

Enthält eine ziemlich grosse Anzahl von Zusätzen und Berichtigungen zu Hagen's „Index operum Leonardi Euleri“ (Berlin 1896). Zum Schluss bemerkt der Verf., dass das Buch: „L'arithmétique raisonnée

et démontrée. Oeuvre posthume de Léonard Euler, traduite en français" (Berlin 1792) allem Anscheine nach unecht ist und von C. F. Gaignat de l'Aulnays herrührt. E.

P. Riccardi. Alcune lettere di Lagrange, di Laplace e di Lacroix dirette al Matematico Pietro Paoli, e sette lettere del Paoli al Prof. Paolo Ruffini. Modena Mem. (3) **1,** 105-129.

Aus den von seinem Vater Geminiano Riccardi gesammelten Materialien werden hier von P. Riccardi mehrere Briefe von berühmten italienischen und französischen Mathematikern an Paoli sowie sieben Briefe der Letzteren an Paolo Ruffini veröffentlicht. Voraus schickt aber der Herausgeber eine kurze Biographie Paoli's. Pietro Simone Paoli, geb. am 26. October 1759 zu Livorno, studirte zu Pisa, wurde dann Professor der Mathematik am Gymnasium zu Mantua und zwei Jahre später Professor der Elementarmathematik an der Universität zu Pavia, danach 1784 bis 1814 Professor der niederen und höheren Analysis an der Universität zu Pisa, endlich königlicher Studiendirector des Grossherzogtums Toscana. Er war Mitglied einer grossen Zahl von Akademien. 1830 zog er sich vom Amte zurück und starb in der Nacht vom 20/21. Februar 1839.

Die hier veröffentlichten Briefe von Lagrange (1798), Laplace (1810 und 1812) und Lacroix (1798) sind durch Paoli's Werk, Elemente der Algebra, veranlasst. Sie sowie die sieben Briefe Paoli's an Ruffini (1799, 1808, 1809, 1814, 1817, 1818, 1821) sind von Wert für die Geschichte der höheren Algebra. Es folgen dann (S. 119 bis 125) Noten zur Biographie Paoli's und zum Schluss ein Verzeichnis seiner mathematischen Schriften. M.

Laplace. Oeuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences par MM. les secrétaires perpétuels. Tome douzième. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 568 S. 4°.

Nachdem in den ersten Bänden der gesammelten Werke von Laplace die in Buchform veröffentlichten Schriften von neuem aufgelegt sind, erscheinen in den späteren Bänden die Abhandlungen aus den Sammlungen der Akademie der Wissenschaften zu Paris sowie aus der Klasse der mathematischen und physikalischen Wissenschaften des französischen Instituts. Der vorliegende Band enthält: 1. Mémoire sur le flux et reflux de la mer (Mém. de l'Ac. des sc. de Paris, 1790; an V), S. 3-126. 2. Mémoire sur les mouvements des corps célestes autour de leur centre de gravité (Mém. de l'Inst. pour l'an IV, Tome I[er]; thermidor an VI), S. 129-187. 3. Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, de son apogée et de ses noeuds (Mém. de l'Ac. (1) **2;** fructidor an VII), S. 191-234. 4. Mémoire sur le mouvement des orbites des satellites de Saturne et d'Uranus. (Mém. de l'Ac. (1) **3;** prairial an IX), S. 237-253. 5. Mémoire sur la

théorie de la Lune (Mém. de l'Ac. (1) **3**; prairial an IX), S. 257-263. 6. Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes (Mém. de l'Ac. (1) **10**; 1810), S. 267-298. 7. Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités (Mém. de l'Ac. (1) **10**; 1809, 1810), S. 301-345. 8. Supplément au Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres (Mém. de l'Ac. (1) **10**; 1809, 1810), S. 349-353. 9. Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations (Mém. de l'Ac. (1) **11**; 1810, 1811), S. 357-412. 10. Mémoire sur la figure de la Terre (Mém. de l'Ac. (2) **2**; 1817, 1819), S. 415-455. 11. Addition au Mémoire sur la figure de la Terre (Mém. de l'Ac. (2) **3**; 1818 1820), S. 459-469. 12. Mémoire sur le flux et le reflux de la mer (Mém. de l'Ac. (2) **3**; 1818, 1820), S. 473-546. 13. Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité (Mém. de l'Ac. (2) **6**; 1823, 1827), S. 549-566. Lp.

Federigo Amodeo e B. Croce. Carlo Lauberg ed Annibale Giordano prima e dopo la rivoluzione del 1799. Arch. Stor. per le Prov. Napol. **23**, 1-7.

Der Naturforscher und Chemiker Carlo Luigi Lauberg (frz. Laubert), 1762 zu Teano geboren, der in der Neapolitanischen Verschwörung von 1792-94 und in der Revolution von 1799 eine politische Rolle spielte, dann später nach Frankreich floh und am 5. Nov. 1834 zu Paris starb, hat auch einige mathematische Arbeiten veröffentlicht. Im Jahre 1789 wurde von ihm ein „Memoria sull'unità dei principj della Meccanica“ gedruckt. Mit Annibale Giordano zusammen gab er „Principii analitici delle Matematiche“ (Arithmetik und Geometrie), Napoli 1792, heraus.

Annibale Niccolò Giordano, geb. um 1771 zu Astalunga, in Ottajano, war ein Schüler des Niccolò Pergola. Sehr jung veröffentlichte er Aufsätze über die Geometrie der Lage, die ihm den Namen „der neue Pascal“ eintrugen. Eine Arbeit aus dem Jahre 1787 über das einem Kreis eingeschriebene Dreieck, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, das Ottajanische Problem, machten ihn auch im Auslande berühmt. Ottajano wurde der Beiname des Giordano, 1789 wurde er Professor an der Militärakademie zu Neapel, musste später nach Frankreich fliehen (hier nannte er sich Jourdain) und starb zu Troyes am 13. März 1835. M.

F. Klein. Ueber den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Gött. Nachr. 1898, Geschäftl. Mitt. 13-18; Math. Ann. **51**, 128-133.

Die Leitung der Herausgabe des Nachlasses ist an Brendel in Göttingen übertragen, der zugleich die Astronomie bearbeitet. Ferner

ist übernommen: die Zahlentheorie und Analysis von Fricke, die Geometrie von Stäckel, die Geodäsie von Börsch und Krüger, die mathematische Physik von Wiechert. Geplant sind drei Bände: 7. Astronomie, 8. Nachträge, 9. biographisches Material, ein Supplementband mit Register. Den Verlag hat die Teubner'sche Buchhandlung übernommen. Die Besitzer von Gauss'schen Handschriften werden um Mitteilung derselben zum Behufe des Abdruckes gebeten. Lp.

Franz Schmidt. Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya, k. k. Hauptmann im Geniecorps. Abhandl. zur Gesch. d. Math. **8**, 133-146.

Der Verf. hat alles zusammengestellt, was er über das Leben dieses von Natur hochbegabten, im kräftigsten Mannesalter aber mit sich und der Welt zerfallenen ungarischen Mathematikers hat auffinden können (geb. 15. Dec. 1802 zu Klausenburg, gest. 27. Jan. 1860). Der Briefwechsel zwischen Johann's Vater Wolfgang Bolyai und Gauss ist die ergiebigste Quelle; daneben sind Familienbriefe und die Acten des österreichischen Reichskriegs - Ministeriums benutzt. Auch nach dieser Darstellung lässt sich die Lebensbeschreibung in wenigen Zeilen dahin zusammenfassen, dass Johann zuletzt Hauptmann im Geniecorps war, viele Duelle hatte, den Appendix schrieb, 1833 in den Ruhestand trat, sich 1837 erfolglos um einen Preis der Jablonowsky'schen Gesellschaft über die Theorie des Imaginären bewarb und dann, unthätig und dem Cynismus verfallen, nichts mehr leistete. Lp.

B. Riemann. Oeuvres mathématiques. Traduites par L. Laugel. Avec une préface par Hermite et un discours par F. Klein. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XXXV + 953 S. gr. 8°.

P. Mansion. Notice sur la vie et les travaux de H. J. S. Smith. (1826-83). Revue des Quest. sc. **43**, 219-227; Suppl. I Mathesis **8**.

Ursprünglich klassischer Philologe, ward Smith 1850 Prof. für Mathematik und veröffentlichte Arbeiten, deren Titel und wesentlicher Gehalt hier zusammengestellt sind (F. d. M. **25**, 29). Tn.

Edm. Laguerre. Oeuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. Tome I. Algèbre. Calcul intégral. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XV + 471 S. gr. 8°. [Darboux Bull. (2) **22**, 304-310, Anzeige von Borel.]

Die gesammelten mathematischen Aufsätze von Edmond Laguerre (geb. 9. April 1834 zu Bar-le-Duc, gest. ebenda 14. Aug. 1886) werden in zwei Bänden abgedruckt. Der zweite Band soll alle geometrischen Arbeiten bringen; der gegenwärtige erste Band enthält die Abhandlungen aus der Algebra (46) und aus der Integralrechnung (21). Die

grosse Anzahl dieser Artikel zeigt schon, dass jeder einzelne kurz ist. „Wenn man gelesen werden will“, pflegte er wiederholt zu sagen, „verwässert man nicht auf hundert Seiten einen Gegenstand, dessen Entwickelung kaum zehn verlangt“. Diesem Gedanken treu, hat er seine an fruchtbaren Ideen reichen Aufsätze immer in knappster Form redigirt. Er tritt in seinen Veröffentlichungen auf wie in seinem Leben, geschmückt mit liebenswürdiger Bescheidenheit. „Seine wissenschaftlichen Untersuchungen, die Anforderungen der Berufspflicht, seine Hinneigung zu seiner liebenswürdigen Lebensgefährtin, endlich die Erziehung seiner beiden Töchter füllten sein Leben voll und ganz aus; kein anderes Vergnügen hatte Reize für ihn; in unserem Zeitalter ungestillter Wünsche und fieberhaften Ehrgeizes hat Laguerre es verstanden, seine frohen Genüsse einzig aus den reinen Quellen der Pflicht und der Arbeit zu schöpfen.“ Wir geben diese charakteristischen Stellen aus Rouché's Lebensbeschreibung des ihm zu früh entrissenen Freundes (J. de l'Éc. Pol. Cahier **56**, 1886), um durch sie zur Lectüre des inhaltreichen Bandes einzuladen; die Mannigfaltigkeit der einzelnen Aufsätze, die ja zumeist im Jahrbuche besprochen sind, macht ein Eingehen auf den Inhalt unmöglich. Dem Bande vorangeschickt ist die Würdigung Laguerre's, die Poincaré beim Tode seines akademischen Collegen in den C. R. veröffentlicht hat. Lp.

A. Berteu. Vita dell'Abate Francesco Faà di Bruno, fondatore del Conservatorio di N. S. del Suffragio in Torino. Torino: Tip. del Suffragio. 436 S. kl. 8°.

Eine Biographie von F. Faà di Bruno. In Alessandria den 7. März 1825 geboren, studirte er in Paris von 1850-55 unter der Leitung von Cauchy und Leverrier, erhielt den Lehrstuhl der höheren Analysis als Nachfolger von Chiò an der Universität Turin und starb in Turin am 26. März 1888. Der Verf. betrachtet eingehend nur die religiösen Unternehmungen des bekannten Gelehrten; einige Ergänzungen, welche die Mathematiker interessiren können, findet man in der Recension des Ref. in Loria Bollettino **1**, 94-98. La.

L. Lorenz. Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. Valentiner. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome premier. Deuxième fascicule. Copenhague: Lehmann & Stage. S. 211-529.

Das erste Heft des ersten Bandes der Ausgabe von Lorenz' wissenschaftlichen Schriften ist in F. d. M. **27**, 17, 1896 angezeigt worden. Das zweite Heft enthält die folgenden Abhandlungen:

Recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction. I. Vidensk. Selsk. Skr. (5) **8** (1869); S. 211-298. II. Vidensk. Selsk. Skr. (5) **10** (1875); S. 299-359. Supplément aux deux mémoires, S. 360-367.

Théorie de la dispersion. Vidensk. Selsk. Skr. (6) **5** (1883) u. Wiedemann Ann. (2) **20**, 1-21; S. 369-402.

Sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente. Vidensk. Selsk. Skr. (6) **6** (1890); S. 403-529.

Wie im ersten Hefte, so sind auch hier vom Herausgeber viele Noten zur Erläuterung oder auch zur Berichtigung am Schlusse jeder einzelnen Abhandlung hinzugefügt worden. Da die Arbeiten ursprünglich dänisch verfasst und in den sehr wenig verbreiteten Schriften der Kopenhagener Gesellschaft der Wissenschaften erschienen sind, so ist erst jetzt durch die Ausgabe in französischer Sprache die Möglichkeit zu einer allgemeineren Kenntnisnahme der zur mathematischen Physik gehörigen Untersuchungen eines selbständig forschenden Gelehrten gegeben. Lp.

A. Vassilief. **Pafnutii Lvovitch Tchébichef et son oeuvre scientifique.** Loria Boll. bibl. **1**, 33-45, 81-92, 113-139; auch sep. Turin: Charles Clausen. 56 S. gr. 8° mit Bildnis.

Eine kurze Biographie und eine ausführliche Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen von Tschebyscheff (geb. 14/26. Mai 1821 im Gouvernement Kaluga, District Borowsk; gest. 26. Novbr., bezw. 8. Decbr. 1894 in St. Petersburg). Die einzelnen Teile sind betitelt: I. Biographie. Erste Untersuchungen (Zahlentheorie). II. Angenäherte Werte einer Function. Minimalaufgaben einer besonderen Art. Functionen, die möglichst wenig von Null abweichen. Construction geographischer Karten. III. Integration irrationaler Differentiale. IV. Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Reihenentwickelung nach den Nennern der Näherungswerte der Kettenbrüche. Grenzwerte der Integrale in dem Falle, dass die integrirte Function in zwei Factoren zerlegbar ist. V. Neue Gattung des Problems der Variationsrechnung. Reihenentwickelung nach den Functionen R_n. Folgeminima des Ausdruckes $x-ay-b$. VI. Grenzwerte der Integrale und Summen. VII. Theorie der Wahrscheinlichkeit. VIII. Reihe von Lagrange. Angewandte Mechanik. Geometrie der Oberflächen (Deformation der Ebenengewebe). Mechanismen von Tschebyscheff. IX. Allgemeine Betrachtungen über das wissenschaftliche Lebenswerk Tschebyscheff's. — Die am Schlusse beigefügte Liste der Schriften umfasst 93 Nummern. —

„Im Gegensatze zu Weierstrass muss die Leistung von Tschebyscheff und seiner Schule durch das Bestreben charakterisirt werden, die auf praktische Fragen anwendbaren Methoden zu geben. . . . Den Bedürfnissen der angewandten Wissenschaften zu begegnen durch die Ausbildung mathematischer Methoden, welche nicht die Grenzen der in diesen Wissenschaften erreichbaren Genauigkeit überschreiten, das war das beständige Streben von Tschebyscheff". Lp.

A. Cayley. The collected mathematical papers. Vol. XIV: Index to the 13 volumes. Cambridge: University Press. V + 141 S. 4°.

A. Cornu. Notice sur l'oeuvre scientifique de H. Fizeau. Annuaire Bur. Long. 1898, C, 40 S.

Armand Hippolyte Louis Fizeau, geb. zu Paris am 23. Septbr. 1819, wird vom Verf. dieser sympathisch geschriebenen Skizze als derjenige gefeiert, der am meisten zur Vollendung der von Fresnel entworfenen Grundlagen der Wellentheorie des Lichtes beigetragen hat. Die berühmten Experimentalarbeiten Fizeau's werden ihrem Werte gemäss gewürdigt, die kleineren kurz gestreift. Sein Tod erfolgte am 18. September 1896 zu Venteuil bei Jouarre. Gleich bei seinen ersten Entdeckungen hatte Arago einst in der Akademie gesagt: Fizeau wird uns Fresnel wieder erstehen lassen. Cornu schliesst deshalb mit dem Wunsche, dass bald ein jüngerer Physiker Fizeau wieder auferstehen lasse. Lp.

R. B. Eötvös. Gedächtnisrede auf Anianus Jedlik. Ungar. Ber. **15**, 401-418.

Jedlik (1800-96), ein Benedictiner, war von 1840 bis 1878 Professor der Physik an der Pester Universität; seine Leistungen, wenig gekannt oder ganz übersehen, werden hier hervorgehoben: es seien der elektrische Röhrencondensator, der elektromagnetische Motor und die Dynamomaschine, mit welch letzterer er um sechs, vielleicht um 15 Jahre Siemens zuvorgekommen sei. Auch feine optische Gitter, insbesondere Kreisgitter, hat Jedlik hergestellt. Tn.

J. C. V. Hoffmann. Bardey als Schulmathematiker. Ein Gedenkblatt zu seinem 70. Geburtstag (21. Mai 1898). Hoffmann Z. **29**, 241-259, 321-323.

Der dem Vereine zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts gelegentlich seiner Tagung in Leipzig (Pfingsten 1898) gewidmete Artikel erörtert den Einfluss der Bardey'schen Aufgabensammlungen auf den Schulunterricht in der Arithmetik und Algebra und bespricht im Zusammenhange mit diesem Thema einige Züge aus den Erlebnissen Bardey's. Lp.

M. Noether. Francesco Brioschi. Math. Ann. **50**, 477-491.

Geboren den 22. December 1824 in Mailand, studirte Francesco Brioschi in Pavia, promovirte daselbst 1845, war 1852-1861 Professor für angewandte Mathematik an derselben Universität, darauf kurze Zeit Generalsecretär des Unterrichtsministeriums, gründete und organisirte 1862 das Istituto Tecnico Superiore zu Mailand, als dessen Director er zugleich Hydraulik und Analysis lehrte. Diese Aemter behielt er bis zu seinem Ende bei, war daneben seit 1865 Senator des Königreichs und 1870-1882 auch Mitglied des Consiglio Sup. des Unterrichtsministeriums, von 1884 an Präsident der R. Accademia dei Lincei. Nachdem er sich an der Herausgabe der ersten Serie von Tortolini's

Annali di Matematica, Rom 1858-1866, beteiligt hatte, wurde er von 1867 an zuerst mit Cremona, später alleiniger Leiter der zweiten Serie, die zu Mailand erschien. Er starb am 13. Dec. 1897 zu Mailand.

Den kurzen biographischen Notizen lässt Noether eine eingehende Würdigung der wissenschaftlichen Verdienste Brioschi's folgen. Brioschi's mathematische Leistung trägt im Gegensatz zu seinen technischen Arbeiten, die mit seinem technischen Fache zusammenhängen, einen abstracten, ja fast formalen Charakter. Seine frühesten Arbeiten bewegten sich auf verschiedenen analytischen Gebieten, bis 1854 die Theorie der Determinanten und Invarianten einsetzte. Von 1858 an sind deutlich hervortretende getrennte Gebiete zu nennen, die aber alle auf die Anwendung der Theorie der algebraischen Formen zusammenlaufen, nämlich: zuerst die Theorie der Gleichung fünften Grades, im Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Functionen, die von 1874 an selbständiger auftritt; ferner seit 1876 die Theorie der linearen Differentialgleichungen, und endlich, nach Vorarbeiten von 1857, von 1881 an die Theorie der hyperelliptischen Functionen, besonders von zwei Argumenten. M.

L. Cremona. Francesco Brioschi. Annali di Mat. (2) **26**, 343.

E. Beltrami. Francesco Brioschi. Ibid. 343-347; Periodico di Mat. **13**, 33-36.

Der erste Artikel kündet in wenigen Worten den Tod des um die Annali di Matematica hochverdienten Mannes an und betont den Verlust, den die Wissenschaft durch seinen Tod erlitten hat. Der folgende grössere Artikel von Beltrami ist der Perseveranza vom 23. December 1897 entnommen. Er schildert eingehend die Stellung, welche Brioschi in der Wissenschaft eingenommen, und das Verdienst, das er sich durch Herausgabe der Annali erworben hat. Auszüge aus beiden Artikeln in englischer Uebersetzung stehen in Lond. M. S. Proc. **29**, 721-726. M.

L. Fuchs. Francesco Brioschi †. J. für Math. **119**, 259.

Die Leser des Journals werden von dem am 13. Decbr. 1897 in Mailand erfolgten Tode Francesco Brioschi's, des langjährigen Mitarbeiters des Journals und des Herausgebers der Annali di Matematica pura ed applicata, in Kenntnis gesetzt. M.

A. Capelli. Francesco Brioschi. Cenno necrologico. Batt. G. **36**, 51-54.

Ein warmer Nachruf für den Nestor der italienischen Mathematiker, der mit dem Eifer eines Jünglings bis zuletzt die Wissenschaft förderte. Auf eine kurze Biographie folgt eine Darlegung der wissenschaftlichen Arbeiten Brioschi's. M.

C. v. Voit. Francesco Brioschi. Münch. Ber. **28**, 449-452.

Dieser Nachruf ist mit Benutzung des Noether'schen Nekrologes in den Math. Ann. verfasst, über den oben berichtet ist. M.

C. Hermite. Francesco Brioschi. Loria Boll. bibl. **1**, 62-73.

Uebersetzung des Nachrufs aus C. R. **125** (F. d. M. **28**, 26, 1897); angehängt ist ein Verzeichnis der Schriften Brioschi's in 238 Nummern (ausser vier selbständig erschienenen Büchern), nach einer Zusammenstellung von Brioschi selbst und von Jung. Lp.

G. Veronese. Parole in commemorazione del Prof. Senatore Francesco Brioschi. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 144-145.

Ein kurzer, warm empfundener Nachruf. M.

G. Francesco Brioschi. Nature **57**, 279.

G. Grassi. Commemorazione di Giovanni Cantoni. Napoli Rend. (3) **4**, 46-49.

Giovanni Cantoni, geb. zu Mailand am 31. Dec. 1818, studirte zu Pavia Mathematik, wurde 1851 Lehrer der Physik zu Lugano und 1859 Professor der allgemeinen Physik zu Pavia, bis 1893, wo er sich vom Unterricht zurückzog. Cantoni neigte zu philosophischen Speculationen, die sich auch in seinen Arbeiten über die Principien der Physik kundgeben. Seine Specialuntersuchungen betreffen verschiedene Gegenstände der Physik und Meteorologie (vergl. den Nekrolog von Gerosa, F. d. M. **28**, 27, 1897). M.

O. C. Wendell. Alvan Graham Clark. American Ac. Proc. **33**, 520-524.

Der durch die Vervollkommnung der Fabrication von Teleskopen und die Entdeckung des Siriustrabanten bekannte A. Graham Clark wurde zu Fall River Mass. am 10. Juli 1832 geboren und starb zu Cambridgeport am 9. Juni 1897 (vergl. F. d. M. **28**, 27, 1897). M.

Death and obituary notice of Rev. C. L. Dodgson. Nature **57**, 279-280.

Charles Lutwidge Dodgson, geb. 1832 zu Daresbury in Cheshire, gest. 1897, war Zögling der Universität Oxford, las über Mathematik daselbst von 1855-1881, war Examinator für Mathematik seit 1863 und Moderator seit 1868. Er war ein eifriger Verfechter der Autorität des Euklid; dieser Ansicht galt sein Hauptwerk „Euclid and his modern rivals“ (1879) mit Supplement (1885). Ferner schrieb er:

A syllabus of plane analytical geometry (1860), Formulae of plain trigonometry (1861), An elementary treatise on determinants (1867), Euclid, book V, proved algebraically (1874), Euclid, books I and II (1882), A new theory of parallels (1888), Pillow problems (1893). Lp.

P. Cassani. Commemorazione del m. e. Paulo Fambri. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 319-335.

Schildert das abwechselungsreiche Soldatenleben Fambri's (1827-97), dann die militärwissenschaftlichen, die mathematischen, die praktisch-physikalischen, endlich die allgemein litterarischen Erzeugnisse seines Geistes (vergl. F. d. M. **28**, 28, 1897). Tn.

R. Gautier. Arthur Kammermann. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 96-100.

Arthur Kammermann, geb. zu Biel am 24. Decbr. 1861, studirte unter R. Wolf in Zürich, wurde 1881 Adjunct, 1890 Astronom der Genfer Sternwarte, starb an der Schwindsucht am 15. Decbr. 1897. Seine Arbeiten erschienen in den Astr. Nachr. und den Archives de Genève. Dem Uhrengewerbe und der Meteorologie widmete er besonders seine Zeit. Lp.

T. C. Mendenhall. Alonzo Smith Kimball. American Ac. Proc. **33**, 524-526.

Der Physiker Alonzo S. Kimball wurde 1843 zu Centre Harbor, New Hampshire, geboren. Er war lange Zeit Professor der Physik am Worcester Polytechnic Institute und ein eifriger Förderer des physikalischen Unterrichts. Er starb am 2. Decbr. 1897. M.

M. Nyrén. Eduard Georg Magnus Lindemann. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 13-20.

Lindemann, geb. in Nischni-Nowgorod am 13. (1.) Juni 1842, studirte in Kasan, Moskau und Dorpat, lebte von 1865-66 in Nischni-Nowgorod, 1867 in Petersburg und war vom 1. Jan. 1868 bis zu seinem Tode am 21. Decbr. 1897 Schriftführer der Sternwarte in Pulkowa. Seine wissenschaftlichen Arbeiten gehören zumeist der Astrophotometrie an. Lp.

Obituary notices of Eduard Lindemann and Oscar Stumpe. Nature **57**, 299-300.

In Bezug auf Lindemann vergleiche man den vorangehenden Bericht nach dem Nekrolog in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Stumpe starb, 35 Jahre alt, in Berlin. Seine Hauptarbeit ist die Berechnung der Bewegung des Sonnensystems, ausgeführt

mit Hülfe der Berechnung der Eigenbewegungen von 1054 Fixsternen. Zuletzt war er Assistent von Auwers. Lp.

K. Laves. Karl Necker. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33,** 100-102.

Karl Necker, geb. 26. Novbr. 1867 in Berlin, studirte nach Absolvirung des Luisenstädtischen Gymnasiums von 1886-1890 auf der Berliner Universität, war 1888-1893 Mitglied des mathematischen und des astronomischen Seminars, dann Assistent an der Strassburger Sternwarte, promovirte in Berlin 1894, Assistent an der Kuffner'schen Sternwarte im Sommer 1895, dann bis 1897 wieder in Strassburg, verunglückte in Cairo auf einem Bahngeleise, wo er überfahren wurde (23. Decbr. 1897). Lp.

W. Schur. Ernst Christian Julius Schering. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33,** 2-5.

W. H. and G. Chisholm Young. Ernst Christian Julius Schering. Nature **57,** 416.

Schering, geb. 13. Juli 1833 im Forsthause Sandbergen bei Bleckede an der Elbe, studirte von 1850-1852 auf dem Polytechnikum zu Hannover, von 1852-1857 unter Gauss, Wilhelm Weber und Dirichlet in Göttingen, promovirte 1857, habilitirte sich ebenda 1858, wurde 1860 ausserordentlicher, 1868 ordentlicher Professor, Director der Abteilung B der Sternwarte für theoretische Astronomie, Geodäsie und mathematische Physik. Die Herausgabe der Werke von Gauss übernahm er 1860. Seine Gattin war eine Tochter des schwedischen Mathematikers Malmstén; er starb am 2. Novbr. 1897. Die wissenschaftlichen Arbeiten des als „Herausgebers von Gauss" fortlebenden Gelehrten sind seit 1868 im Jahrbuche besprochen worden. Lp.

G. Loria. Necrologio. Ernesto Cristiano Giulio Schering. Loria Boll. bibl. **1,** 26-29.

Der Aufsatz beruht auf Mitteilungen, die der Bruder des Verstorbenen, K. Schering, dem Verf. gemacht hatte. Am Schlusse befindet sich ein Verzeichnis der Schriften Schering's, 32 Nummern umfassend. Lp.

L. Fuchs. Ernst Christian Julius Schering †. J. für Math. **119,** 86.

Kurze Nachricht von dem Hinscheiden Schering's, des Herausgebers der Werke von Gauss. Schering war geb. den 13. Juli 1833 im Forsthause Sandbergen bei Bleckede a. E., Provinz Hannover. Zahlreiche Abhandlungen von ihm über reine Mathematik und mathematische Physik sind veröffentlicht in den Nachrichten und Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. M.

C. v. VOIT. Nekrolog auf Leonhard Sohncke. Münch. Ber. **28,** 1898, 440-449.

Mit Benutzung der Nekrologe von S. Finsterwalder (Münch. Neueste Nachrichten vom 10. November 1897) und von S. Günther (Beilage z. Allg. Zeitung vom 4. Dec. 1897). Mitten im kräftigsten Schaffen wurde Leonhard Sohncke am 1. Nov. 1897 durch den Tod dahingerafft. Am 22. Februar 1842 zu Halle geboren, studirte L. Sohncke an der dortigen Universität und zu Königsberg, wo er zugleich als Gymnasiallehrer wirkte. Hier habilitirte er sich auch als Privatdocent für Physik, erhielt bald darauf einen Ruf als Professor der Physik an die polytechnische Schule zu Karlsruhe, ging von dort an die Universität Jena und ward nach einigen Jahren an die technische Hochschule zu München berufen. Seine Arbeiten betrafen hauptsächlich die Theorie der Krystallstructur, die Polarisation des Lichtes, die Newton'schen Farbenringe, die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur und die Meteorologie (vergl. F. d. M. **28,** 30, 1897).

M.

P. E. MATHESON and E. B. ELLIOTT. James Joseph Sylvester. Johns Hopkins Univ. Circ. **18,** 29.

Biographische Skizze, aus dem „Dictionary of national biography" abgedruckt, ohne Berücksichtigung anderer Quellen als englischer.

Lp.

H. POINCARÉ. L'oeuvre mathématique de Weierstrass. Acta Math. **22,** 1-18.

Charakteristisch für das wissenschaftliche Werk des grossen deutschen Mathematikers ist die Einheit des Gedankens, der durch alle seine mathematischen Arbeiten hindurchgeht; Weierstrass behält das von Anfang an festgesetzte Ziel dauernd im Auge; er schafft seine Methoden lediglich zu dem Zwecke, dieses Ziel zu erreichen. Angeregt durch seinen Lehrer Gudermann, vertieft er sich in das Studium der elliptischen Functionen. Diese von Euler begründete, von Legendre ausgebaute Theorie übt auf ihn einen ganz besonderen Reiz aus. Nach der Einführung der doppeltperiodischen Functionen durch Abel und Jacobi wurde das Studium der aus der Integration algebraischer Differentiale entspringenden Transcendenten, die wirkliche Darstellung dieser Grössen, die Entwickelung ihrer Eigenschaften eines der Fundamentalprobleme der Mathematik. An seiner Lösung versuchte sich Weierstrass mit unermüdlichem Eifer. Aber um eine vollständige und zusammenhängende Theorie der Abel'schen Functionen schaffen zu können, musste Weierstrass zuvor 1. die allgemeine Theorie der Functionen fester begründen, zunächst die der Functionen einer Variable, dann die der Functionen zweier Variabeln; 2. musste er, da die Abel'schen Functionen die natürliche Erweiterung der elliptischen Functionen sind, die Theorie der letzteren Transcendenten so vervollkommnen, dass eine Verallgemeinerung ermöglicht wurde; 3. musste er die Abel'schen Functionen selbst angreifen. Ob-

wohl Weierstrass diesen seinen Plan mit Consequenz verfolgte, vernachlässigte er dennoch nicht die übrigen Teile der Analysis. Da er die Ergebnisse seiner Forschung nicht sofort durch den Druck veröffentlichte, sondern die Schätze seiner Wissenschaft zahlreichen Schülern mündlich mitteilte, die dann seine schönen Resultate weiter verbreiteten und auf dem von ihm gebahnten Wege weiter entwickelten, so ist es schwer, einen exacten Bericht über Weierstrass' mathematische Arbeiten zu geben. H. Poincaré hat in vorstehendem Aufsatze diese schwierige Aufgabe in meisterhafter Weise gelöst, und wir können seine von Begeisterung für den grossen deutschen Mathematiker durchglühte Darstellung allen denen zu lesen empfehlen, die sich für die Geschichte der neueren Analysis interessiren. Der erste, umfangreichste Teil des Berichtes behandelt die allgemeine Theorie der Functionen, der zweite die elliptischen, der dritte die Abel'schen Functionen, und der letzte erwähnt kurz die übrigen Arbeiten von Weierstrass. Die vollkommene Strenge, welche die Methoden des grossen Analytikers beherrschte, liess der Anschauung keinen oder nur den unentbehrlichsten Anteil. Ein Abschweifen auf das geometrische Gebiet ist in der Berliner Schule verpönt. Die ganze Zahl ist Quelle und Ausgangspunkt; auf der Sicherheit der Arithmetik basirt die der ganzen Theorie. M.

E. Hartwig. Friedrich August Theodor Winnecke. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 5-13.

Geb. 5. Febr. 1835 in Gross-Heere bei Hildesheim, studirte Winnecke 1853 in Göttingen, 1854 in Berlin, promovirte daselbst 1856, arbeitete $1^1/_2$ Jahre unter Argelander in Bonn, wurde 1858 Adjunct-Astronom in Pulkowa und stieg daselbst zum älteren Astronomen und zum Vicedirector auf. Wegen eines Nervenleidens nahm er 1865 seinen Abschied, erlangte in einer Heilanstalt zu Bonn seine Gesundheit wieder, lebte als Privatmann in Karlsruhe und wurde 1872 an die neugegründete Universität zu Strassburg berufen. Hier wurde die neue Sternwarte unter seiner Leitung gebaut und ausgestattet; er bezog sie im November 1880. Am 13. Jan. 1881 verunglückte ein Sohn von Winnecke auf dem Eise; bei der Wiederkehr des Tages 1882 kam die frühere Krankheit wieder zum Ausbruch, und die sofort unternommene Wiederholung der vorigen Kur blieb erfolglos. In der Gewalt dieser finsteren Macht verblieb er 16 Jahre bis zu seinem Tode am 2. Decbr. 1897. Lp.

M. S. de Rossi. Nota biografica del Prof. Cav. Azzarelli. Rom. Acc. P. d. N. L. **51**, 49-55.

Mattia Azzarelli, 1811 zu Spello geb., wurde für den geistlichen Beruf bestimmt, ging aber 1839 zum Militär über und lehrte Mathematik an der Kadettenschule der päpstlichen Artillerie zu Rom, von 1855 ab auch an der Universität daselbst. 1870 wurde er Mitglied der Europäischen Gradmessung. Im folgenden Jahre wurde er wegen

Eidesverweigerung seiner Universitätsprofessur enthoben, aber an verschiedenen katholischen Instituten Roms zum Lehrer gewählt, darauf Präsident des Istituto tecnico zu Merode. 1862 war er Mitglied der Accademia de' Nuovi Lincei geworden, zu deren Präsidenten er 1895 gewählt wurde. Es folgt ein Verzeichnis seiner Abhandlungen in den Atti und den Memorie dieser Akademie. M.

H. G. van de Sande Bakhuyzen. G. F. W. Baehr. Amst. Versl. **7,** 131-132.

Nekrolog auf G. F. W. Baehr (1822-1898), Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Delft von 1864 bis 1885. Lp.

H. M. Taylor. Notice of Dr. Frost. Lond. M. S. Proc. **29,** 726-727.

Percival Frost, geb. 1. Septbr. 1817 zu Hull, studirte in Cambridge, wurde 1841 als Geistlicher ordinirt, lebte aber als Privatlehrer in Cambridge und hatte unter anderen Clifford als Schüler, war Lehrer am Jesus College und 30 Jahre lang am King's College, Examinator in den mathematischen Tripos von 1846 bis 1883; er starb 5. Juni 1898. Er verfasste ein Buch über Newton's Principia (1854), mit Wolstenholme zusammen „A treatise on solid geometry“ (1863), endlich wieder allein „A treatise on curve tracing“ (1872). Lp.

R. T. Glazebrook. Notice of Dr. Hopkinson. Lond. M. S. Proc. **29,** 727-731.

Obituary Notice of Dr. John Hopkinson. F. R. S. Nature **58,** 419-420.

Geb. zu Manchester 1849, studirte John Hopkinson im Trinity College zu Cambridge, aus dem er als „Senior Wrangler“ 1871 und als „first Smith's prizeman“ hervorging. Von 1872-1878 war er als Ingenieur einer Firma für Leuchtturmwerke thätig. Seine wissenschaftlichen Arbeiten beziehen sich auf die Elektricität und den Magnetismus; für sie erhielt er 1890 die königliche Medaille der Royal Society, deren Mitglied er seit 1878 war. Seine Hauptverdienste liegen auf dem Gebiete der Dynamomaschinen. Er verunglückte mit einem Sohn und zwei Töchtern durch Absturz von den Felsen der Petite Dent de Veisivi zu Arolla am 27. August 1898; begraben in Territet. Lp.

Obituary notice of Henry Perigal. Lond. M. S. Proc. **29,** 732-735.

Geb. 1. April 1801, gest. 6. Juni 1898, Mitglied vieler gelehrten Gesellschaften, äusserst geschickt in dem mechanischen Zeichnen geometrischer Figuren, die er an Freunde verteilte, unter anderem auch in einer Sammlung „Graphic demonstrations of geometric problems“ (1891), in der Astronomie bekannt durch seine eigentümlichen Anschauungen über die Bahn des Mondes (Moon paradox). Lp.

R. Steinheil. Gottlieb Reinfelder. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33,** 170-172.

Geb. 18. December 1836 zu Pegnitz bei Nürnberg, gest. 30. Mai 1898 zu München; von 1857 bis 1864 in der optisch-astronomischen Werkstätte von C. A. v. Steinheil thätig, gründete Reinfelder mit Karl 1864 eine Werkstätte, trennte sich aber nach wenigen Monaten von seinem Gesellschafter und errichtete selbständig die „Optische Anstalt von G. Reinfelder“ in München. Durch die Lieferung von gegen 30000 Objectiven für Messinstrumente hat diese Anstalt die französischen Firmen, welche dieselben früher lieferten, ganz vom Markte verdrängt. Lp.

M. Cantor. Necrologio. Ermanno Schapira. Loria Boll. bibl. **1,** 106-109.

Uebersetzung der im Mathematischen Verein zu Heidelberg am 13. Mai 1898 gehaltenen Gedächtnisrede für Hermann Schapira, geb. 16. Aug. 1840 zu Erswilken bei Tauroggen, gest. 9. Mai 1898 zu Cöln. Er studirte 1868 auf der Gewerbeakademie zu Berlin, war Kaufmann in Odessa von 1871 bis 1878, studirte unter M. Cantor in Heidelberg, las als Privatdozent daselbst zuerst im Wintersemester 1883/84 und wurde im Winter 1887/88 ebenda ausserordentlicher Professor. Seine wissenschaftlichen Arbeiten werden kurz besprochen. Bekannt sind seine Untersuchungen über Cofunctionen, denen er ein dreibändiges Werk widmen wollte. Lp.

G. Darboux. Notice sur la vie et les travaux de Paul Serret. C. R. **127,** 37-38.

G. Loria. Necrologio. Loria Boll. bibl. **1,** 157.

Paul Serret wurde am 16. October 1827 zu Aubenas geboren, besuchte die École Normale und wurde dann Privatlehrer der Mathematik zu Paris. Von seinen Schriften werden hier erwähnt 1. das 1855 erschienene kleine, aber bedeutende Werk „Des méthodes en Géométrie“, dann 2. das 1860 erschienene Buch: „Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure“, und 3. die 1869 erschienene „Géométrie de direction“, das ein für die Geometrie äusserst fruchtbares Princip erhält. Er starb am 24. Juni 1898. M.

O. Callandreau. Notice sur M. Souillart, Correspondant pour la Section d'Astronomie. C. R. **126,** 1455-1457.

Der durch seine langjährigen Untersuchungen über die Theorie der Jupitertrabanten hoch verdiente Astronom Souillart trat 1851 in die École Normale, wo er das Interesse für die Mechanik des Himmels gewann und sich entschloss, das Hauptwerk Laplace's fortzuführen. Er war nach einander Professor der Mathematik am Lyceum St. Omer,

an der Facultät zu Nancy, dann seit 1873 Professor der theoretischen Mechanik an der Faculté des Sciences de Lille und einige Jahre später auch Professor der Astronomie daselbst. M.

J. Kowalczyk. Johann Wostokoff. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 168-170.

Johann Wostokoff, geb. zu Jaroslawl am 13. (1.) Jan. 1840, studirte in Petersburg besonders unter Sawitsch, war 1863-1865 ausseretatsmässiger Astronom in Pulkowa, 1866-1869 Beobachter an der Sternwarte in Kiew, 1869 bis zum Tode 2. Febr. (21. Jan.) 1898 Director der Sternwarte in Warschau. Sowohl als theoretischer wie auch als praktischer Astronom war er thätig; mehrmals war er Decan der mathematischen Facultät und stellvertretender Rector. Die theoretischen Arbeiten aus der Himmelsmechanik und aus der Geodäsie sind in russischer Sprache erschienen. Lp.

J. Edwards. Brief notice of Walter Wren. Lond. M. S. Proc. **29**, 731-732.

Geb. 1831 zu Buntingford, gest. 5. Aug. 1898, war Walter Wren, der seit seiner Studentenzeit ein Rückenmarksleiden hatte, ein berühmter Lehrer für die Vorbereitung zum Dienst in Indien. Lp.

S. Dickstein. W. Zajaczkowski. Wiad. mat. **2**, 258-261 (Polnisch).

Notiz über das Leben des polnischen Mathematikers W. Zajaczkowski (1837-1898) nebst einer Liste seiner Schriften. Dn.

P. G. Tait. Scientific papers. Vol. I. Cambridge: University Press. XIV + 498 S. 4°.

Auf den Vorschlag der Syndici der Universitätsdruckerei zu Cambridge zur Veranstaltung einer Gesamtausgabe seiner hierfür geeignet erachteten Schriften hat Tait selbst die Auswahl getroffen und in chronologischer Folge zum Abdruck gebracht. Der vorliegende erste Band umfasst 60 Nummern aus den Jahren 1859 bis 1881.

Unter den ausführlichen Aufsätzen sind zuerst diejenigen der frühesten Periode enthalten, in denen die Quaternionen angewandt werden. Schon geschrieben, bevor der Verf. mit Hamilton persönlichen Verkehr hatte, zunächst nur durch die Vorlesungen (1853) desselben veranlasst, wurden sie dem Vater der Quaternionenrechnung später vorgelegt und von ihm für den Druck empfohlen. Mit dieser Angabe glaubt Tait jetzt den Abdruck jener Artikel unter seinen wissenschaftlichen Schriften entschuldigen zu sollen. Nicht aufgenommen sind solche Abhandlungen, die in Gemeinschaft mit anderen Autoren verfasst sind, ferner die rein polemischen Aufsätze. Die Liste der Titel der fortgelassenen Artikel soll später gegeben werden. Einzelne

von den aufgenommenen Schriften sind schon früher in den Lehrbüchern des Verf. abgedruckt gewesen. Manche originelle Betrachtungen aus diesen Büchern, die inzwischen mehrere Auflagen erlebt haben, sind dagegen nicht aufgenommen worden; unter ihnen befinden sich nach der Einleitung gerade die frühesten Arbeiten, die also an der Spitze der Sammlung hätten stehen müssen. Die einzige Abweichung von der chronologischen Folge ist bei den Abhandlungen über die Knoten eingetreten, wo die beiden Veröffentlichungen aus den Jahren 1884 und 1885 unmittelbar hinter die grosse Arbeit von 1877 gestellt sind. Die zu den Originalen später gemachten Zusätze oder Verbesserungen sind durch eckige Klammern, denen das Datum hinzugefügt ist, kenntlich gemacht.

Der Nutzen solcher Ausgaben ist augenscheinlich. Gerade auf dem Festlande von Europa ist es meistens sehr schwierig, die Gesellschaftsschriften einzusehen, in denen die englischen Gelehrten die Früchte ihrer Forschungen niederlegen; durch eine Vergleichung der im Jahrbuche von 1868 bis 1881 besprochenen Arbeiten Tait's mit dem gegenwärtigen Bande hat sich ergeben, dass sehr viele derselben nicht erwähnt worden sind, welcher Umstand durch die oben berührte Schwierigkeit erklärt und entschuldigt wird. Wenn dagegen im Jahrbuche über manche Erscheinungen aus der Feder des Verf. berichtet ist, die man vergebens in dem Bande sucht, so erhält der Leser durch diesen Umstand einen Massstab für die strenge Sichtung, welche der Verf. mit seinen Erzeugnissen vorgenommen hat, und über die ein unbefangener Urteiler vielleicht anderer Meinung sein kann. Jedenfalls darf die wissenschaftliche Welt zufrieden sein, die vom Verf. wiederholt geprüften und durchgesehenen Schriften nun in einer leicht erhältlichen Ausgabe studiren zu können. Als ebenso tief geschulter Mathematiker wie als geschickter Physiker hat Tait besonders durch das in Gemeinschaft mit Lord Kelvin verfasste Werk über die theoretische Physik in der ganzen wissenschaftlichen Welt das grösste Ansehen; durch die Ausscheidung mancher ephemeren Veröffentlichungen, in denen nationale und persönliche Empfindlichkeiten einen zuweilen verletzenden Ausdruck erhalten haben, macht der vorliegende Band einen vornehmen Eindruck und giebt ein objectives Bild von den Leistungen des berühmten Verfassers. Lp.

Janssen, Loewy. Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897. Annuaire Bur. Long. 1898 E, 12 S.

Festreden bei Gelegenheit der Feier des Tages, an welchem Faye vor 50 Jahren unter dem mächtigen Schutze von Arago und A. von Humboldt zum Akademiker gewählt worden war. Janssen sprach als Vorsitzender, Loewy als Director der Pariser Sternwarte; beide Redner verbreiteten sich über die wissenschaftlichen Arbeiten des Jubilars. Lp.

F. J. Studnička. Uebersicht des Studiums der exacten Wissenschaften bei uns. I. Mathematik, II. Physik und Chemie, III. Astronomie und Meteorologie. Prag. 41 S. gr. Folio. (Böhmisch.)

Wissenschaftlich-kritischer Bericht über die während der Jahre 1848-1898 von Gelehrten böhmischer Nationalität auf dem Gebiete der genannten Wissenschaften erzielten Fortschritte, mit Anführung der namhafteren diesbezüglichen Bücher und Abhandlungen. Sonderabdruck aus der Denkschrift zur Verherrlichung des fünfzigjährigen Regierungsjubiläums S. M. des Kaisers und Königs Franz Joseph I., herausgegeben von der böhmischen Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag. Sda.

F. J. Studnička. Heroen des Geistes. Prag. 264 S. (Böhmisch.)

Biographische Bilder, darstellend das Leben und die wissenschaftliche Thätigkeit von Nicolaus Copernicus, Galileo Galilei, Marcus Marci, René Descartes, G. W. Leibniz, Isaac Newton, Stanislaus Vydra, Carl F. Gauss, Johann Ev. Purkynje. Sda.

F. Klein. Conférences sur les mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago. Recueillies par A. Ziwet. Traduites par L. Laugel. Paris: A. Hermann. IV + 127 S. gr. 8°.

Französische Uebersetzung des unter dem Titel „The Evanston Colloquium" bekannten Buches (vergl. F. d. M. **25**, 52, 1894). Die neue französische Ausgabe jener Vorträge ist auf S. 109 bis 125 durch bibliographische Noten vermehrt worden, in denen der Uebersetzer die seit dem Congress zu Chicago veröffentlichten bezüglichen Schriften namhaft macht und kurz bespricht. In einer Anmerkung spricht Laugel seinen Dank an F. Klein für die hierbei gewährte Unterstützung aus. Lp.

F. Rudio. Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Mit einem farbigen Titelbilde und sechs in den Text gedruckten Figuren. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 306 S. gr. 8°.

Der nach Beendigung des Congresses zusammengestellte Band mit den Verhandlungen der Versammlung giebt ein vollständiges Bild von dem Verlaufe der schönen Züricher Augusttage. Der erste Teil enthält die Vorgeschichte und die Schilderung der Vorgänge des Congresses (S. 1-78); der zweite Teil berichtet über die gehaltenen Vorträge. Von manchen dieser Mitteilungen sind nur kurze Auszüge in den Druck gegeben worden; andere, und zwar gerade die von allgemeinerem Interesse, sind vollständig abgedruckt. Die Referate über diese Vorträge werden in den bezüglichen Abschnitten dieses Bandes des Jahrbuches von den zuständigen Referenten gegeben. Das farbige Titelblatt, welches den Teilnehmern des Congresses in Zürich schon übergeben wurde, ent-

hält die Bildnisse der Mathematiker Daniel Bernoulli, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Jacob Steiner, sowie die Mittelfront des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich, wo der Congress getagt hat. Die vortreffliche Ausstattung des Bandes ist bei der Verlagsfirma selbstverständlich. Lp.

H. BURKHARDT und W. FR. MEYER. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben. Erster Teil: Reine Mathematik. Erster Band: Arithmetik und Algebra. Redigirt von W. Fr. Meyer. Erstes Heft: S. 1-112. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°.

Die Aufgabe, welche sich die neue Encyklopädie stellt, von der das erste Heft in das Berichtsjahr fällt, können wir nicht besser kennzeichnen als durch Aufnahme der „Vorbemerkung“.

Aufgabe der Encyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientirung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaft nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Litteraturangaben die geschichtliche Entwickelung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete ausgiebig berücksichtigen, und zwar in dem Sinne, dass sie einerseits den Mathematiker darüber orientirt, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen giebt. In sechs Bänden von zusammen etwa 240 Druckbogen — jährlich soll ein Band von etwa 40 Druckbogen in 4-5 Heften erscheinen — sollen die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich geordneter Artikel behandelt werden; der letzte Band soll ein ausführliches alphabetisches Gesamtregister enthalten, überdies wird jedem Bande ein besonderes Bandregister beigegeben. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muss natürlich verzichtet werden. Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, dass das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientirung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Commission, zur Zeit bestehend aus W. Dyck in München, G. v. Escherich in Wien, F. Klein in Göttingen, L. Boltzmann in Wien, H. Weber in Strassburg, steht der Redaction zur Seite.

Die Berichterstattung über die einzelnen Artikel der Encyklopädie wird den über die betreffenden Gebiete berichtenden Mitarbeitern des Jahr-

buches übertragen werden; die Referate werden in die bezüglichen Kapitel eingeordnet werden. Lp.

A. Sommerfeld. Mathematische Annalen. Begründet durch A. Clebsch und C. Neumann, herausgegeben von C. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Generalregister zu den Bänden 1-50, zusammengestellt von A. S. Leipzig: B. G. Teubner. XI + 202 S. gr. 8°.

Weitere Litteratur.

Ad. Müller. Nicolaus Copernicus der Altmeister der neueren Astronomie. Ein Lebens- und Culturbild. Freiburg i. B.: Herder. VII u. 159 S. 8° (Stimmen aus Maria Laach. Ergänzungshefte. No. 72).

G. W. Leibniz. Briefwechsel mit Mathematikern. Hrsg. von C. J. Gerhardt. 1. Band. Berlin: Mayer & Müller. XXVIII + 761 S. gr. 8°. Mit einem photograph. Facsimile.

Jella v. Zednik. Sophie Kowalewsky, ein weiblicher Professor. Prag: F. Haerpfer in Comm. 15 S. 8°. (Sammlung gemeinnütziger Vorträge. Hrsg. vom deutschen Vereine zur Verbreitung gemeinnütziger Kenntnisse in Prag. No. 237.)

Mathematics at the British Association. Nature **58,** 534-535.

Kurze Berichte über die gehaltenen Vorträge.

G. Lazzeri. Il primo congresso italiano dei professori di matematica promosso dall'associazione „Mathesis". Periodico di Mat. **13,** 201-203.

E. Lampe. Berichte aus den naturwissenschaftlichen Abteilungen der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Düsseldorf, 19. bis 24. September 1898. Abteilung für Mathematik und Astronomie. Naturw. Rundschau **13,** 539-542.

B. Schwalbe. 70. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Düsseldorf vom 19. bis 24. September 1898. 16. Abteilung: Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. Naturw. Rundschau **13,** 589-600.

E. Dietrich. Bibliographie der deutschen Zeitschriften - Litteratur. 2. Band. Alphabetisches, nach Schlagworten sachlich geordnetes Verzeichnis von ca. 15000 Aufsätzen, die während des Jahres 1897 in ca. 400 zumeist wissenschaftlichen Zeitschriften deutscher Zunge erschienen sind, nebst Ergänzungen zum Jahrgang 1896. Hrsg. unter Mitwirkung von E. Roth und M. Grolig. Leipzig: F. Andrä's Nachf. VIII + 232 S. mit 1 Tab. 4°.

G. Maupin. Opinions et curiosités touchant la mathématique d'après les ouvrages français des 16e, 17e et 18e siècles. Paris: Carré et Naud. 207 S. 8°.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

F. Amodeo. La prima data dell'Accademia reale di Napoli. Napoli Rend. (3) 4, 102-108.

G. Paladino. Rapporto. 101-102.

Als Gründungsjahr der Neapler Akademie wird hier 1698 ermittelt (anstatt des seither stets genannten Jahres 1732). Tn.

Lassalle. Mathematik und Astronomie. Düsseldorf Festschr. 1-9.

Maurer. Physik. Ebenda, 9-14.

Kreutzberg. Mathematisch - naturwissenschaftlicher Unterricht. Ebenda, 40-52.

E. Pauls. Naturwissenschaft und Medicin an der Universität in Duisburg. 1. Naturwissenschaft. Ebenda, 157*-160*.

Die 70. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte tagte vom 19. bis 24. September 1898 in Düsseldorf. Ihr wurde durch den naturwissenschaftlichen, den Architekten- und Ingenieur-Verein, den Geschichtsverein und den Verein der Aerzte Düsseldorfs die Festschrift gewidmet: „Historische Studien und Skizzen zu Naturwissenschaft, Industrie und Medizin am Niederrhein". Düsseldorf: Bergisch-Rheinische Verlags-Anstalt. VIII, 134, 170 S. gr. 8°. Von den verschiedenen Artikeln dieses Buches betreffen die vier mit ihren Titeln angeführten Aufsätze mathematische Gegenstände. Ausser den im allgemeinen nur spärlich ausgefallenen Notizen über minder bedeutende Namen sind zu erwähnen bei Mathematik und Astronomie Mercator (5. März 1512-2. December 1594), bei Physik Benzenberg (1777 bis 1846) und Brewer (1783-1840), bei der Universität Duisburg Peter van Musschenbroek (1692-1761) und Joh. Gottlob Leidenfrost (1715-1794). Lp.

F. Pahl. Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen (Teil I). Pr. (No. 101) Stadt-Realgymn. Charlottenburg. 29 S. 4°.

Von den vier Epochen, die der mathematische Unterricht auf unseren höheren Schulen durchgemacht hat, behandelt Pahl zunächst die erste, die Anfänge des mathematischen Unterrichts im XVI. Jahrhundert, und die zweite, das vollständige Eindringen der Mathematik in den Unterricht der höheren Schulen im XVI. Jahrhundert. Im Jahrhundert der Reformation war noch kein Zweig der Mathematik vollständig entwickelt oder nur formal durchgebildet. Melanchthon und Bugenhagen haben sie noch in den ersten von ihnen verfassten Schulordnungen von den gelehrten Schulen ausgeschlossen, der Universität die Beschäftigung mit ihr überlassend; von Nürnberg und Hamburg aus, wo sie zuerst

eingeführt ist, ist sie aber trotzdem in die Schulen Deutschlands eingedrungen, so dass über die Hälfte aller bis zum dreissigjährigen Kriege entstandenen Schulordnungen die Arithmetik als besonderes Lehrfach aufführen. Gelehrt ist in dieser Zeit allgemein bloss die Grundlage der Arithmetik; Geometrie ist nur im geringsten Umfange und in Verbindung mit der Astronomie getrieben worden. Im XVII. Jahrhundert wird die Mathematik zur reinen Wissenschaft, das Lehrgebäude unserer jetzigen Elementarmathematik kommt fast vollständig zum Abschluss; von ihr wendet sich die höhere Mathematik ab, und in sämtlichen Disciplinen wird das formale Bezeichnungswesen fast ganz zu der jetzt herrschenden Form ausgebildet. Der Geist der Mathematik beherrscht das wissenschaftliche Leben. Durch Männer wie Comenius, Ratichius, Helvicus, Reyher, Jungius, Weigel, Semler, Sturm und Leibniz ist die Erweiterung des mathematischen Wissens auf die Schulen übertragen. Fast alle Gymnasien betreiben die Mathematik als Lehrfach der beiden obersten Klassen, viele dehnen sie auf drei Klassen aus; eine Reihe verlangt schon, dass von der untersten Klasse an die Elemente der Arithmetik, dann in den obersten Klassen die Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie, Astronomie nebst den nützlichen Anwendungen der Messkunst Gegenstand der Unterweisung sein sollen. Bei Beginn des XVIII. Jahrhunderts gehören die Fälle zur seltenen Ausnahme, wo auf den Schulen die Mathesis weder obligatorischer noch facultativer Unterrichtszweig ist. Mi.

R. Starke. Die Geschichte des mathematischen Unterrichts in den höheren Lehranstalten Sachsens von 1700 bis in den Anfang des 19. Jahrhunderts. Pr. (No. 586) Städt. Realsch. Chemnitz. 42 S. 4°.

Nach einer einleitenden Uebersicht wird die Geschichte in vier Abschnitte zerlegt, von denen aber nur zwei behandelt werden, nämlich von 1700 bis 1773 (S. 5-23), von da bis 1847 (S. 23-42). Tn.

H. E. Hawkes. Limitations of Greek arithmetic. American M. S. Bull. (2) 4, 530-535.

Aus den „Elementen“ des Euklid weist der Verf. nach, dass die arithmetischen Begriffe der Griechen durch ihren geometrischen Symbolismus begrenzt waren. Dadurch wurden die Alten dahin geführt, „das Denken in Zahlzeichen dem Handelsmann und dem praktischen Mathematiker zu überlassen. Der reine Mathematiker betrachtete die Linie als die einzig sichere Bezeichnung. Die Trennung der Geometrie von der Analysis war so vollständig, wie Weierstrass es wünschen konnte, aber mit der entgegengesetzten Ordnung in der Bedeutung.“ Dies wird an der irrationalen, der negativen, der gebrochenen (unbekannt bis zu Diophant) Zahl, dem Producte aus mehr als drei Factoren näher gezeigt. Lp.

Salih Zéky Efendi. Notation algébrique chez les orientaux. Journal asiatique, janvier 1898. 20 S. 8°.

M. Curtze. Ein „Tractatus de abaco" aus der Wende des XII. und XIII. Jahrhunderts. Schlömilch Z. **43**, 122-130 Hl. A.

Aus dem cod. Vindobon. Palat. 901, f. 87-96, wird hier (S. 123-129) der genannte Tractat abgedruckt. Er zeigt das Nebeneinander von Abacus- und Algorismus-Rechnen, nennt die Quellen beider, erläutert letzteres durch ersteres, benutzt nach Curtze's Auffassung Decimalbrüche, scheidet deutlich beiderlei Zeichen, lehrt ebenfalls nicht Addiren und Subtrahiren, lehrt auch nicht mehr die complementäre Division.

Tn.

M. Curtze. Ueber eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts. Abhandl. zur Gesch. d. Math. **8**, 1-27.

Von dieser Schrift hat Nagl in Schlömilch Z. **34**, Hl. A. 129-146, 161-170 (F. d. M. **21**, 27, 1889) ein Bruchstück bekannt gemacht und besprochen. Der Verf. kennt zwei vollständige Exemplare derselben aus der Münchener Hof- und Staatsbibliothek, das eine aus dem XII. Jahrhundert, das andere aus dem XIII., und beschreibt jetzt genau das erste Manuscript, Clm 13021, welches das ganze Quadrivium behandelt, als zweiten Teil hiervon die Astronomie. In einer Nachschrift wird als Verfertiger der Handschrift der Frater Sigsboto unter dem Abte Eberhard des Klosters Prüfning bei Regensburg genannt; durch diese Angabe und die Beschreibung der Handschrift wird das in den Monatsh. f. Math. **8**, 193-194, hierüber Gesagte (F. d. M. **28**, 51, 1897) ergänzt und berichtigt. — Der Astronomie ist ein Vorstück über die Principien der Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie in fünf Büchern vorausgeschickt: 1. Ueber ganze Zahlen, 2. über Minutien, 3. über die (quadratische) Wurzelausziehung, 4. über musikalische und geometrische Verhältnisse, 5. über Zeiten und Bewegungen. Hiervon werden eingehend nur die drei ersten betrachtet; doch wird auch einiges über das vierte und fünfte Buch hinzugefügt. Merkwürdig ist es, dass die drei ersten Bücher auf indischen Quellen beruhen, wie der Verf. der Schrift selbst weiss, während das vierte Buch auf römische Tradition zurückgreift. Auf S. 17-27 ist der Abdruck der drei ersten Bücher enthalten.

Lp.

G. Wertheim. Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche. Abhandl. zur Gesch. d. Math. **8**, 147-160.

Nach einer kurzen Schilderung der älteren Methoden zur angenäherten Berechnung der Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl zeigt der Verf., dass nicht Cataldi, wie bisher angenommen ist, sondern Bombelli (41 Jahre vor Cataldi) in seinem Werke L'Algebra 1572 das Kettenbruchverfahren zu dem erwähnten Zwecke erfunden hat.

Cataldi hat diese Entwickelung von Bombelli gelernt, ihr eine passende Form gegeben und hat die Eigenschaften der Näherungswerte der Kettenbrüche vollständig aufgefunden. Lp.

F. J. Studnička. Ein mathematischer Beitrag zur Culturgeschichte Böhmens. Vestnik **6,** No. 9, 512-514. (Böhmisch.)

Culturhistorische Bemerkungen, veranlasst durch die von dem Verf. entdeckte Thatsache, dass sich ein Geschäftsmann in Südböhmen noch heutigen Tages bei seinen Rechnungen der Duplatio und Mediatio bedient. Sda.

B. Pascal. Traduzione del trattato „De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis“. Suppl. al Period. di Mat. **2,** 1-4.

H. Borkowski. Schleiermacher als Mathematiker. Ein Brief von ihm an den Reichsburggrafen und Grafen Friedr. Ferdinand Alexander zu Dohna-Schlobitten 1791. Hoppe Arch. (2) **16,** 337-346.

Aus dem Archive Schlobitten wird hier ein in dem 1887 veröffentlichten Briefwechsel Schleiermacher's mit den Grafen zu Dohna nicht mitgeteilter Brief abgedruckt. Er handelt vom Wesen der Arithmetik und von der Stetigkeit der Grössen, von der Entstehung der Grundrechnungsarten, von der mechanischen Einrichtung unseres Rechen-Systems, endlich von den einfachsten Beispielen von Reihen. Tn.

J. Pierpont. Early history of Galois' theory of equations. American M. S. Bull. (2) **4,** 332-340.

In engem Zusammenhange mit dem Aufsatze über Lagrange's Stellung in der Substitutionentheorie (F. d. M. **26,** 51, 1895) weist der Verf. im ersten Teile seiner diesmaligen Mitteilung nach, dass Lagrange den Weg für den Gedankengang bei Galois vortrefflich geebnet hatte. Der zweite Teil dient dann zur historischen Schilderung der Art, wie die algebraischen Theorien von Galois bekannt geworden sind; am Schlusse dieser Darlegung werden besonders die ersten Erwähnungen der Galois'schen Ideen in den Schriften anderer Mathematiker zusammengestellt. Lp.

F. Meyer. Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). Batt. G. **36,** 306-316.

Fr. Meyer. Ueber den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Polnische Uebersetzung von S. Dickstein. Fortsetzung. 2. Teil B. a, b. C. a. Prace mat.-fiz. **9,** 222-241.

Vgl. F. d. M. **24,** 45, 1892; **27,** 32, 1896; **28,** 53, 1897.

G. Eneström. Johan de Witt et la théorie des rentes viagères composées. Archief voor de verzekeringswetenschap en aanverwante vakken (Haag) **3,** 263-272.

In einem früheren Aufsatze (vgl. F. d. M. **28,** 40, 1897) hatte der Verf. mit Benutzung einer von De Witt im Jahre 1671 herausgegebenen Schrift die Methode, welche dieser zur Berechnung von gewöhnlichen Leibrenten angewendet hatte, dargelegt. Inzwischen waren aber einige Briefe von De Witt an Hudde veröffentlicht worden, worin angeblich eine „Generale regul" zur Ermittelung des Wertes einer zusammengesetzten Leibrente enthalten ist. Leider bezieht sich diese Regel nur auf einen speciellen Fall, und die Art der Herleitung derselben ist auch nicht einmal angedeutet; der Verf. hat sich darum vorgenommen, teils die allgemeine Formel aufzustellen, teils den Weg, auf welchem De Witt zu seinem Resultate gelangte, aufzufinden. Es zeigt sich dabei, dass die Regel in der That unrichtig ist, und zwar aus dem Grunde, dass De Witt den Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit unabhängiger Ereignisse anwendete, obgleich nicht alle Ereignisse, welche er in Betracht zu nehmen hatte, von einander unabhängig waren. Dennoch ist der Fehler, welcher entsteht, wenn man De Witt's Regel benutzt, im allgemeinen wenig beträchtlich.

Zuletzt bemerkt der Verf., dass die Richtigkeit seiner im vorigen Aufsatze gegebenen Darstellung der De Witt'schen Methode für gewöhnliche Leibrenten durch einen der fraglichen Briefe bestätigt wird.

E.

W. W. Beman. Euler's use of i to represent an imaginary. American M. S. Bull. (2) **4,** 274, 551.

An einer Stelle im 2. Bande der Introductio setzt Euler $l(-n)$ gleich i. Der Gebrauch von i für $\sqrt{-1}$ findet sich zuerst in einer Abhandlung vom 5. Mai 1777: „De formulis differentialibus angularibus" etc., abgedruckt in Band IV der Institutiones calculi integralis, wo unter anderem die Gleichung steht: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Dies ist, wie auf Benachrichtigung durch Eneström an der zweiten Stelle bemerkt wird, schon in Hoffmann's Z. **17,** 509 und 580 (1886) von Heymann und Ackermann mitgeteilt worden. Lp.

H. G. Zeuthen. Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 274-280.

Legt die Gedanken dar, durch die Barrow zu seiner Methode kam, formulirt dessen Verdienste in dieser Hinsicht und deckt die Beziehung zu Leibniz' und Newton's Leistungen auf. Tn.

G. Eneström. Sur un point de la querelle au sujet de l'invention du calcul infinitésimal. Bibl. Math. (2) **12,** 50-52.

Unter den Mitgliedern des Ausschusses, welcher 1712 von der Royal

Society in London gebildet wurde, um über den Newton-Leibniz'schen Prioritätsstreit ein Gutachten abzugeben, wird auch ein gewisser Burnet genannt. Der Verf. weist nach, dass dieser sicherlich William Burnet (1688-1729) war, der mit Johann Bernoulli Briefe wechselte, und teilt als Belegstellen einige Auszüge aus diesem Briefwechsel mit.

E.

M. Simon. Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung. Abh. z. Gesch. d. Math. 8, 115-132.

Der auf der Naturforscher-Versammlung zu Frankfurt gehaltene Vortrag will die für die Entwickelung des Differentialbegriffs und für die Entdeckung der Differentialrechnung in Betracht kommenden Marksteine skizziren. Er beginnt mit den Pythagoreern und endet mit Weierstrass. Charakteristisch ist das Bestreben, die Anfänge des Infinitesimalbegriffs möglichst weit zurückzuverlegen und möglichst viele ältere Mathematiker zu Vorläufern der beiden grossen Entdecker der Infinitesimalrechnung zu stempeln. „So war die Infinitesimalrechnung von allen Seiten vorbereitet, als N. (Newton) 1665 und 10 Jahre später L. (Leibniz) den letzten Schritt thaten und eine Grammatik schufen zu einer Sprache, welche bereits eine blühende Litteratur hatte.“ Vergl. F. d. Math. **28**, 40, 1897. M.

S. Gundelfinger. Ueber die Entdeckung der doppelten Periodicität und Jacobi's Anteil daran. Berl. Ber. 1898, 342-345.

Aus dem Jacobi'schen Nachlass hatte Weierstrass bereits vor 20 Jahren die Ueberzeugung gewonnen, dass Jacobi schon vor der bekannten Veröffentlichung Abel's das Princip der doppelten Periode entdeckt hatte. Im Widerspruch dazu suchte Bjerknes in seinem Werke „Niels Henrik Abel“, Paris 1885, zu beweisen, dass Jacobi den Begriff der Umkehrung der elliptischen Integrale erst durch Abel kennen lernte. Hierin lag zugleich eine schwere Verdächtigung des Charakters Jacobi's, deren Grundlosigkeit darzulegen Gundelfinger schon seit vielen Jahren unternommen hat. Jetzt teilt dieser die Hauptergebnisse einer grösseren, an anderer Stelle zu veröffentlichenden Arbeit mit. Danach ist mit Sicherheit zu schliessen, dass Jacobi jedenfalls den Begriff der Umkehrung in aller Schärfe gekannt und das Princip der doppelten Periode zum mindesten als hodegetisches Princip bei Aufstellung seiner Transformationstheoreme benutzt habe. Es ergiebt sich ferner die bedeutsame Thatsache, dass nicht nur Abel, sondern auch Jacobi wesentlich unter dem Einflusse von Gauss zur Entdeckung der elliptischen Functionen gelangt ist. M.

C. de Vaux. Une proposition du Livre des Fils de Mousa sur les calculs approchés. Bibl. Math. (2) **12**, 1-2.

In der lateinischen Uebersetzung der Geometrie der drei Brüder, welche Curtze 1885 herausgegeben hat, ist der letzte Satz, wie dieser

selbst bemerkt, sehr schwer verständlich. Baron de Vaux giebt darum eine directe Uebersetzung dieses Satzes aus dem Arabischen, nach einer Handschrift in der Nationalbibliothek zu Paris. E.

C. de Vaux. Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. Bibl. Math. (2) **12,** 3-4.

Der Verf. teilt eine Lösung des delischen Problemes mit, welche von dem arabischen Scheik Abu Djafar Muhammed ibn el-Husein herrührt. Dieser wollte die Nikomedische Lösung von ihrem mechanischen Charakter befreien, und zu diesem Zwecke wandte er eine Hyperbel an, um den Punkt zu bestimmen, welchen Nikomedes durch eine „Einschiebung" (νεῦσις) erhielt. E.

M. Curtze. Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jakobsstab. Bibl. Math. (2) **12,** 97-112.

Dass Levi ben Gerson (gest. 1344) der Erfinder des Jakobsstabes ist oder wenigstens die erste bisher bekannte Beschreibung desselben gegeben hat, weiss man schon seit vielen Jahren; dass aber in derselben Schrift, wo diese Beschreibung vorkommt, eine vollständige ebene Trigonometrie und andere historisch interessante Sachen sich finden, ist zuerst von Curtze entdeckt worden. In der oben genannten Note wird anfangs die trigonometrische Abteilung von Levi ben Gerson's Schrift ausführlich besprochen, woraus hervorgeht, dass die Darstellung weder von Geber noch von Nassireddin abhängig ist, so dass wir seine Leistung als ganz selbständig bezeichnen können; der Sinussatz wird klar bewiesen und zur Auflösung der Dreiecke benutzt. Im Vorübergehen bemerkt Curtze, dass Levi ben Gerson in seiner Schrift auch das Princip der „Camera obscura" deutlich dargelegt und für die Beobachtung der Sonnen- und Mondfinsternisse praktisch benutzt hat. Dann folgt eine detaillirte Beschreibung des Jakobsstabes, wobei Curtze in einem Punkte die früher von S. Günther (Bibl. Math. 1890, 77; F. d. M. **22,** 58-59, 1890) gegebene berichtigt. E.

N. L. W. A. Gravelaar. Pitiscus' trigonometria. Nieuw Archief (2) **3,** 253-278.

Gegenüber den bisherigen ungenauen Angaben über die verschiedenen Auflagen der Trigonometrie von Pitiscus stellt der Verf. den folgenden Thatbestand fest. Im Jahre 1595 erschien als Anhang von 57 Seiten kl. 8° zu Abraham Scultetus „Sphaericorum libri tres methodice conscripti et utilibus scholiis expositi" der erste Entwurf: „Accessit de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus Bartholomaei Pitisci Grünbergensis". (Heidelbergae, typis Abrahami Smesmanni). Als erweiterte selbständige Ausgabe dieses Anhanges wurde 1600 zu Augsburg gedruckt: Bartholomaei Pitisci Grunbergensis Silesii Tri-

gonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque, 379 S. kl. 4°. Eine zweite Auflage dieses Werkes, auf dem Titel auch als Editio secunda bezeichnet, erschien ebenfalls in Augsburg 1608; die dritte dagegen wurde zu Frankfurt 1612 veröffentlicht. Die vorliegende Abhandlung enthält eine eingehende Beschreibung des Lehrganges in den verschiedenen Ausgaben, besonders über die Berechnung der Tabellen in den drei ausführlichen Ausgaben, wobei der Einfluss von Joost Bürgi, den Pitiscus nach 1600 kennen gelernt hatte, besonders hervorgehoben wird. Nebenbei widerspricht Gravelaar der Angabe von M. Cantor, dass Pitiscus sich des Punktes als Decimalzeichens bedient habe. Am Schlusse werden die genauen Titel der einzelnen Drucke nebst den Ueberschriften der Abschnitte diplomatisch getreu wiedergegeben. Eine interessante Aeusserung von Pitiscus (geb. 1561 zu Grüneberg in Schlesien, gest. 1613 als Hofprediger Friedrichs IV., Kurfürsten von der Pfalz) ist aus der Widmung der ersten Ausgabe von 1600 der Verbreitung wert: „Mansvetudo autem, bone Deus, qvantum et qvam rarum est Theologorum ornamentum! Et qvam optandum esset hoc seculo, omnes Theologos esse mathematicos, hoc est, homines tractabiles et mansvetos“. Lp.

G. Eneström. Note historique sur une proposition analogue au théorème de Pythagoras. Bibl. Math. (2) **12,** 113-114.

Der betreffende Satz lautet: „Wenn in einem Tetraeder die Ecke, welche einer Grenzfläche gegenüberliegt, aus drei ebenen rechten Winkeln gebildet ist, so ist das Quadrat dieser Grenzfläche gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen.“ Dieser Satz scheint zuerst im Jahre 1780 von Tinseau veröffentlicht worden zu sein, aber schon um das Jahr 1760 hatte de Gua ihn gefunden. In unserem Jahrhundert ist der Satz von verschiedenen Verfassern wiederentdeckt und als neu ausgegeben worden. E.

G. Eneström. Sur quelques propositions de planimétrie énoncées dans un manuscrit norvégien du 14e siècle. Bibl. Math. (2) **12,** 19-22.

Die Notiz bezieht sich auf ein um das Jahr 1320 in altnorwegischer Sprache abgefasstes Fragment planimetrischen Inhalts. Die Sätze sind ganz elementar und ohne Beweise; am Ende findet sich merkwürdigerweise ein Satz über die Grösse der Durchmesser der Erde und der Sonne. E.

A. von Braunmühl. Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks. Bibl. Math. (2) **12,** 65-72.

In dieser Note sucht der Verf. zu beweisen, dass Vieta das Supplementardreieck eines sphärischen Dreieckes nicht nur, wie Cantor in seinen „Vorlesungen“ (II, S. 556) angiebt, erwähnt hat, sondern dass er auch dasselbe anwendete, um die reciproken Formeln herzu-

leiten. Zu diesem Zwecke giebt er eine Uebersicht über die von Vieta aufgestellten Formeln und hebt besonders das hervor, was bei den letzteren neu war. Man sieht daraus, dass Vieta ein Princip besessen haben muss, mit dem er die sich polar entsprechenden Formeln aus einander ableitete. Wenn aber v. Braunmühl bestimmt behauptet, diese Ableitung beruhe auf der Anwendung des Supplementardreieckes, so scheint er dem Ref. ein wenig zu weit zu gehen. In der That kennt Vieta vier reciproke Dreiecke; aber welches von diesen er angewandt hat, giebt er in seinen Schriften nicht ausdrücklich an.

Der Verf. lenkt selbst die Aufmerksamkeit darauf, dass Pitiscus, Stevin und Magini sich eines der drei ersten Dreiecke bedienten, und dass erst Snellius ausdrücklich das vierte, d. h. das Supplementardreieck, anwandte. Die Frage dürfte also noch nicht endgültig entschieden sein. E.

M. Curtze. De inquisicione capacitatis figurarum. Anonyme Abhandlung aus dem fünfzehnten Jahrhundert. Herausgegeben von M. C. Abhandl. zur Gesch. d. Math. **8**, 29-68.

Die Abhandlung ist der Handschrift Clm Nr. 56 der Hof- und Staatsbibliothek zu München entnommen und bildet den letzten Teil derselben. Nach einer kurzen Einleitung, welche der Beschreibung der Handschrift gewidmet ist (S. 31-35), folgt der lateinische Text (S. 36 bis 58) und endlich (S. 58-68) ein den einzelnen Paragraphen folgender Commentar. „Die im Vorstehenden abgedruckte Abhandlung dürfte als eine wertvolle Bereicherung unserer Kenntnisse über das Wissen der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie erkannt werden. Ihren Verf. zu ergründen, ist mir bisher nicht möglich gewesen. Ob es etwa der Schreiber der Handschrift, Magister Rheinhardus de Vurm, gewesen, muss unentschieden bleiben. Jedenfalls ist derselbe auch in der Trigonometrie wohl bewandert.“ Lp.

M. Curtze. Nachtrag zu dem Aufsatze „Practica Geometriae“. Monatsh. f. Math. **9**, 266-268.

Aus der von Müllenhoff benutzten Leidener Handschrift der Pract. Geom. teilt hier Curtze die von seiner eigenen früheren Ausgabe abweichenden Lesarten mit. Auch erfahren wir hier erstmals (S. 268) auf Grund einer Mitteilung von Tannery, dass als Verf. der Pr. Geom. ein gewisser Hugo anzusehen ist, vermutlich der 1199 gestorbene Hugo Physicus. (Vgl. Cantor II, 52). Tn.

G. B. Halsted. Non-euclidean geometry, historical and expository. Amer. Math. Monthly **5**, 127-128.

P. Mansion. Quelques documents récents sur les premières recherches de Lobatchefsky, Bolyai et Gauss en géométrie non-euclidienne. Mathesis (2) **8**, 44-45.

F. Klein. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises erstattet. Math. Ann. **50,** 583-600. [Vergl. F. d. M. **28,** 417, 1897.]

G. Loria. Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 289-298.

Loria behandelt in geschichtlicher Folge die verschiedenen Arten des Entstehenlassens von ebenen Curven: den Schnitt von Körpern durch die Ebene, die kinematische Methode der Griechen, die durch Verwertung der Coordinaten und der Algebra vorgehende Art, die erneut auftretende kinematische Methode des 17. und 18. Jahrhunderts, die Aufsuchung von Curven, denen bestimmte mechanische Eigenschaften zukommen, die Erzeugung von Curven durch Coordinatenänderung und ihr Studium durch das Beiziehen der algebraischen Formen u. a. m. Eine Reihe von Beispielen beleuchtet stets die geschichtliche Darlegung. Tn.

G. Loria. Abriss der Entwickelung der Theorie der ebenen Curven. Aus den „Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Congresses“ ins Polnische übersetzt von S. Dickstein. Wiad. mat. **2,** 202-213.

G. Loria. Per la storia di alcune curve piane. Loria Boll. bibl. **1,** 1-7.

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit der Geschichte der Strophoide, die zuerst bei Torricelli vorkommt (als Pteroides) infolge eines Briefwechsels mit französischen Mathematikern um 1645 und wahrscheinlich von Roberval entdeckt ist. In die mathematische Litteratur scheint sie durch einen Artikel von A. de Moivre in Phil. Trans. von 1715 eingeführt zu sein. Der gelehrte Verf. der gegenwärtigen Abhandlung verfolgt die Curve bis zur Gegenwart und führt auch die verschiedenen Namen an, die sie erhalten hat: Strophoide in Nouv. Ann. **5,** 470, 1846 (Montucci, irrtümlich dem Ritt zugeschrieben), Focale (Quetelet), Kukumaeide (Lehmus), Logocyklica (Booth), harmonische Curve (Rummer). Lp.

St. Chrzaszczewski. Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie. Hoppe Arch. (2) **16,** 119-149.

Als einen Auszug aus seiner 1896 zu München preisgekrönten Arbeit über Desargues giebt hier der Verf. zunächst Desargues' geometrische Grundbegriffe von der Punktreihe und vom Strahlenbüschel und ihrer Zuordnung, dann seine Theorie und seine Hauptfälle der Involution, dann die hierauf gegründete Theorie der Kegelschnitte, insbesondere seine Lehre von Pol und Polare, die nicht von de la Hire stamme, und deren Ausdehnung auf den Raum, sowie die Ueberführung

des Kreises in einen Kegelschnitt. Ein zweiter Teil (S. 139 ff.) zeigt die Stellung von Desargues zu seiner Zeit und seinen Einfluss auf die Entwickelung der projectiven Geometrie in späterer Zeit. Tn.

E. Kötter. Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1. Lieferung. Deutsche Math.-Ver. 5_2, 1-128.

Das eingehende Referat über diese höchst bedeutsame Arbeit verschieben wir bis zum Abschlusse des ersten Teiles derselben; doch geben wir an dieser Stelle bereits die Ueberschriften der bis jetzt vollendeten Abschnitte.

Erster Teil. Von Monge bis auf Poncelet (1822).

I. Einleitung.

Erster Abschnitt. Untersuchungen zur Lehre von den Kegelschnitten.

II. Geschichte des Pascal'schen Satzes.

III. Construction des Kegelschnittes aus fünf Punkten und Tangenten.

IV. Büschel und Schar; einfach unendliche Mannigfaltigkeiten; die Involution.

V. Polareigenschaften.

VI. Mittelpunkt- und Brennpunkteigenschaften.

VII. Entstehung des Kegelschnittes aus dem geraden Kegel.

Zweiter Abschnitt. Untersuchungen zur Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.

VIII. Reduction auf die Hauptaxen. Beziehungen unter den Tripeln conjugirter und orthogonaler Durchmesser.

IX. Kreisschnitt und Geradenscharen.

X. Flächenbüschel. Raumcurve vierter Ordnung.

XI. Polarentheorie. Die Oberflächen, welche zwei Kegelschnitte gemein haben.

XII. Die Aufgabe, zu drei Schnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung einen berührenden Kegelschnitt zu finden. Die stereographische Projection bei Oberflächen zweiter Ordnung.

Dritter Abschnitt. Kreis- und Kugel-Lehre.

XIII. Die stereographische Projection.

XIV. Kreis- und Kugel-Verwandtschaft.

XV. Die Aufgabe des Appollonius.

Zweiter Teil. Von Poncelet bis auf Steiner (1822-1832).

Erster Abschnitt. Der Traité und Entwickelungen, welche sich unmittelbar an ihn knüpfen.

XVI. Traité, Section I. Lp.

A. Ramorino. Gli elementi imaginari nella geometria. Monografia storica. Batt. G. **35**, 242-258; **36**, 317-345.

Eine historische Uebersicht über die Versuche zur Einführung der

imaginären Elemente in die Geometrie. Die an sich ganz verdienstliche Arbeit wird durch die Fortsetzung des Berichtes von E. Kötter über die Entwickelung der synthetischen Geometrie bedeutend vervollständigt und überholt werden (vergl. den vorangehenden Bericht). Lp.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Notes bibliographiques. Nouv. Ann. (3) **17**, 153-155.

Fortsetzung der bibliographischen Notizen über die Sinus-Spiralen (spirales sinusoïdes) $z^n = \sin n\vartheta$ (Nouv. Ann. (2) **15**, 97) und über die Hypocykloide mit vier Rückkehrpunkten oder Astroide, oder Kubocykloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (ib. **14**, 47 und **15**, 94). M.

TH. HÄBLER. Ueber zwei Stellen in Platon's Timäus und im Hauptwerke von Coppernicus. Pr. (No. 563) Fürsten- u. Landessch. Grimma. 26 S. 4°.

Der erste Teil vorliegender Arbeit (S. 1-17) erklärt die Timäusstelle 32 B durch Bezugnahme auf das delische Problem und spricht Platon die Kenntnis der Sätze Eukl. VIII, 11-21 ab. Der zweite Teil (S. 18-26) bespricht die Frage, ob schon Coppernicus die elliptische Gestalt der Planetenbahnen gekannt habe; diese Frage wird verneint. Tn.

K. HIRSCH. Urkunden zur Geschichte der Mechanik. Pr. (No. 615) Gymn. Schwäb. Hall. 41 S. 4°. Mit 3 Fig.-Taf.

Hirsch beabsichtigt eine Sammlung derjenigen Abschnitte aus den Standardworks der Mechanik, in denen die Fortschritte der wissenschaftlichen Erkenntnis liegen, damit dieselbe beim Studium der Geschichte der Mechanik als Quellenbuch diene. Er giebt zunächst als Probe eine Auswahl aus den wichtigsten Förderern der Mechanik von Archimedes bis Torricelli und wird hoffentlich die vollständige Sammlung nicht in späteren Programmen, sondern in Buchform geben. Mi.

E. W. BROWN. Report on the recent progress of solids and fluids. Amer. Assoc. **47**, 53-64.

F. HULTSCH. Die Gewichte des Altertums, nach ihrem Zusammenhange dargestellt. Leipz. Abh. XIII + 205 S.

G. HELM. Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung. Mit Figuren im Text. Leipzig: Veit u. Comp. XII und 370 S. 8°.

Als eifriger Verfechter der sich kräftig entwickelnden, neuen Ideen der Energetik war Helm, der schon 1887 in seiner „Lehre von der Energie historisch-kritisch entwickelt“ eine nützliche, zusammenhängende

Darstellung geliefert hatte, die durch viele litterarische Anmerkungen sich auszeichnete, von einer auf der Wiener Naturforscherversammlung eingesetzten Commission zum Referenten gewonnen worden, der in Lübeck seinen Bericht erstatten sollte. Zur Vorbereitung auf den Vortrag und zur Bequemlichkeit der Zuhörer liess er vorher in Wiedemann's Annalen der Physik einen „Ueberblick über den derzeitigen Zustand der Energetik“ drucken, der allen Anwesenden eingehändigt wurde und dem Berichte zu Grunde lag. Den Teilnehmern der Lübecker Versammlung sind jedenfalls in lebhafter Erinnerung die bewegten Debatten geblieben, welche sich an das von Helm erstattete Referat anschlossen. Besonders erfolgten von Boltzmann so scharfe Angriffe gegen den Standpunkt des Referenten, dass dieser sich beklagte, man habe ihn, dessen Stellung zur Sache ja doch allgemein bekannt sei, mit dem Auftrage des Referates in eine Falle gelockt. Hiergegen versicherte Boltzmann auf das energischste, dass seine Angriffe durchaus nicht persönlich gemeint seien, sondern nur sachlich gegen die ganze Richtung der Energetik gingen; von dieser sei die Kriegserklärung gegen die alte theoretische Physik ausgegangen, indem die letztere für einen überwundenen Standpunkt erklärt würde. Es war natürlich, dass der in Lübeck erhobene Streitruf noch weiteren Wiederhall fand, besonders da der Vortrag von Ostwald in der letzten allgemeinen Sitzung über die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus die Gesetze aller Naturerscheinungen ausschliesslich auf die Gesetze der entsprechenden Energiearten zurückgeführt haben wollte. Die Abhandlungen von Planck und Boltzmann in Wiedemann's Annalen 1896 und Helm's Antwort auf sie sind in erster Linie zu nennen; ihnen folgten 1897 ebenda die Artikel von Boltzmann und Volkmann über Atomistik. Dass diese schroffen Gegensätze auch heute noch unausgeglichen bestehen, zeigt das Schlusswort des vorliegenden Buches: „So handelt es sich denn auch in dem 1895 in Lübeck angefachten Streite nicht eigentlich um Atomismus oder stetige Raumerfüllung, nicht um das Ungleichheitszeichen in der Thermodynamik, nicht um die energetische Begründung der Mechanik: das sind alles nur die Einzelheiten. Im letzten Grunde geht es um die Principien unserer Naturerkenntnis. Wider die Omnipotenz, welche die mechanische Methode, unsere Erfahrungen theoretisch wiederzugeben, beansprucht, tritt ein junges Verfahren auf, das weit unmittelbarer die Erfahrungen zu beschreiben gestattet und doch die Allgemeinheit der Begriffe erreicht, die für jede zweckmässige Wiedergabe der Natur unumgänglich ist. Fasst man das Gebiet der Energetik in dieser Weise, in der allein man ihren Bestrebungen gerecht werden kann, dann steht die Entscheidung sehr einfach: Hie Scholastik — hie Energetik — das ist die Wahl!“

Nach diesen Vorgängen hat Helm, den ja Boltzmann selbst für den berufensten und namentlich der Mathematik kundigsten Vertreter der Energetik erklärt hat, sich der dankenswerten Mühe unterzogen, seine Skizze der Lehre von der Energetik aus dem Jahre 1887 umzuarbeiten, breiter auszuführen und bis auf die Gegenwart zu ergänzen.

Dadurch ist nun jedermann in der Lage, von den Lehren und den Zielen der Energetik auf bequeme Weise Kenntnis zu nehmen, sich also in einem Gebiete zu orientiren, wo nach den Vertretern desselben der höchste Standpunkt der Naturkenntnis gegenwärtig zu erreichen ist. Nach der historischen Darstellung der Entstehung des Buches kann Ref. wohl darauf verzichten, den Inhalt genauer zu besprechen. Er will jedoch seiner Befriedigung über die Vollendung des Buches Ausdruck geben. In Bezug auf historische Treue und Vollständigkeit, auf gleichmässige, sachliche Darstellung in schlichter Sprache, auf übersichtliche Anordnung des Stoffes ist das Buch musterhaft abgefasst; ein recht gutes alphabetisches Namen- und Sachregister erleichtert die Benutzung. Der Ton ist ruhig und leidenschaftslos; nur wenn der Verf. seine Gegner Boltzmann und Planck bekämpft, tritt die gereizte Kampfesstimmung zu Tage. Wer sich über diese neueste Richtung der Entwickelung naturwissenschaftlicher Ideen unterrichten will, wird reiche Belehrung in dem Buche finden, für dessen vortreffliche Ausstattung der Name der bekannten Verlagsfirma bürgt. Lp.

E. Mach. Bemerkungen über die historische Entwickelung der Optik. Poske Z. **11,** 3-9.

Kurze Darlegung dieser Entwickelung bei den führenden Geistern. „Die Erkenntnis der einzelnen Eigenschaften des Lichtes ist den Forschern, man möchte sagen gegen ihren Willen, im Laufe der Jahrhunderte sehr langsam und allmählich durch die Thatsachen abgezwungen worden.“ Lp.

R. Pitoni. Le immagini accidentali. Suppl. al Period. di Mat. **1,** 26-27.

Beschreibung und einige historische Notizen zu dem farbigen Abklingen der Nachbilder im Auge. Lp.

J. Thirion. La propagation de la lumière et les travaux de Fizeau. Rev. des qu. sc. (2) **14,** 36-66.

J. Thirion. L'analyse des radiations lumineuses. Ibid. **15,** 140-181, 488-520.

Recht klare Darstellung der schönsten und schwierigsten Untersuchungen der neueren Optik unter möglichst geringer Benutzung der Mathematik. Mn. (Lp.)

Wilhelm Schmidt. Heron von Alexandria im 17. Jahrhundert. Abhandl. zur Gesch. d. Math. **8,** 195-214.

Der Aufsatz zeigt an einer grossen Menge von Einzelheiten den bedeutenden Einfluss, den die Schriften Heron's von Alexandria im 17. Jahrhundert bei den Physikern und Technikern ausgeübt haben. Lp.

Wilhelm Schmidt. Heron von Alexandria, Konrad Dasypodius und die Strassburger Münsteruhr. Abhandl. zur Gesch. d. Math. 8, 175-194.

Durch Betrachtung dessen, was über Konrad Dasypodius (1530-1600), den Professor der Mathematik an der Akademie Strassburg, bekannt ist, macht der Verf. es wahrscheinlich, dass Dasypodius, welcher den Plan der alten Strassburger Münsteruhr (eingeweiht 1574) ersonnen, die Ausführung den Gebrüdern Habrecht aus Schaffhausen übertragen und diese überwacht hat, die nötigen technischen Kenntnisse aus den Schriften Heron's von Alexandrien geschöpft habe. „Beriefe sich Dasypodius nicht selber auf Heron, so würde es kaum jemand wagen, einen antiken Mechaniker mit der berühmten Strassburger Münsteruhr in Verbindung zu bringen. So aber glauben wir, dazu berechtigt zu sein.“ Lp.

Th. Gross. Robert Mayer und Hermann v. Helmholtz. Eine kritische Studie. Berlin: Fischer's technologischer Verlag M. Krayn. XII u. 174 S. gr. 8°.

Der erste Teil der Schrift (S. 1-59) beschäftigt sich mit den Arbeiten von Robert Mayer zum Princip von der Erhaltung der Energie, der zweite Teil (S. 60-138) mit der Helmholtz'schen Abhandlung „Ueber die Erhaltung der Kraft“. Nach einer kurzen Anmerkung über die analytische Darstellung der Energie folgt endlich (S. 141-174) eine Besprechung des Verhaltens von Hermann von Helmholtz gegen Robert Mayer. Der Verf. bezeichnet sein Buch als ein notwendiges Glied einer allgemeinen Untersuchung zur Aufhellung und Entwickelung der Grundgesetze der Energetik. Der unbefangene Leser findet einen Panegyrikus auf Robert Mayer, eine Schmähschrift auf H. v. Helmholtz, von dem durchweg in verächtlichen, wegwerfenden Ausdrücken gesprochen, dem Mangel an Wissen, an logischer Denkfähigkeit, an mathematischer Genauigkeit vorgeworfen wird, dem böswillige Motive zugeschoben werden, und dies geschieht vier Jahre nach dem Tode des vielbetrauerten Forschers. Auf die Gefahr hin, vom Verf. als „befangen“ angesehen zu werden, kann Ref. in dem gegen Helmholtz festgehaltenen Tone nicht ein Streben nach dem Ausdrucke der wissenschaftlichen Ueberzeugung von der Wahrheit erkennen, sondern möchte die Verwahrungen des Verf. gegen die Ansicht, dass persönliche Motive seine Kritik beeinflusst hätten, mit dem Sprichworte beantworten: Qui s'excuse, s'accuse. Lp.

C. Ptolemaeus. Opera quae exstant omnia. Edidit J. L. Heiberg. Volumen I: Syntaxis mathematica. Pars 1 (libri 1-6). Lipsiae. VI + 546 S. 8°.

GEMINI Elementa Astronomiae. Ad codicum fidem recensuit, Germanica interpretatione et commentariis instruxit C. Manitius. Lipsiae. XLIV + 369 S. 8°.

FONTÈS. Le manuscrit de Jean de Londres. Toulouse Bull. **1,** 146-160.

Giebt S. 148-155 den Abdruck eines wohl aus dem 13. Jahrhundert stammenden Tractatus de astrologia judiciaria. Der erste seiner sechs Teile behandelt das Vorrücken der Nachtgleichen und kommt deren modernem Werte fast um 2° nahe; der fünfte Teil lässt die Azoren als damals westlichste bekannte Inseln erkennen. Zum Schluss (S. 158ff.) wird auf zwei Fixsternverzeichnisse aufmerksam gemacht, die aus den Jahren 1233 und 1246 stammen, deren ersteres wohl von Johann von London selbst herrührt. Tn.

GIOVANNI SCHIAPARELLI. Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci. Mem. R. Ist. Lomb. (9) **3,** 61-100.

GIOVANNI SCHIAPARELLI. Come i Greci arrivarono al primo concetto del sistema planetario eliocentrico detto oggi Copernicano. Atene e Roma. **1,** 65-79.

Wichtige Beiträge zur Geschichte der Astronomie im Altertum, welche als Ergänzung voriger Arbeiten (vgl. F. d. M. **5,** 2, 1873 und **7,** 2, 1875) angesehen werden sollen und die alte Bekanntschaft des sogenannten Tycho'schen Systems begründen wollen. Eine eingehende Betrachtung finden die Ideen von Heraklit von Pontus. La.

L. GÜNTHER. Kepler's Traum vom Mond. Leipzig: B. G. Teubner. XXII + 185 S. gr. 8°. Mit 2 Taf. u. d. Bildnis Kepler's.

Eine Einleitung giebt zunächst die Geschichte des um 1609 geschriebenen, aber erst 1634, d. i. erst vier Jahre nach Kepler's Tod gedruckten „Traumes“ als „des hohen Liedes der copernicanischen Lehre“ und zugleich „des Compendiums der Kepler'schen Werke überhaupt“, dann eine kurze Uebersicht der sonstigen Idealreisen in den Mond. Der Text selbst giebt (S. 3-21) eine gute Uebersetzung des „Traumes“, dann (S. 22-155) Kepler's Noten dazu, weiter (S. 156 bis 158) einen auf die Mondverhältnisse bezüglichen Brief Kepler's an Guldin und (S. 158-174) Kepler's eigene Noten hierzu. Die Noten sind beidemal von erläuternden Anmerkungen des Uebersetzers begleitet — Das vorgedruckte Bild Kepler's ist angefertigt nach dem im Benedictinerstift zu Kremsmünster befindlichen Oelgemälde, das der Herausgeber für das wahre Bild des grossen Astronomen hält. Ein Sach- und Namenregister (S. 175-185) erleichtert sehr die Verwertung des Buches. Tn.

F. Rosenberger. Die moderne Entwickelung der elektrischen Principien. 5 Vorträge. Leipzig: J. A. Barth. V + 170 S. 8°.

F. Kindler. Die Zeitmesser bis zur Erfindung der Pendeluhr. Einsiedeln. 36 S. 4°.

F. Goldscheider. Ueber die Einführung des neuen Kalenders in Dänemark und Schweden. Berlin. 39 S. 4°.

P. Mansion. Analyse du „Traité du Quadrant" de Maitre Robert Anglès publié par M. P. Tannery. Mathesis (2) **8**, 83-84.

Kapitel 2.
Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

S. Dickstein. Ueber einige neuere Klassificationen der mathematischen Wissenschaften. Wiad. mat. **2**, 181-203. (Polnisch.)

Bemerkungen über Papperitz' „System der rein mathematischen Wissenschaften" (Jahresbericht I der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin 1892, vgl. F. d. M. **24**, 61, 1892), über die Einteilung der mathematischen Disciplinen in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" und über den neuesten Vorschlag der Royal Society. Dn.

Z. de Galdeano. L'unification des concepts dans les mathématiques. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 227-231.

Galdeano entwirft ein kurzes Bild der Entwickelung der Mathematik im XIX. Jahrhundert, um zu zeigen, dass unser Zeitalter allgemein nach Systematisirung und einheitlicher Zusammenfassung der mathematischen Ideen strebt. Mi.

H. Scheffler. Die Grundlagen des Weltsystems in gesetzlichem Zusammenhange nach ihrer physischen, mathematischen, logischen und philosophischen Bedeutung. Braunschweig: Friedrich Wagner's Hofbuchhandlung. VI u. 247 S. gr. 8°.

In unversiegbarem Strome entquellen der Feder des greisen Gelehrten immer wieder neue Werke. Ref. hat seinen Standpunkt in der Beurteilung derselben bei der Anzeige zweier Bücher in F. d. M. **26**, 42, 1896 dargelegt. Wirklich neue Gedanken hat er in der vorliegenden Schrift nicht finden können. Der Zweck der Veröffentlichung ist in den „Vorbemerkungen" so gekennzeichnet: „In der Meinung,

dass eine kurz zusammengefasste Zusammenstellung der Grundfesten aus denjenigen Grundgebieten der Welt, welche eine allgemeine Bedeutung in Anspruch nehmen, das Verständnis der von mir aufgestellten Theorie der Grundfesten erleichtern werde, und dass einige erläuternde und begründende Zusätze zur Vervollständigung und Anerkennung dieser Theorie und der über das Weltsystem ausgesprochenen Ansichten beitragen könnten, stelle ich die nachstehende Gruppirung auf, wobei ich meine früheren Schriften als bekannt und ergänzend voraussetze."

Um den Ausdruck Grundfesten zu erläutern, erwähnen wir, dass es nach dem Verf. in der wirklichen Welt vier subordinirte Grundreiche giebt: das Aetherreich, das Mineralreich, das Pflanzenreich und das animalische Reich. Jedes Grundreich enthält fünf coordinirte Grundgebiete. In jedem Grundgebiete herrschen fünf Grundfesten: A. Grundeigenschaften (Grundbestände), B. Grundprocesse (succedirende Grundveränderungen, fortschreitendes Anderswerden), und zwar stetig und unstetig verlaufende Processe oder eigentliche Grundprocesse und Grundoperationen, C. Grundprincipien (Grundverhältnisse, Grundwirkungen), D. Apobasen (Grundgemeinschaften), E. Grundsätze (Grundzusammenhänge).

Nach dieser Pentarchie, die bei allen folgenden Einteilungen weiter getrieben wird, ist nun der ganze Stoff abgehandelt. So heisst es S. 31 unter der Ueberschrift das Mineralreich und die Mathematik: „Die Mathematik ist eine ideelle Wissenschaft. Sie wird vom Geiste, und zwar vom dreidimensionalen, philosophischen menschlichen Geiste, gebildet und umfasst unter den ideellen auch die in der ungeistigen Aussenwelt, also im Mineralreich vorkommenden realen Fälle. Sie beruht also auf geistigen Vermögen, welche ich Anschauungsvermögen nenne, und deren wesentlicher Charakter die Bestimmtheit ist. Die fünf Grundgebiete der allgemeinen Mathematik heissen: 1. Raum, 2. Zeit, 3. Materie, 4. Stoff, 5. Krystall."

A. Die mathematischen Grundeigenschaften sind: 1. Quantität, 2. Inhärenz, 3. Relation, 4. Qualität, 5. Modalität. B. Die mathematischen Grundprocesse zerfallen in a. stetige: 1. Vereinigung, 2. Fortschritt und Anreihung, 3. Verhältnisänderung durch Bewegung, 4. Verbindung, 5. Anordnung; b. springende: 1. Numeration, 2. Addition, 3. Multiplication, 4. Potenzirung, 5. Integration. C. Mathematische Grundprincipien: 1. Primitivität, 2. Contrarietät, 3. Neutralität, 4. Heterogenität, 5. Alienität. D. Mathematische Apobasen: 1. Identität, 2. Gleichheit, 3. Schluss oder Folgerung, 4. Insumtion, 5. Involvenz.

Mit diesen Proben von der Herrschaft der Fünfteilung muss der Bericht schliessen. Lp.

N. Bougaiev. Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosophie scientifique. Verh. d. intern. Math.-Congr. 1, 1897, 206-223.

Die moderne Weltanschauung beruht meist auf der Analyse und betrachtet das Universum als continuirlich; sie hat die Zweckbegriffe von

sich ausgeschlossen. Aber die Welt ist nicht überall stetig. Ihre Unstetigkeit tritt da besonders klar hervor, wo sich die Macht der Individualität, die Schöpferkraft des Menschen zeigt. Man kann die Zweckideen in einer wissenschaftlichen Weltanschauung nicht entbehren. Die Analyse genügt also nicht zur Begründung der Philosophie, und arithmetische Gesichtspunkte müssen dieselbe ergänzen. Mi.

G. Vailati. Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Lettura d'introduzione al corso di lezioni sulla storia della meccanica tenuto all' Università di Torino l'anno 1897/98. Torino: R. Frassati e Co. 44 S. gr. 8°.

G. Vailati. La méthode déductive comme instrument de recherche. Revue de métaphys. **6**, 37 S.

Vailati verfolgt die Entwickelung der deductiven Methode in der Geschichte der Wissenschaft. Ohne den Wert der inductiven Methode zur Auffindung geeigneter Hypothesen oder Principien zu verkennen, sucht er doch die Misserfolge des deductiven Schlussverfahrens nicht im Wesen der Methode selbst, sondern in falscher Anwendung derselben bei noch nicht genügend berichtigten Principien. Die deductive Methode dehnt ihr Anwendungsfeld immer mehr aus, und das ideale Ziel der Wissenschaft muss sein, Gebiete, die noch nicht deductiv behandelt werden können, immer mehr in solche zu verwandeln. Mi.

G. F. Lipps. Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. Wundt Philos. Studien **14**, 157-241.

Fortsetzung der Arbeit, über deren erste Teile in F. d. M. **25**, 98, 1893/94 und **26**, 70, 1895 referirt ist. Der jetzt vorliegende V. Teil behandelt die Entwickelung der allgemeinen Zahl aus der Beziehung des Grundes zur Folge in 22 Paragraphen. Wegen der Mannigfaltigkeit der behandelten Gegenstände ist es diesmal schwieriger als bei den früheren Teilen, die durchlaufene Gedankenreihe kurz zusammenzufassen. Im ersten Paragraphen, wo die Anknüpfung an das Vorhergegangene Gelegenheit giebt, eine kurze Vorschau zu halten, spricht sich der Verf. so aus:

Um das Wesen der logischen Ordnung zu begreifen, musste im Denken die Quelle für jene Beziehungen und Verknüpfungen gefunden und in der Bethätigungsweise des vom Grunde zur Folge fortschreitenden Denkens das objective Princip des logischen Ordnens erkannt werden. Die Beschaffenheit der Objecte giebt somit zwar erst die Möglichkeit, dass das beziehende und verknüpfende Denken in bestimmter Weise in die Erscheinung tritt. Die Form der Beziehungen und Verknüpfungen wird aber durch die Natur des Denkens bedingt, das sich als ein nach Grund und Folge verknüpfendes Denken charakterisirt. Zugleich mit dieser Erkenntnis ergab sich das Problem, diese Denkform ebenso wie die Reihenform zum Gegenstande der Untersuchung zu machen. Dabei

kann man allerdings Objecte, an denen sich das Denken bethätigen soll, nicht entbehren. Es gilt jedoch nicht, diese oder jene Objecte vorauszusetzen und anzugeben, wie sie durch das Denken in Beziehung gesetzt werden können, sondern die Denkthätigkeit selbst zu untersuchen. Dementsprechend dienen die Objecte nur zur Darstellung des Denkprocesses und gewinnen nicht auf Grund ihrer empirischen Beschaffenheit, sondern lediglich als Träger der Beziehungen, die durch das Denken geschaffen werden, eine Bedeutung. Sie sind darum auch nur als ein zur Verfügung stehender Vorrat verschiedener Bewusstseinsinhalte vorauszusetzen, die, sofern das Denken ihrer bedarf, zur Verwendung kommen, ohne einen bestimmenden und beschränkenden Einfluss auf die Denkthätigkeit selbst zu gewinnen. Der Gegenstand der Untersuchung ist aber die in solcher Weise dargestellte Denkform.

Von diesen abstracten Gesichtspunkten ausgehend, gelangt der Verf. zur Aufstellung der für die elementaren Rechenoperationen gültigen Gesetze, und indem dann der Begriff der Mannigfaltigkeit im philosophischen Sinne erzeugt wird, gelingt es ihm, bis zu den neuesten mathematischen Untersuchungen über Zahlensysteme (Study, Scheffers) vorzudringen. Lp.

P. Mansion. Compte-rendu de „La Mathématique“ par A. Laisant. Mathesis (2) **8**, 89-91.

Bericht nebst kritischen Noten, die sich auf Kant, Darwin, Comte, Leibniz, Newton, Archimedes, Fermat, Chasles, Lamarle beziehen. Mn. (Lp.)

Dumont. Remarque sur l'application de la logique à la théorie des régions. Nouv. Ann. (3) **17**, 547-548.

Die Darstellung aller möglichen Begriffsverhältnisse für n Merkmale ($= 2^n$) ist durch gerade Linien nur, wenn $n \leqq 2$, durch Kreise, wie dies Euler versucht hat, nur, wenn $n \leqq 3$, durch Kugeln, wenn $n \leqq 4$ ist, möglich. Es ist die Darstellung aber durch $(p-1)$-dimensionale Gebilde im p-dimensionalen Raume möglich, wenn $n \leqq p$ ist. Es genügt also für n Merkmale die Darstellung im n-dimensionalen Raume.

Mi.

H. MacColl. On the calculus of equivalent statements. (Seventh paper.) Lond. M. S. Proc. **29**, 98-109.

MacColl ergänzt seinen vor 26 Jahren begonnenen, seitdem beständig weiter geführten logischen Calcul durch Aufstellung und Verwendung der Symbole φ^α für $AB: B+C$; φ^β für $A+A':BB'$; φ^γ für $A:BC$; $A^{u\cdot v}$ für $A^u A^v$; P_A, $P_\varphi(AB)$ für den Satz A, $\varphi(AB)$ ist wahr für den Punkt P; P_A^u für $(P_A)^u$; A^x für $A/\varepsilon = x$; B/A^x für den Satz: B ist wahr, wenn A^x wahr ist; a' für $1-a$.

Mi.

E. Schröder. Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 147-162.

Die für eine Specialwissenschaft zu lösende Aufgabe der Pasigraphie besteht darin, sämtliche Begriffe, mit denen jene operirt, durch eine minimale Anzahl von Kategorien vermittelst rein logischer Operationen adäquat und concis auszudrücken, für diese Kategorien und Operationen Zeichen und Symbole festzusetzen und so einen calculus ratiocinator möglich zu machen. Die reine Mathematik und Logik ist von Peirce in der Logik „der Relative" auf fünf Kategorien (Identität, Gemeinsamkeit, Negation, Conversion und Beziehung) reducirt, so dass wenige Zeichen genügen, die aber besser, um Schwülstigkeit zu vermeiden und Knappheit und klare Uebersicht zu erzielen, zu 18 Symbolen erweitert werden. Uebrigens beschränkt sich die Pasigraphie nicht mehr auf Logik und Arithmetik, sondern ist auch auf Geometrie und auf das Gebiet der menschlichen Verwandtschaftsbegriffe übertragen, so dass mit ihren Mitteln ebenso gut der Begriff der Unendlichkeit und des grössten gemeinsamen Divisors, wie z. B. derjenige der Schwiegermutter darzustellen ist. Die Pasigraphie ist damit aus dem status nascendi herausgetreten und hat ihr Ideal zu einem Teile verwirklicht. Etwas Wasser giesst Schröder freilich in den Wein, indem er erklärt, dass die pasigraphische Sprache nicht bestimmt ist, jemals gesprochen zu werden, und so schwer zu erlernen ist, dass sie voraussichtlich stets das Privilegium von nur wenigen bevorzugten Denkern bleiben wird. Gegen die Geschmacklosigkeiten ihrer Ausdrücke aber, wie „Einsap, Nullap, Negat, Elter, Liebender von einem Wohlthäter" etc. dürfte die deutsche Sprachwissenschaft berechtigt sein, energisch Protest zu erheben. Mi.

G. Peano. E. Schröder: Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. Revue de Math. **6,** 95-101.

In seiner Besprechung von Schröder's Abhandlung über Pasigraphie betont Peano den Unterschied mehrerer im Formulario gebrauchten Zeichen von den annähernd dasselbe ausdrückenden Zeichen Schröder's. Auch verwirft er die Reduction der logischen Operationen auf fünf Grundbegriffe oder Kategorien. Mi.

G. Vailati. Der logische Algorithmus in seinem Wesen, in seiner Anwendung und in seiner philosophischen Bedeutung von Joseph Hontheim. Revue de Math. **6,** 42-47.

Vailati bespricht die Hontheim'sche Arbeit, die in ihrem Anschluss an Boole auf einem jetzt veralteten Standpunkt steht, und lobt die Klarheit ihrer Darstellung; auch widmet er den allgemeinen Auseinandersetzungen Hontheim's über mathematische Logik, welche in der

Einleitung und dem Schlusskapitel gegeben werden, freundliche Anerkennung. Mi.

G. Peano. Sulle formule di logica. Revue de Math. **6,** 48-52.

Peano berichtet über die Veränderungen der Formeln für die mathematische Logik, die im Formulario F_2 § 1 im Gegensatz zu F_1 vorgenommen sind. § 1 F_2 enthält auf 15 Seiten ungefähr 260 Propositionen, die von verschiedenen Verfassern aufgestellt sind. Von allgemeiner Wichtigkeit sind P 1-18 und 100-102. Mi.

G. Peano. Additions et corrections à F_2. Revue de Math. **6,** 65-74.

Enthält Zusätze und Verbesserungen, die Arithmetik betreffend, zu F_2 § 1. Mi.

G. Frege. Lettera all' Editore. — G. Peano. Risposta. Revue de Math. **6,** 53-61.

Frege bestreitet, dass mit den drei von Peano dem logischen Calcul zu Grunde gelegten Zeichen alles, was an rein logischen Gebilden gebraucht wird, bezeichnet werden könne. Das Gleichheitszeichen ist hierdurch nicht definirt; jede von den vier von Peano versuchten Definitionen für dasselbe ist unvollständig; auch alle zusammen sind unvollständig, sofern sie nicht in jedem Falle entscheiden, ob Gleichheit besteht, auch erklären sie das Gleichheitszeichen durch sich selbst. Bedingte Definitionen für das Gleichheitszeichen genügen überhaupt nicht. Auch das Zeichen $\wedge$ ist nicht durch die drei Grundzeichen erklärt, und diesen wäre auch das Beziehungszeichen ε und das Klassenzeichen K zuzurechnen. In seiner Erwiderung hält Peano an einer mehrfachen Bedeutung des Gleichheitszeichens fest und verteidigt so die Aufstellung mehrerer bedingten Definitionen für dasselbe. Mi.

G. Peano. Sul § 2 del Formulario t. II: Aritmetica. Revue de Math. **6,** 75-89.

Peano berichtet über das Formulario F_2 § 2, welches die Theorie der rationalen Zahlen in der mathematisch-logischen Bezeichnungsweise Italiens enthält. Am Schluss sind die Bedingungen der Mitarbeiterschaft am Formulario angegeben. Mi.

A. Padoa. Ideografia delle frazioni irreducibili. Revue de Math. **6,** 90-94.

Padoa giebt in Formulario F_2 § 2 einen Beitrag, betreffend die ideographische Darstellung irreducibler Brüche. Die grundlegenden Definitionen sind: 1. Der Zähler von a ist das kleinste ganze positive x, für welches eine Zahl y besteht, so dass $x/y = a$ ist. 2. Der Nenner

von a ist das kleinste x, für welches eine Zahl y besteht, so dass $y/x = a$ ist. Mi.

A. SCHÖNFLIES. Mengenlehre. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 184-207.

Wir beschränken uns darauf, den Inhalt der einzelnen Artikel dieser Zusammenfassung wiederzugeben: 1. Abgeleitete Mengen endlicher und überendlicher Ordnung. 2. Abzählbare Mengen, Nichtabzählbarkeit des Continuums, eineindeutige Zuordnung der Elemente zweier Continua von verschiedener Dimensionenanzahl. 3. Erzeugung der transfiniten Zahlen. 4. Mengen, Hauptunterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen, Cardinalzahlen und deren Rechnungsgesetze, die Cardinalzahl (der hebräische Buchstabe aleph, mit dem Index 0 behaftet) $\aleph_0$. 5. Ordnungstypen und deren Rechnungsgesetze. 6. Wohlgeordnete Mengen und deren Abschnitte. 7. Ordnungszahlen, die Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ oder $Z(\mathrm{II})$. 8. Die Cardinalzahl $\aleph_1$ und die höheren Cardinalzahlen. 9. Die Rechnungsgesetze der Ordnungszahlen. 10. Die Normalform der Ordnungszahlen der Klasse $Z(\aleph_0)$, die ε-Zahlen. 11. Isolirte, überalldichte, abgeschlossene, insichdichte, separirte, perfecte Mengen. 12. Verschiedene Sätze über Punktmengen. 13. Eigenschaften der abgeschlossenen und der perfecten Mengen. 14. Cohärenz, Adhärenz, homogene Mengen, Inhärenz, Rest. 15. Der Inhalt der Punktmengen. 16. Cantor's Definition des Continuums, geometrische Anwendungen. 17. P. du Bois-Reymond's Unendlich der Functionen, Stolz's Momente, verwandte Untersuchungen von Pincherle und Thomae. 18. Beziehungen des Archimedischen Axioms zur Stetigkeit, Veronese's Untersuchungen. 19. Die allgemeine Grössenlehre nach Bettazzi.

Die Exposition ist klar im allgemeinen; nur in einigen Punkten, wie z. B. bei der Einführung der transfiniten Zahlen, ist sie wohl etwas zu knapp. Die Anordnung des Stoffes könnte zu manchen Bemerkungen Anlass geben; so wird (Art. 2) von der Mächtigkeit des Continuums gesprochen, nachdem man (daselbst) von der Mächtigkeit nur die folgende unvollkommene Definition gegeben hat: „Alle abzählbare Mengen heissen von gleicher Mächtigkeit“. — Die Litteraturnachweise sind ausgiebig, aber nicht ganz vollständig. Vi.

T. LEVI-CIVITA. Sui numeri transfiniti. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 91-96, 113-121.

Der Verf. hat schon früher (Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, Ven. Ist. Atti (7) **4**, 1765-1815; F. d. M. **25**, 1893-94, 105) auf arithmetischem Wege ein Zahlensystem gebildet, welches einen Teil des Veronese'schen Streckensystems darstellt. Jetzt erweitert er sein System derart, dass es möglich wird, die Veronese'sche „Fundamentalform“ durch dasselbe vollständig darzustellen. Vi.

J. Hadamard. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 201-202.

S. Pincherle. Remarque relative à la communication de M. Hadamard. Daselbst 203.

E. Borel. Remarque relative à la communication de M. Hadamard. Daselbst 204-205.

Hadamard weist auf das Interesse hin, welches die Untersuchung der Functionenmengen für manches Gebiet der Mathematik darbieten würde. Dazu bemerkt Pincherle, dass einige italienische Mathematiker (Ascoli, Volterra, Arzelà und er selbst) schon seit manchen Jahren die Functionen als Mengenelemente aus verschiedenen Standpunkten betrachtet haben. Borel widmet einige Worte der damit zusammenhängenden Frage nach der Anzahl der im allgemeinen Integrale einer partiellen Differentialgleichung vorkommenden willkürlichen Functionen.

Vi.

E. Schröder. Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze. Nova Acta Leop.-Carol. Akad. **71**, 303-362.

E. Schröder. Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explicite Gleichzahligkeitsbedingung. Nova Acta Leop.-Carol. Akad. **71**, 365-376.

In der ersten Arbeit wird zunächst gezeigt, dass die Dedekind-Cantor'sche Definition einer unendlichen Menge identisch ist mit der Verneinung von Peirce's Definition der endlichen Menge. Sodann wendet sich der Verf. zu den neueren Cantor'schen Sätzen (A-E) über die Gleichmächtigkeit von Mengen (Math. Ann. **46**). Diese Sätze, die sich in keiner Weise auf den Zahlbegriff berufen, gehören einerseits der reinen Logik an, andrerseits gehören sie zur Grundlage einer Theorie der eindeutigen Zuordnung und Abbildung. Während Cantor a. a. O. für dieselben einen Beweis mit Hülfe der (transfiniten) Cardinalzahlen in Aussicht stellt, werden sie hier rein logisch aus der Definition der Gleichmächtigkeit selbst abgeleitet. Dabei leistet die vom Verf. angewandte pasigraphische Formulirung wesentliche Dienste. Es gelingt, diese Sätze zu einem einzigen zusammenzufassen, welcher aussagt, dass zwei Mengen dann und nur dann gleichmächtig sind, wenn entweder keine oder jede von beiden eineindeutig auf einen echten Teil der anderen abgebildet werden kann. Nur die Sätze A und D, die auf einen vom Verf. mit A_0 bezeichneten hinauskommen, können noch nicht als völlig erledigt betrachtet werden. Zuletzt werden drei Merkmale angegeben, aus denen sich der schon von Burali-Forti studirte Begriff der „einfachen Ordnung" zusammensetzt. Als allgemeiner aus der Arbeit resultirender Gewinn ergiebt sich Folgendes: Indem die Theorie der eineindeutigen Zuordnung auf rein logische Grundlage gestellt ist, hat sich die algebraische Logik als Hülfsmittel für eine der modernsten mathematischen Theorien bewährt. Und da diese Wissenschaft fähig ist,

Aufschlüsse zu liefern, die dem verbalen Denken unzugänglich und selbst durch die bekannten mathematischen Ausdrucksformen nicht zu erzielen sind, so ist zu erwarten, dass sie auch als wichtiges Instrument der mathematischen Forschung sich Anerkennung verschaffen wird.

In der zweiten Abhandlung werden (in pasigraphischer Darstellung) die Fragen beantwortet: Welche Relation muss eine endliche Menge erfüllen, damit sie aus gerade 0, 1, 2, aus mindestens 1, 2, 3, aus höchstens 1, 2 Elementen bestehe? Hiernach lässt sich dann für jeden Denkbereich, der nicht mehr als sechs Elemente enthält, die Bedingung für die Gleichzahligkeit zweier Mengen a und b als eine Relation rein logischer Art zwischen diesen explicite und in geschlossener Form angeben. Dagegen kommt der Verf. zu der Annahme, dass die erste der obigen Fragen für die Dreizahl und diejenige nach der Gleichzahligkeitsbedingung im Denkbereiche von sieben (und mehr) Elementen kein Resultat in geschlossener Form mehr liefern wird. Zuletzt wird der scheinbare Gegensatz zwischen der Einfachheit des Cantor'schen Cardinalzahlen-Begriffes und der Complicirtheit des logischen Anzahl-Begriffes dadurch erklärt, dass der erste den Standpunkt einer Logik des Begriffs-Umfangs, der zweite den einer (noch nicht geschaffenen) Logik des Begriffs-Inhalts voraussetzt. Schg.

F. Giudice. Qualche osservazione sulla determinazione di numeri come limiti di insiemi. Periodico di Mat. **13**, 5-8.

Nachdem die neueren Definitionen der allgemeinen Zahl besprochen sind, beweist der Verf. einen Satz bezüglich der Grenze einer Folge, den er in Palermo Rend. **5** (F. d. M. **23**, 249, 1891) schon ausgesprochen hatte, und verwertet ihn für die Definition mit Hülfe des Inbegriffs der rationalen Zahlen. Lp.

H. Laurent. A propos de la définition du nombre. Nouv. Ann. (3) **17**, 277-280.

Laurent verteidigt seine von Laisant benutzte Definition der Zahl: „Die Zahl ist ein Ausdruck oder ein schriftliches Zeichen, welches eine Quantität und alle ihr gleichen Quantitäten genau bezeichnet und sie von allen grösseren und kleineren Quantitäten unterscheidet", gegen die Einwürfe Tannery's (Darboux Bull. (2) **22**, 91, Anzeige von Laisant). Die Definition der Quantität versucht er in folgender Weise zu geben: Nicht identische Objecte, die in einer Eigenschaft übereinstimmen, heissen gleich. Eine Summe ist eine Verbindung von Objecten, die sich gleich bleibt, in welcher Ordnung auch die Verbindung der Objecte erfolgt. Gleiche Quantitäten sind gleiche Summen gleicher Objecte. — Herabsetzende Worte über die deutsche Mathematik, in deren Methoden Laurent eine Gefahr für die französische Mathematik sieht, bilden die Beigabe dieser neuen Grundlegung[?] der Arithmetik. Mi.

L. B. Hellenbach. Die Magie der Zahlen als Grundlage aller Mannigfaltigkeiten und das scheinbare Fatum. Leipzig: O. Mutze. 199 S. 8°. Mit d. Bildn. d. Verf. u. 1 Taf.

Nach Hellenbach's Auffassung geht jede Entwickelung in der phänomenalen Welt gesetzmässig und in der Zeit vor sich, erreicht daher ihre Ziele durch Vermittelung irgend einer Periodicität, welche unter der Herrschaft der Zahlen, namentlich der Zahl 7, steht. Eine geeignete graphische und abgekürzte Darstellung der periodischen Systeme sieht Hellenbach in den Tetragrammen, für die in Anschluss an Ath. Kircher und in Auseinandersetzung mit Liharzik S. 60ff. und S. 185ff. die Bildungsgesetze besprochen werden. Das gefundene Gesetz wird von Hellenbach auf das Wachstum und die Entwickelung des Menschen angewandt, und es ergiebt sich für ihn die Wahrheit zahlreicher Träume und die Richtigkeit vieler Prophezeiungen, wie überhaupt eine Absichtlichkeit und ein Fatum in der menschlichen Entwickelung. Mi.

L. Pick. Die vierte Dimension. Leipzig: Arwed Strauch. 46 S. 8°.

Die Schrift hat weder mit der Mathematik noch mit der exacten Naturwissenschaft etwas zu thun. Sie enthält Phantasien des Verf., angeknüpft an die unverstandenen Benennungen der drei Dimensionen. Die vierte Dimension wird zunächst als die unwahrnehmbare Ausdehnung nach innen definirt, oder kurz: „Der Inhalt ist die vierte Dimension.“ In den weiteren Ausführungen verschwimmt aber auch diese Bestimmung, ohne dass man angeben könnte, was eigentlich damit gemeint sei. Von dem Sinn, den der Mathematiker mit der Redewendung eines Raumes von n Dimensionen verbindet, hat der Verf. offenbar nie etwas vernommen; ist ihm ja doch die Bedeutung eines Problems, wie der Quadratur des Kreises, unbekannt. Er löst nämlich die Aufgabe ganz naiv durch einen Faden, den er um einen gezeichneten Kreis schlingt, und bestimmt die Zahl π, „die Ludolf so mühsam berechnet hat, durch ein einfaches Experiment“ gleich 3,2. Der Unterschied zwischen der begriffsmässigen Bestimmung eines geometrischen Gebildes und der Wahrnehmung einer jenes Gebilde versinnlichenden Figur ist für den Autor nicht vorhanden, obschon die Logik fortwährend angerufen wird. Aber auch bezüglich der Wahrnehmungen herrscht Willkür; so wird S. 40 decretirt: „Die Grenze der messbaren Länge ist für das unbewaffnete menschliche Auge ein Millimeter.“ Mit einem solchen Geiste kann man natürlich nicht rechten und braucht sich nicht zu wundern, dass die Seelenwanderung angeschwärmt wird, und dass der Verf. hofft, der Seele sei als Geist ein Leben im Reiche der vierten Dimension beschieden. Die Schrift verdient, in die Sammlung kanonischer Bücher gläubiger Spiritisten aufgenommen zu werden. Lp.

S. Newcomb. The philosophy of hyperspace. American M. S. Bull. (2) 4, 187-195.

Rede des Vorsitzenden der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft bei ihrer vierten Jahrestagung am 29. December 1897; der Sinn der Einführung eines Raumes von vier Dimensionen oder eines gekrümmten dreidimensionalen Raumes wird erörtert. Lp.

W. Wundt. Zur Theorie der räumlichen Gesichtswahrnehmungen. Wundt Philos. Studien **14,** 1-118.

„Die Beiträge zur Theorie der räumlichen Gesichtswahrnehmungen verfolgen nicht den Zweck einer systematischen oder gar erschöpfenden Neubearbeitung dieses so oft verhandelten und noch immer so viel umstrittenen Problems. Meine Ansicht bei dieser Veröffentlichung ist allein darauf gerichtet, teils einige Beobachtungen anzustellen, die mir für die Beurteilung mancher noch zweifelhaften Fragen von Bedeutung zu sein scheinen, teils aber auch durch eine erneute kritische und theoretische Bedeutung entscheidender Punkte vielleicht einiges zur Klärung der Ansichten beizutragen. Nicht eine Neubearbeitung, sondern eine Revision der Theorien und ihrer Grundlagen ist also der Zweck dieser Studie."

I. Die Metamorphopsien. II. Die Convergenzversuche und die Innervation der Blickbewegungen. III. Die geometrisch-optischen Täuschungen. 1. Die umkehrbaren perspectivischen Täuschungen. 2. Die variabeln Strecken- und Richtungstäuschungen mit eindeutigen perspectivischen Nebenvorstellungen. 3. Die constanten Strecken- und Richtungstäuschungen. 4. Die Associationstäuschungen. IV. Die nativistische Theorie. V. Die empiristische Theorie. VI. Die Theorie der complexen Localzeichen. 1. Allgemeine Formen des Localzeichenbegriffs. 2. Die Muskelempfindungen des Auges als Localzeichen. 3. Die Netzhautempfindungen als Localzeichen. 4. Allgemeine Voraussetzungen der Theorie der complexen Localzeichen. 5. Empirische Grundlagen für die Annahme complexer Localzeichen. 6. Psychologischer Charakter der räumlichen Wahrnehmungsassociationen. 7. Nähere Ausführung der Theorie der complexen Localzeichen. 8. Die Localzeichen der Tiefe und die absolute Orientirung im Raume. Lp.

H. Rudolph. Die Constitution der Materie und der Zusammenhang zwischen ponderabler und imponderabler Materie. Berlin: R. Friedländer & Sohn. 33 S. gr. 8°.

Der Verf. stellt sich eine strömende, den Raum nicht continuirlich ausfüllende, incompressible, unendlich teilbare und reibungslose Materie, also eine vollkommene Flüssigkeit als Träger aller Erscheinungen und letzten Grund der Dinge vor. Durch Ueberlegungen, die sich teils an die Thatsachen der Erfahrung anschliessen, teils als unerwiesene, unbestimmte Behauptungen zu bezeichnen sind, lässt er in dieser Materie „Strahlen" entstehen und durch das Zusammentreffen von mehr als drei Strahlen in einem Punkte „Körperatome, die nach dem Voran-

gehenden einen durch mehr als drei Strahlen gebildeten und sich erhaltenden Druckraum darstellen, wobei die Strahlen einer Gleichgewichtsstellung zustreben, bei welcher die Materie aus dem Druckraum in Strahlen von der gleichen Anzahl und Stärke wie die auftreffenden wieder abfliesst". Aus der Anzahl der zusammentreffenden Strahlen lassen sich die (polyedrischen) möglichen Gestalten der Atome gewinnen. Hiermit sind die Elemente construirt, vermöge deren alle physikalischen Erscheinungen erklärt werden: Gravitation, Molecularkräfte, Chemismus, Licht, Wärme, Elektricität u. s. w. Betreffs der näheren Durchführung verweisen wir Liebhaber solcher Träume auf die Schrift selbst. Lp.

H. Poincaré. Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. Verh. des intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 81-90. The relations of analysis and mathematical physics. American M. S. Bull. (2) **4**, 247-255.

„Die mathematische Physik und die reine Mathematik sind nicht nur Grenzmächte, die freundnachbarliche Beziehungen unterhalten; sie durchdringen sich gegenseitig; ihr Geist ist derselbe." „Wie reich auch der Menschengeist sein mag, die Natur ist tausendmal reicher." „Die Aussenwelt hat uns das Continuum aufgezwungen: wir haben es ohne Zweifel erfunden, aber zwangsweise erfunden. Ohne jene gäbe es keine Infinitesimalrechnung." „Die Analysis entrollt uns Perspectiven, welche die Arithmetik nicht ahnen lässt; in der Zahlentheorie dagegen, wo der Zufall herrscht, ist der Blick sozusagen bei jedem Schritt behindert." „Wenn die Physiker von uns die Lösung einer Aufgabe verlangen, so legen sie uns damit keine Last auf; im Gegenteil haben wir uns bei ihnen dafür zu bedanken." A. S.

A. Stodola. Ueber die Beziehungen der Technik zur Mathematik. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 260-271.

Technik ist die auf eine gewerblich nutzbare Transformation und Verwendung des von der Natur dargebotenen Energievorrates und der Rohstoffe gerichtete, die Resultate wissenschaftlicher Erkenntnis und wissenschaftlicher Methoden auf die zu lösenden Probleme anwendende Thätigkeit des Menschen. Sie erzielt ihre höchsten Resultate, wenn zu ihrem wissenschaftlichen Geiste Genie und Beharrlichkeit der Arbeit hinzukommt. Die Beziehungen der Technik zur Mathematik liegen in ihren Beziehungen zur Wissenschaft: denn für die Technik handelt es sich überall um die Erkenntnis des Gesetzes, der Zahl und dem Masse nach. Die Mathematik ist für den Techniker eine grundlegende Wissenschaft. Eine Schulung in reiner Mathematik ist für ihn notwendig, um ihm die erforderliche Sicherheit in ihrer selbständigen Anwendung zu verleihen. Für den Unterricht in angewandter Mathematik fällt der Schwerpunkt in die technische Mechanik und technische Physik. Wie die Unterrichtsverhältnisse nun gegenwärtig auf den Hochschulen liegen, so bieten dieselben in ihren Studienplänen an mathematischen Disciplinen, ins-

besondere hinsichtlich der analytischen Methoden, für die grosse Mehrheit der Techniker zu viel, für eine kleine Minderheit zu wenig. Für den grossen Durchschnitt der Studirenden wäre ein Herabsteigen von der hohen Warte höchster begrifflicher Strenge zu den naiveren Anschauungen der ersten Begründer, ein möglichst früher Uebergang zu praktischen Anwendungen, vor allem ein langes Verharren bei den Grundprincipien und eine weitgehende Einschränkung nach oben hin wünschenswert. Aber auch der wissenschaftlich-arbeitenden technischen Minorität muss die Hochschule die Mittel zu ihrer höchsten Ausbildung gewähren und diese Aufgabe nicht an die Universität abschieben. Mi.

W. E. Ayrton. Opening address in Section A of the British Association. Nature 58, 448-452.

Die Rede berichtet zuerst über den Zweck des neu errichteten Blattes „Science abstracts“, das nach der Hoffnung des Vortragenden bald über die „Beiblätter“ hinauswachsen werde, geht dann auf die Anregungen ein, welche die reine Wissenschaft aus praktischen Aufgaben zu allen Zeiten erhalten hat, und erörtert im letzten Teile die „Physik des Geruches“. Lp.

J. Terredor y Diaz. Discurso leido en la solemna apertura del Curso academico de 1898 á 1899 en la Universidad de Granada. Granada.

Die Druckschrift enthält die an der Universität zu Granada bei Gelegenheit des Beginnes der Vorlesungen 1898/99 gehaltene Eröffnungsrede. Der Verf. widerspricht denjenigen, welche meinen, die Mathematik besitze nur einen geringen greifbaren Nutzen. Zu diesem Behufe streift er die wichtigsten Fortschritte der Analysis und der Geometrie und weist zugleich auf die Anwendungen hin, welche man von denselben auf die Naturforschung gemacht hat. Tx. (Lp.)

Kant's Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. Hrsg. von A. J. von Oettingen. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. No. 12.) Leipzig: W. Engelmann. 158 S. 8°.

Dem Neudruck von Kant's allgemeiner Naturgeschichte und Theorie des Himmels von A. J. von Oettingen, der die erste Ausgabe von 1755 wiedergiebt, sind 12 Seiten Anmerkungen angefügt, in denen auf die Entstehung und das Schicksal der Kant'schen Abhandlung, auf die Litteratur zu derselben und auf das Verhältnis Laplace's zu Kant hingewiesen wird, und im einzelnen die Fortschritte der modernen Naturwissenschaft über Kant hinaus kurz gekennzeichnet werden (vergl. F. d. M. **22**, 84, 1890). Mi.

P. Mongré. Das Chaos in kosmischer Auslese. Ein erkenntniskritischer Versuch. Leipzig: C. G. Naumann. VI + 213 S. 8°.

Von der Erkenntnis ausgehend, dass die uns gegebene Welt unser

Bewusstseinsphänomen ist, entwickelt Mongré durch scharfsinnige Analyse von Zeit und Raum, welche den Satz einschliesst, dass zwischen den Zeitpunkten, Raumpunkten und Raumzeitpunkten des empirischen Bereichs einerseits, des transcendenten andrerseits vollkommen willkürliche Transformationen bestehen, und welche die Analyse des Zeitbegriffs durch den Nachweis der Mehrheit der Gegenwartspunkte und einer Vielheit der Welten erheblich fördert, einen transcendentalen Nihilismus, der in den Sätzen gipfelt, dass empirische Realität und transcendentale Irrealität mit einander verträglich sind, dass unser empirisches Sein nie und nirgends das Correlat eines absoluten Seins fordert, dass ein transcendentales Nichts auch ein zureichendes Aequivalent des empirischen Ichs darstellt. — Hierbei geht freilich der Mensch mit seinen sittlichen Forderungen völlig leer aus. Mi.

T. Vignoli. Peregrinazioni antropologiche e fisiche. — G. V. Schiaparelli. Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure. Milano: U. Hoepli. XII + 367 S.

In dem zweiten Teile dieses Buches versucht der berühmte Astronom eine Verbindung herzustellen zwischen den Formen, welche die Natur bietet, und den Gebilden, welche in der n-dimensionalen Geometrie eine Grundrolle spielen. Wenn auch viele Hypothesen nötig sind, um diesen Zweck zu erreichen, so verdient dieser Versuch immerhin die Aufmerksamkeit der Naturforscher und der Mathematiker. La.

Weitere Litteratur.

E. Bloch Lyon. Du rôle des mathématiques dans les sciences expérimentales. Revue scientif. (4) **10,** 682-687.

A. Calinon. Étude sur les diverses grandeurs en mathématiques. Nancy Bull. (2) **15,** 39-66.

L. Couturat. Sur les rapports du nombre et de la grandeur. Revue de métaphys. **6,** 422-447.

E. du Bois-Reymond. Ueber die Grenzen des Naturerkennens. Die sieben Welträtsel. 2 Vorträge. Des 1. Vortrags 8., der 2 Vorträge 4. Aufl. Leipzig: Veit & Co. 120 S. 8⁰.

A. Görland. Aristoteles und die Arithmetik. Marburg. 61 S. 8⁰.

L. Goldschmidt. Kant und Helmholtz. Populärwissenschaftliche Studie. Hamburg: L. Voss. XVI + 135 S. 8⁰.

A. Kowalewski. Ueber das Causalitätsproblem. Eine philosophische Studie. Leipzig: O. Mutze. II + 121 S. 8⁰.

Lafouge. Essai synthétique sur la formation du système solaire. Première partie: formation du système. Chalons-sur-Marne: Martin Frères. IX + 226 S. [Nature **58,** 342-343.]

K. Marbe. Die stroboskopischen Erscheinungen. Wundt Philos. Studien **14,** 376-401.

Rob. Müller. Ueber Raumwahrnehmung beim monocularen indirecten Sehen. Wundt Philos. Studien **14**, 402-470.

A. Muller. Conception mathématique de l'espace. Revue scientifique (4) **9**, 202-207.

H. Poincaré. La mesure du temps. Rev. de métaphys. **6**, 1-13.

R. Seyfert. Ueber die Auffassung einfachster Raumformen. Wundt Philos. Studien **14**, 550-566.

C. Westphal. Das Dilemma der Atomistik. Ein erster Beweis des Idealismus, nebst einer Skizze eines modernen Stils des idealistischen Weltgebäudes. Berlin: C. Skopnik. 35 S. 8°.

A. Wernicke. Die mathematisch naturwissenschaftliche Forschung in ihrer Stellung zum modernen Humanismus. Vortrag. Berlin: Salle. 18 S. 4°; Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 57-64, 77-82, 95-101.

B. Pädagogik.

G. Loria. La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario. Periodico di Mat. (2) **1**, 19-33.

Der bei Gelegenheit der ersten Versammlung der Gesellschaft Mathesis am 15. September 1898 in Turin gehaltene Vortrag ist um so bedeutungsvoller, als die italienischen Mathematiker der Secundarschulen auf diesem Congresse die Abhaltungen von Vorlesungen über Geschichte der Mathematik an den Universitäten in einer These gefordert haben. In wohlgegliederter Rede stellt Loria zuerst die allgemeinen Gesichtspunkte fest und bezeichnet die Elemente des Euklid als das hauptsächlich zuerst zu behandelnde Thema, nämlich in ihrem Aufbau und pädagogischen Werte, in ihrer Entstehung und ihren Schicksalen bis in die Neuzeit, in ihrem Einflusse auf die arithmetischen Begriffe. Lp.

J. N. Lockyer. A short history of scientific instruction. Nature **58**, 572-575, 597-600.

Eine Rede im Royal College of Science, der englischen „École Normale“ nach dem Redner, deren jetzige Bedeutung in den auf Anregung des Prinzgemahls Albert geschaffenen Einrichtungen beruht. Der grössere Teil giebt eine allgemeine Uebersicht über den höheren Unterricht seit den ältesten Zeiten, besonders in den exacten Wissenschaften; am Ende des Artikels werden die besonderen Schicksale des Royal College berührt. Lp.

A. Gray. Fellowships for research. Nature **58**, 600-602.

Die im Jahre 1851 zuerst an englischen Universitäten eingerichtete Stellung eines „Fellow“ for research, dessen Pflichten in der Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten bestehen, wird in ihrer segensreichen Wirkung

besprochen und zur weiteren Pflege empfohlen, da auch auf den amerikanischen jungen Universitäten diese Institution sich als höchst lebensfähig erwiesen habe. Lp.

D. E. Smith. On the course in the history of mathematics in the Michigan State Normal College. Bibl. Math. (2) **12**, 13-17.

Enthält das Programm des mathematisch - historischen Seminars an der Hochschule für Lehrer, die in Ypsilanti in Nordamerika eingerichtet ist. Den Vorlesungen und Uebungen sind jährlich 40 Stunden zugewiesen, und sie haben vorzugsweise einen pädagogischen Zweck; darum wird auch auf die Geschichte der Elementar-Mathematik grosses Gewicht gelegt. E.

Studienplan für die Candidaten des höheren Lehramtes in Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Göttingen. 14 S. 8°.

Der Göttinger Studienplan für die Studenten der Mathematik und Physik enthält Ratschläge über die Auswahl und Anzahl der zu hörenden Vorlesungen, die Ausarbeitung der niedergeschriebenen Notizen, die Beteiligung an Seminarübungen und Practicis, die privaten Studien, die Ferienarbeit und die Benutzung des mathematischen Lesezimmers. Kommt darin auch die besondere Richtung der Universität Göttingen, die auf festere Verbindung der reinen und angewandten Mathematik hinzielt, zum Ausdruck, so wird doch der Studienplan mit Nutzen auch von Schülern anderer Universitäten verwendet werden können. Mi.

F. Klein. Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 300-306.

Klein empfiehlt den eigentlichen mathematischen Forschern, die berufen sein sollen, die Wissenschaft weiter zu führen, die eingehende Beschäftigung mit der neueren Geometrie, der Functionentheorie complexer Variabeln, der Gruppentheorie, der allgemeinen Grössenlehre und der Zahlentheorie. Auch eine gewisse Fühlung mit der angewandten Mathematik glaubt er anraten zu müssen. Mi.

F. Klein. Universität und technische Hochschule. Vortrag. Verh. Naturf. Ges. Düsseldorf **1**, 25-36; Hoffmann Z. **29**, 534-542.

Klein vertritt den Gedanken der Solidarität von Universität und technischer Hochschule und verlangt für die erstere Rücksichtnahme auf die Fortschritte des Ingenieurwesens, eine durchgreifende Erweiterung nach der modernen Seite, eine volle wissenschaftliche Berücksichtigung aller Momente, die in dem hochgesteigerten Leben der Neuzeit als massgebend hervortreten, für die letztere Einrichtungen nach Art der Universitäten, durch die aus dem grösseren Kreise der Besucher der Hochschule eine kleinere Zahl so weit gefördert wird, dass sie Führer auf dem Gebiete des

wissenschaftlichen Fortschritts werden kann, und durch welche naturwissenschaftliche und technische Bildung in höchster Entwickelung vereinigt werden. Mi.

W. Dyck. Zur Frage der Ingenieur-Ausbildung. Beil. z. Allg. Ztg. No. 232 v. 13. 10. 98. 12 S. kl. 8°.

Die Münchener Technische Hochschule hat einen Lehrplan für ein vierjähriges Studium der technischen Physik entworfen und die dazu notwendigen Vorlesungen und Praktika organisirt. Die neue Einrichtung ist der allgemeinen Abteilung der technischen Hochschule angegliedert. Mi.

Relazione del Primo Congresso dei Professori di Matematica, promosso dall'Associazione „Mathesis“, tenuto in Torino dal 9 al 14 Settembre 1898. Periodico di Mat. (2) **1,** 1-18.

Namen der Teilnehmer an der Versammlung und Protokolle der einzelnen Sitzungen. Die ausführlichen Berichte über einzelne Verhandlungen folgen in den nachstehenden Referaten. Lp.

E. De Amicis. Pro fusione. Relazione sulla questione V proposta nel N. 1 (anno I) del Bollettino dell'Associazione Mathesis „Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento“. Periodico di Mat. **13,** 49-72.

Die Frage der Verschmelzung des stereometrischen Unterrichtes mit dem planimetrischen steht seit etwa zehn Jahren bei den Lehrern der Mathematik in Italien auf der Tagesordnung. Infolge der von der Vereinigung Mathesis ausgegangenen Anregung waren Gutachten eingelaufen von Ferrari, Palatini, Sola, Riboni, Bettazzi, von denen die drei ersten sich gegen die Verschmelzung erklärten, die beiden anderen für dieselbe. Der Berichterstatter, ein Anhänger der Verschmelzung, giebt zuerst die Ansichten der genannten Mathematiker wieder und erörtert die von den Gegnern der Verschmelzung angeführten Gründe, um sie endgültig zu entkräften. Lp.

F. Giudice. Relazione sulla prima quistione proposta del Comitato dell'Associazione „Mathesis“. Periodico di Mat. (2) **1,** 34-36.

Die Frage lautete: „Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione“. Nach einem knapp abgefassten Referate über den Stand der Frage in Italien werden drei Sätze zur Discussion vorgeschlagen. Lp.

G. Lazzeri. Note alla discussione della prima quistione trattata dal Congresso. Periodico di Mat. (2) **1,** 117-124.

Der Verf., ein Vorkämpfer der Verschmelzung des Unterrichts in der Planimetrie und in der Stereometrie, fasst seine Gründe nochmals zusammen, weil die allgemeine Discussion über die Frage kein Endergebnis herbeigeführt hatte, und spricht seine Zuversicht zu dem Siege dieses Gedankens aus. Lp.

C. Ciamberlini. Relazione sulla terza quistione proposta dal Comitato dell'Associazione „Mathesis". Periodico di Mat. (2) **1,** 37-57.

Der Wortlaut der Frage ist: „Libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano, mezzi perchè si limiti, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola". Der Bericht lässt sich über die in der Frage berührten Gesichtspunkte aus; am Schlusse wird der Vorschlag gemacht, dass jeder Lehrer die von ihm in mathematischen Lehrbüchern bemerkten Irrtümer in dem „Bollettino" der Mathesis regelmässig zur allgemeinen Kenntnis bringen möge. Lp.

A. M. Bustelli. Relazione sulla quarta quistione proposta dal Comitato dell'Associazione „Mathesis". Periodico di Mat. (2) **1,** 58-99.

„Ripartizione dell'insegnamento della matematica elementare tra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie" war das zu besprechende Thema, dessen umfangreiche Behandlung der Verfasser fertig gestellt hat. Die dabei angetroffene Anordnung ist die folgende: I. Vorwort. II. Die Mathematik in dem organischen Felde des Mittelschulunterrichts. III. Die mathematische Propädeutik für die niederen Mittelschulen und die folgerichtige Mathematik für die höheren. IV. Die allgemeinen Grundzüge der Verteilung. V. Die den einzelnen Disciplinen zugehörigen Grundzüge: a) die Geometrie, b) die Arithmetik, c) die Algebra. VI. Schlusswort. Lp.

L. Certo. Relazione sulla quinta quistione proposta dal Comitato dell'Associazione „Mathesis". Periodico di Mat. (2) **1,** 107-116.

Der Bericht betrifft das auch in Deutschland jüngst öfter erörterte Thema: „Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studi matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondari". Die zum Teil an F. Klein anknüpfenden Betrachtungen gipfeln in der Aufstellung von dreizehn Forderungen, von denen einige in Deutschland schon erfüllt sind. Andere sind auch für uns zu beherzigen: Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik, über Geschichte der Mathematik, über mathematischen Unterricht. Die Forderungen, welche sich auf die praktische Ausbildung beziehen, sind in Deutschland durch die Einrichtung des Seminar- und des Probejahres vielleicht besser erfüllt, als es nach den Vorschlägen von Certo geschehen würde. — Bezüglich der Universitätslehrer wird ebenfalls der Nachweis einer

praktischen Lehrthätigkeit verlangt: „Zur Erlangung eines Lehrstuhles an einer Universität soll es eine notwendige Bedingung sein, durch eine gewisse Anzahl von Jahren an den Mittelschulen mit Erfolg unterrichtet zu haben und sich eingehend mit den Fortschritten der Elementarmathematik beschäftigt zu haben.“ Lp.

G. Riboni. Quistione proposta dal Professore G. R. Periodico di Mat. (2) **1,** 100-104.

„Proposta che sia concesso ai licenziati agrimensori degli istituti tecnici di adire alla facoltà matematica, exclusivamente però per le scuole d'applicazione degli ingegneri“, diese These begründet der Verf. und empfiehlt sie der Versammlung der Mathesis zur Annahme. Lp.

S. Piazze. Quistione proposta dal Professore S. P. Periodico di Mat. (2) **1,** 105-106.

Der vor der Versammlung der Mathesis gehaltene Vortrag empfiehlt den „Insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria nell'istituto tecnico“. Lp.

J. C. V. Hoffmann. Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums der ersten 25 Bände der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Stoll systematisch geordnet von Emmerich und C. Müsebeck und herausgegeben von J. C. V. H. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 399 S. gr. 8°.

Obgleich die Litteratur nicht gerade arm ist an Sammlungen mathematischer Aufgaben, wird eine solche, wie die vorliegende, für viele Lehrer der Mathematik sich sehr nützlich erweisen. In der Bildung neuer und interessanter Aufgaben besteht ein grosser Teil der Arbeit jedes einsichtsvollen und mit Freude in seinem Berufe stehenden Lehrers, und die besten solcher aus der täglichen Berufsarbeit hervorgegangenen Uebungsaufgaben sind es wohl, welche in dem Aufgaben-Repertorium der von Hoffmann begründeten Zeitschrift veröffentlicht worden sind, als Zeugen der regen Thätigkeit der Lehrer an den deutschen Mittelschulen. In ihrer Zerstreuung über die einzelnen Nummern der vielen Bände waren sie für die jüngeren Lehrer, welche nicht zeitlich mit ihnen fortgeschritten waren, schwer zu benutzen. Jetzt aber, wo sie schön geordnet sind, kann jeder leicht Passendes herausfinden und benutzen. Wie Laisant eine Sammlung von Schüleraufgaben höherer Art aus den Zeitschriften in französischer Sprache zusammengestellt und in einer Reihe von Bänden veröffentlicht hat, so haben wir in der vorliegenden Sammlung eine minder umfassende und minder weitgehende, aber recht interessante und nützliche Zusammenstellung erhalten. Es sind nur die Aufgaben abgedruckt, nicht die Lösungen; bei jeder einzelnen ist der Urheber der Aufgabe, der Ort

ihrer Veröffentlichung und ihrer Lösung angemerkt. Ein sehr eingehendes Inhaltsverzeichnis vermittelt das schnelle Auffinden der Stelle des Buches, wo Aufgaben einer gesuchten Gattung stehen. Innerhalb jedes Paragraphen sind verwandte Aufgaben nahe bei einander gestellt, alle mit fortlaufenden Nummern versehen, die in jedem neuen Paragraphen wieder mit 1 beginnen. Lp.

JETTER. Die mathematischen Aufgaben bei der württembergischen Concurs-Prüfung im Lauf der letzten 50 Jahre. Pr. (No. 611) Evang.-theol. Seminar Urach. 32 S. 4°.

Jetter giebt einen Ueberblick über die während der letzten fünfzig Jahre erfolgte Entwickelung des schriftlichen mathematischen Examens in der württembergischen Concursprüfung zur Aufnahme in das Tübinger Stift. Anfangs war für die Prüfung nur eine Frist von zwei Stunden zu ungeeigneter Zeit gewährt; seit 1860 sind drei Stunden in früher Morgenzeit bewilligt. Anfangs wurden 5-10 teilweise obligatorische, teilweise facultative Aufgaben vorgelegt; 1870 wurde die Zahl auf acht fixirt, seit 1896 auf sechs, nämlich zwei aus der Algebra, zwei aus der Geometrie und je eine aus der Trigonometrie und Stereometrie. Dem mathematischen Fache fällt dabei von dem im Gesamtzeugnisse der Prüfung ausgedrückten Zahlenwerte nur der neunte Teil zu; doch ist der Ausfall der mathematischen Arbeiten trotzdem oft von entscheidender Bedeutung für den Ausfall der Prüfung. Die Anforderungen bezüglich der Schwierigkeit der Aufgaben haben sich in den letzten Decennien bedeutend gesteigert. Zu fordern ist aber auch für die Gegenwart, dass 2-3 Aufgaben so beschaffen sind, dass selbst schwächer begabte Schüler dieselben in Angriff nehmen können; und Aufgaben, die zur Lösung einen Kunstgriff oder weitläufige ermüdende Zahlenrechnung erfordern, sind principiell zu vermeiden. In der Algebra werden angewandte Gleichungen in Worten bevorzugt. Die Auswahl der geometrischen Aufgaben darf nicht zu hoch gegriffen werden, und es sind am besten alle in Lehrbüchern gegebenen zu vermeiden. Durch die trigonometrischen Aufgaben ist Fertigkeit im Auflösen der Dreiecke bei gegebenen Seiten- oder Winkel-Summen und -Differenzen und in der Berechnung der regulären Vielecke gefordert. In der Stereometrie kommen vor allem Berechnungsaufgaben in Betracht. Aufgaben über Maxima und Minima fehlen bisher. So entsprechen die Anforderungen im ganzen dem in Preussen üblichen Modus bei der Abiturientenprüfung der Gymnasiasten. Ein Verzeichnis der von 1878-1897 gestellten Aufgaben mit Andeutung der Resultate ist der Abhandlung angefügt. Mi.

J. W. A. YOUNG. Zur mathematischen Lehrbücherfrage. Eine schulstatistische Untersuchung. Hoffmann Z. **29**, 410-414.

Statistische Zusammenstellung der an 396 deutschen höheren Lehranstalten in Gebrauch befindlichen mathematischen Lehrbücher. Lp.

M. Schuster. Die Gleichung in der Schule. Hoffmann Z. **29**, 81-89.

Der Vorschlag, die Lehre von den Gleichungen mit Anwendungen zu beginnen und diese nur von Zeit zu Zeit an geeigneten Stellen durch rein theoretische Uebungen zu unterbrechen, wird begründet und durch einen Einzelplan ergänzt. Lp.

R. Krüger. Beiträge zum mathematischen Unterricht. Fortsetzung. Pr. (No. 84) Gymn. Prenzlau. 32 S. 4° (cf. F. d. M. **27**, 478).

Aus den zu den Reifeprüfungen der höheren Schulen gestellten Aufgaben werden weitere 163 Beispiele aus der analytischen Geometrie der Ellipse und Hyperbel ausgewählt und zusammengestellt. Lg.

Weitere Litteratur.

S. Dickstein. „Mathematik", Artikel und Sammelwerke u. d. T. „Leitfaden für den Selbstunterricht". Warschau 1897. S. 1-23. (Polnisch.)

E. Engelbrecht. Zur Frage des darstellend-geometrischen Unterrichts an unsern Real- und Oberrealschulen. Pr. Gleiwitz. 19 S. 4°.

G. Garbieri. Norme ai maestri per insegnare l'aritmetica e la geometria nelle scuole elementari. Milano. 122 S.

K. Gneisse. Ueber den Wert der mathematischen und sprachlichen Aufgaben für die Ausbildung des Geistes. Berlin: Weidmann. 63 S. gr. 8°.

S. P. Korytin. Uebersicht über die Schullitteratur für Arithmetik und Geometrie. St. Petersburg. 155 S. 8°. (Russisch, 1897).

P. La Cour. Historisk Matematik. 2. gennemsete udgave. Haefte 1-5. Kjöbenhavn. S. 1-160.

P. Lang. Der Unterrichtsstoff für Rechnen und Mathematik an der lateinlosen Realschule. Pr. (No. 524) Realsch. Kreuznach. 48 S. 8°.

H. Leuzinger und F. Pietzker. Der mathematisch naturwissenschaftliche Unterricht an den höheren Schulen des russischen Reiches, verglichen mit den entsprechenden preussischen Lehrplänen. Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 4-9.

O. Menzl. Ueber den mathematischen Unterricht an den höheren Handelsschulen. Reichenberg. 43 S. 8° (1897).

G. Prizzo. L'insegnamento della matematica nelle scuole primarie e popolari. Verona. 8°.

J. Sachs. Tafeln zum mathematischen Unterricht. Baden-Baden. 74 S. 4°.

A. Schülke. Aufgaben über die Bewegung von Sonne, Mond und Planeten. Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 22-24, 43-45.

A. Schülke. Beiträge zur Reform des Unterrichts in der Arithmetik. Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 2-4, 25-26.

K. F. SLOTTE. Matematikens och Fysikens Studium vid Abo Universitet. Helsingfors. 309 S. 8°.

G. SPERK. Critique de l'enseignement des mathématiques par G. S., étudiant à l'École d'ingénieurs à Lausanne. Audi alteram partem. Lausanne: Guilloud-Howard. 34 S.

A. G. WEBSTER. The mathematics in connection with physics. Nature **57**, 317.

K. WEISE. Zur Frage der Einführung der physikalischen Dimensionen in den Schulunterricht. Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 64-66.

F. PIETZKER. Die Tragweite der Lehre von den physikalischen Dimensionen. Ebenda, 66-71.

G. WITTE. Vereinfachte Einrichtung der Regeldetri- und Kettensatzformen für abgekürzte Decimalrechnung. Unterrichtsbl. f. Math. **4**, 26-29.

A. WERNICKE. Allgemeinbildung und Berufsbildung. Hoffmann Z. **29**, 379-387.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Kapitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

H. Weber. Lehrbuch der Algebra. Zweite Auflage. Erster Band. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. XVI und 704 S. 8°.

Dass ein deutsches mathematisches Lehrbuch von der wissenschaftlichen Höhe und von dem Umfange des vorliegenden Werkes schon nach drei Jahren in zweiter Auflage ausgegeben werden muss, ist ein grossartiger Erfolg, den selbst die Bewunderer desselben, wie Ref., bei dem Erscheinen nicht zu hoffen wagten. Selten hat sich auch die Kritik so einmütig zu Gunsten einer neuen Erscheinung ausgesprochen wie über das Weber'sche Lehrbuch der Algebra. Um nur zwei Stimmen aus dem Auslande zu erwähnen, führen wir die ausführlichen und höchst anerkennenden Besprechungen an von Jules Tannery in Darboux Bull. **19**, 161-176 (1895) und von James Pierpont im American M. S. Bull. (2) **4**, 200-213 (1898).

Einige charakteristische Sätze aus der Anzeige des französischen Recensenten mögen hier Platz finden: „Es ist in Wahrheit ein Lehrbuch, ein Buch, aus welchem man die Algebra lernen kann, das Weber hat schreiben wollen, und dies ist ihm vollständig gelungen. Seine Vorliebe für bündige Kürze ist nur das Streben nach Einfachheit im Gedanken und nach einer diesem Gedanken gemässen Form der Rede. Er sagt nie etwas Anderes als das Wesentliche; aber er wendet die grösste Sorgfalt an, nichts Wesentliches auszulassen. Der Sache und der Form nach ist sein Buch wahrhaft klar. . . . Der Leser wird beim Studium desselben nicht verfehlen, die Kunst und die Sicherheit zu bewundern, mit welcher der Inhalt geordnet und verarbeitet worden ist."

In ähnlicher Weise, aber noch enthusiastischer drückt sich der amerikanische Gelehrte aus: „Beim Durchlesen des Werkes finden wir

überall offenkundige Zeugen für die Reife des Urteils in der Auswahl des abgehandelten Stoffes, in der Zubilligung des für jeden Gegenstand nach seiner verhältnismässigen Wichtigkeit nötigen Raumes, in der harmonischen Gruppirung der Teile, in der Art der Darstellung der verschiedenen Theorien. Unsere Bewunderung wird nicht minder erregt durch seine pädagogischen Vorzüge: Weber's Deutsch ist einfach und knapp, die Beweise sind klar und streng, und viele von ihnen sind von äusserster Eleganz. Nachdem ein Gesichtspunkt gewonnen ist, erledigt der Verf. ein Problem nach dem andern, so wie sie ihm in den Weg kommen, und da sie immer klar gestellt werden, so hat der Leser das Vergnügen, den Zielpunkt im voraus zu kennen. . . . Klassisch vom Tage der Veröffentlichung an, hat dieses grosse Werk gemäss seiner Bestimmung eine lange und nützliche Laufbahn vor sich, ein Ehrendenkmal für seinen genialen Verfasser."

Es gewährt dem Referenten ein besonderes Vergnügen, seine in F. d. M. **26**, 102, 1895 abgedruckte Anzeige der ersten Auflage durch diese Aussprüche bestätigt und ergänzt zu sehen und die Leser des Jahrbuchs mit solchen Stimmen aus dem Auslande bekannt zu machen. In Bezug auf die neue Auflage ist zu bemerken, dass der Plan und Gang der ersten Auflage durchweg beibehalten sind. „Trotzdem ist das ganze Gebiet wiederholt durchgearbeitet, und manches Neue ist hinzugekommen, teils zur Berichtigung einzelner Irrtümer oder zur Erhöhung der Klarheit und Verständlichkeit, teils um durch Berücksichtigung neuer Arbeiten der Vollständigkeit näher zu kommen. Eine wesentliche Erweiterung hat die Theorie der Elimination im vierten Abschnitt gefunden." Der Umfang ist dadurch im ganzen um 50 Seiten vergrössert worden. Ausser den schon bei der ersten Auflage genannten Mathematikern, die dem Verf. mit ihrem Rate helfend zur Seite standen, haben jetzt auch Hensel, Frobenius, Netto ihr Interesse für das Werk dadurch bekundet, dass sie Weber durch Mitteilungen in der Neubearbeitung unterstützt haben. Lp.

H. Weber. Traité d'algèbre supérieure. Principes, racines des équations, grandeurs algébriques, théorie de Galois. Traduit sur la seconde édition allemande par J. Griess. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XI + 764 S.

E. Netto. Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erste Lieferung des 2. Bandes. Leipzig: B. G. Teubner. 192 S. gr. 8°.

Der vorliegende Teil der „Vorlesungen" behandelt die Theorie der Functionen mehrerer Variabeln und der Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Nach Bestimmung der Gliederanzahl einer solchen Function werden die Fragen der Interpolation, der Reducibilität und der gemeinsamen Teiler erörtert. Der Uebergang zu mehreren Gleichungen führt auf die Theorie der Elimination, deren verschiedene Methoden

eingehend besprochen werden. Im Anschluss an die Resultante und die begrifflich hiervon unterschiedene Eliminante werden die vielfachen und die unendlichen Wurzeln untersucht. Es folgt die Besprechung der Irreducibilität und Reducibilität, der Stufenzahl, der Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Gleichungssystemen und die Herleitung des Jacobi'schen Theorems. Den Schluss bildet eine Darstellung der Kronecker'schen Charakteristikentheorie, sowie der Hermite'schen Untersuchungen über quadratische Formen. F.

A. Capelli. Lezioni di algebra complementare. II ed. con aggiunte. Napoli: Pellerano. XVI u. 680 S. 8°.

Bericht in Loria's Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche **2** (1899), 67; vergl. das Referat über die erste Auflage in F. d. M. **26**, 105, 1895. Vi.

J. J. O'Dea. The new explicit algebra in theory and practice. For teachers and intermediate and university students. Part I, II. London: Longmans, Green, and Co. X + 616 S. 8°.

A. N. Whitehead. A treatise on universal algebra. Vol. I. Cambridge: The University Press; New York: The Macmillan Co. XXVII + 586 S.

Wir haben das Werk selbst nicht erhalten; wegen der Wichtigkeit jedoch, die ihm von den Recensenten in Science **9**, 324-328 und in Nature **58**, 385-386 zugeschrieben wird, berichten wir besonders nach der ersten dieser ausführlichen Besprechungen von A. Macfarlane. Unter universaler Algebra werden die verschiedenen Systeme der symbolischen Schlussbildung verstanden, welche mit der gewöhnlichen Algebra verknüpft sind; die hauptsächlichsten Beispiele hierfür sind die Hamilton'schen Quaternionen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre und die Boole'sche symbolische Logik. Der gegenwärtige Band enthält eine Darlegung der allgemeinen Principien der universalen Algebra; hieran schliesst sich einzeln ein eingehendes Studium der Algebra der Logik und der Ausdehnungslehre; der zweite Band wird gesondert ein eingehendes Studium der Quaternionen und Matrizen, sowie eine eingehende Vergleichung des symbolischen Aufbaus der verschiedenen algebraischen Gebäude enthalten. Der Hauptgedanke des Werkes ist nicht die Vereinheitlichung der verschiedenen Methoden, nicht die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Algebra bis zur Umfassung aller, sondern vielmehr das vergleichende Studium ihres besonderen Aufbaus. Das Werk ist gut und klar geschrieben und wird nach seiner Vollendung eine bewundernswerte Darstellung des Gegenstandes von dem formalen Gesichtspunkt der mathematischen Analysis aus geben. Ein löblicher Zug besteht in dem Conservatismus beim Gebrauche der Symbole; hierdurch macht der Verf. sein Werk für diejenigen leichter

lesbar, welche schon einzelne der besonderen Gebiete studirt haben. Ein anderer löblicher Zug des Buches ist in den historischen Anmerkungen zu erblicken, die einigen Kapiteln angehängt sind. In denselben giebt Whitehead eine kurze Geschichte der Entwickelung des speciellen Gebietes, so weit er sie kennt, ohne dass er eine erschöpfende Untersuchung anstellt. Die Wichtigkeit der historischen Noten verlangt wohl eine gründlichere Forschung, da das Werk sich über eine weite und wachsende Provinz der Mathematik erstreckt und nach seiner Vollendung als einer der zuverlässigsten Bürgen bezüglich seines Gegenstandes betrachtet werden wird. Bei der Darstellung der Algebra der Logik folgt der Verf. zumeist den Auseinandersetzungen Schröder's in dessen „Vorlesungen über die Algebra der Logik"; allein er nimmt den wertvollsten Teil jenes Werkes nicht auf, nämlich die Algebra der Relativen. Die eingehende Darlegung des Grassmann'schen Systems ist vortrefflich und wird allen denen willkommen sein, welche sich die Gedanken jenes grossen Meisters der Raumanalyse aneignen wollen. Das letzte Buch des vorliegenden Bandes bezieht sich auf die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Geometrie. „Das Werk macht dem Verf. und der Universität zu Cambridge alle Ehre; es wird wahrscheinlich zu weiteren Fortschritten in der universalen Algebra führen, und zwar nicht nur durch das in ihm Festgelegte, sondern durch die Fragen, zu deren Erörterung es anregt." Lp.

A. McAulay. Octonions. A development of Clifford's bi-quaternions. Cambridge: University Press. XIV + 253 S. 8°. [American M. S. Bull. (2) **6**, 74-76.]

Der Verf. giebt in diesem Buche eine erweiterte Ausführung der Ideen, die der bekannte englische Mathematiker Clifford über die Biquaternionen (oder, wie der Verf. sagt, „Octonionen") entwickelt hatte. Die Grundbegriffe sind folgende. Ein „lator" ist eine Grösse, die bestimmt ist durch eine Richtung und eine gewöhnliche Grösse (scalar); ein „rotor" eine Grösse, die bestimmt ist durch eine Richtung, eine unbegrenzte damit parallele Gerade und eine gewöhnliche Grösse; ein „motor" durch einen rotor und lator, die parallel zu einander sind. Eine „octonion" ist bestimmt durch einen motor und zwei scalars. (S. Clifford's Mathematical Papers, S. 182 ff.). Unter den Anwendungen sind vor allem die auf Mechanik und Geometrie berücksichtigt, nicht aber die auf Algebra.

In Anbetracht der Ueberfülle von Benennungen und Bezeichnungen ist es nicht wohl möglich, auf das Einzelne einzugehen. Ueber den organischen Zusammenhang der Theorie mit verwandten Theorien werden nur kurze Andeutungen gemacht. My.

L. Donati. Appunti di analisi vettoriale. Bologna Mem. (5) **7**, 11-34.

Es wird in dieser Arbeit gezeigt, wie das Hamilton'sche Symbol

$$\nabla = i\nabla_1 + j\nabla_2 + k\nabla_3$$

in Verbindung mit den verschiedenen Productbildungen der Vectoren eine Anzahl sehr einfacher Ausdrücke liefert, die nicht nur unmittelbar geometrisch gedeutet werden können, sondern auch zur Grundlage eines flüssigen und ergebnisreichen Calcüls dienen. Bedeutet φ eine Zahl und A und A' Strecken, ferner φA, $\{AA'\}$, $|AA'|$ der Reihe nach ein arithmetisches, äusseres und inneres Product, so stellen z. B. die Symbole $\{\nabla A\}$ und $|\nabla A|$ einfache Begriffe der Hydrodynamik dar; es ergeben sich ferner die Begriffe der Potential-, Solenoid- und anderer Vectoren. Die Untersuchung der verschiedenen Fälle der Productbildung aus drei Factoren ermöglicht sodann eine wiederholte Anwendung des ∇-Processes und den Uebergang zu Differentialbildungen zweiter Ordnung. Weiter wird die Vectorenmethode zur Transformation von Integralen der Raumgeometrie verwendet und zur Aufstellung von Beziehungen zwischen den Integralen von begrenzten Flächen und ihren Umfängen. Eine Fundamentalgleichung liefert den Vector A in einem beliebigen Punkte einer Fläche, ausgedrückt durch die Werte von $\nabla^2 A$ im Innern und durch die Werte von A und $|n\nabla|A$ auf dem Umfange der Fläche (wobei n einen Einheitsvector von bestimmter Richtung bedeutet). Die weitere Untersuchung dreht sich um die bestimmenden Elemente einer Vectorfläche, nämlich $\vartheta = |\nabla A|$, $g = \{\nabla A\}$, $E = |nA|$, $h = \{nA\}$, von denen die beiden ersten im Innern und je eins der letzteren auf dem Umfange gegeben ist. Namentlich werden die Bedingungen erörtert, unter denen eine Vectorfläche existirt, wenn die zu ihrer Charakterisirung erforderlichen Elemente willkürlich gegeben sind. Schg.

K. Hensel. Ueber die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. J. für Math. **119,** 175-185.

Für „einfache Divisorensysteme" gelten zunächst die Sätze: „Ist $(\overline{\Pi}) = (F_1(x), \ldots, F_\mu(x))$ ein beliebiges einfaches Divisorensystem mit dem Primteiler $(\Pi) = (p, P(x))$, so ist die Anzahl $N(\overline{\Pi})$ aller modulo (Π) incongruenten Grössen $N(\overline{\Pi}) = (N(\Pi))^\lambda = p^{\lambda\pi}$, wenn $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_a$ den Gesamtgrad in P der Elemente des Systemes $(\overline{\Pi})$ in seiner kanonischen Form $(\Psi_0(P), \Psi_1(P), \ldots, \Psi_a(P))$ bedeutet" (π ist der Grad von $P(x)$).

„Ist $(\overline{\Pi})$ ein einfaches Divisorensystem mit dem Primteiler (Π), so ist die Anzahl $\varphi(\overline{\Pi})$ aller incongruenten zu $(\overline{\Pi})$ teilerfremden Elemente

$$\varphi(\overline{\Pi}) = p^{(\lambda-1)\pi}(p^\pi - 1) = N(\overline{\Pi})\left(1 - \frac{1}{N(\Pi)}\right),$$

wenn λ wieder den Gesamtgrad der Elemente von $(\overline{\Pi})$ in der kanonischen Form bedeutet." Aus diesen Resultaten werden sodann für beliebige Divisorensysteme die Sätze hergeleitet:

„Ist $M \sim (\overline{\Pi}_1)(\overline{\Pi}_2)\ldots(\overline{\Pi}_h)$ ein beliebiges reines Modulsystem zweiter Stufe und sind $(\overline{\Pi}_1), \ldots, (\overline{\Pi}_h)$ seine einfachen Factoren, so ist

die Anzahl $N(M)$ aller modulo (M) incongruenten ganzen ganzzahligen Functionen von x durch die Gleichung:

$$N(M) = \prod_{i=1}^{h} N(\Pi_i) = \prod_{i=1}^{h} p_i^{n_i \lambda_i}$$

bestimmt, und ferner ist die Anzahl $\varphi(M)$ aller zu (M) teilerfremden incongruenten Functionen von x durch die Gleichung gegeben:

$$\varphi(M) = N(M) \cdot \prod_{i=1}^{h} \left(1 - \frac{1}{N\Pi_i}\right),$$

wenn die h Systeme $\Pi_i = (p_i, P_i(x))$ alle in M enthaltenen incongruenten Primdivisoren bedeuten.“ F.

H. Hancock. Canonical forms for the unique representation of Kronecker's modular systems. J. für Math. **119,** 148-170.

Die Arbeit, welche denselben Gegenstand wie die im J. für Math. **118,** 234-250 von Hensel publicirte behandelt (s. F. d. M. **28,** 87, 1897), aber ohne Kenntnis derselben geschrieben ist, stellt ein beliebiges Modulsystem des Integritätsbereiches $(1, x)$ zunächst als Product solcher Modulsysteme dar, in welchen das constante Element eine Primzahlpotenz ist. Jedes dieser letzteren Systeme wird weiter auf eine kanonische Form reducirt [z. B. $(p, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \sim (p, f(x))$, wo der Coefficient der höchsten Potenz von x in $f(x)$ gleich 1 ist und die anderen (mod. p) reducirt sind], welche als eindeutig bestimmt nachgewiesen wird. F.

O. Pund. Ueber einige Relationen zwischen Modulsystemen. Hamb. Mitt. **3,** 325-332.

Um die Art der hergeleiteten Relationen zu kennzeichnen, führen wir die folgende an:

Wenn $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ das aus den n Moduln $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $S^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ das aus deren m^{ten} Potenzen gebildete Modulsystem bedeutet, so ist

$$S^{(m)}(a_1, \ldots, a_n) . S^{(m-1)(n-1)}(a_1, \ldots, a_n) = S^{n(m-1)+1}(a_1, \ldots, a_n).$$

Andere Relationen beziehen sich auf Modulsysteme $S_k(a_1, \ldots, a_n)$, die aus allen $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ möglichen Producten von k verschiedenen Factoren aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestehen. Weiter wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Moduln bestimmt. F.

R. Bettazzi. A proposito della nota del Prof. Ciamberlini „Sulle definizioni di equazioni e di sistemi di equazione“. Periodico di Mat. **13,** 19.

Spricht im wesentlichen seine Uebereinstimmung mit Ciamberlini aus (F. d. M. **28,** 97, 1897). Lp.

S. N. Antajew. Notiz betreffend den Satz über den Zusammenhang der Functionen, deren Gruppen einander untergeordnet sind. Mosk. Math. Samml. **20**, 472-484. (Russisch.)

„Enthält die Gruppe der Function ψ der Wurzeln einer Gleichung die Gruppe der Function φ, so ist ψ rational durch φ ausdrückbar.“ Dieser Satz wird gewöhnlich nur für allgemeine (d. h. deren Gruppe $n!$ Substitutionen enthält) Gleichungen bewiesen, existirt aber für jede irreducible Gleichung, wenn wir Gruppe von ψ die Gesamtheit aller Substitutionen nennen, welche eine mit ψ in Folge der Bedingungsgleichungen identische Function ergeben (vgl. Antajew: Auseinandersetzung der Haupteigenschaften einer Gleichung n^{ten} Grades etc. Mosk. Math. Samml. **20**, 33-92; F. d. M. **28**, 92, 1897). Si.

N. W. Bugajew. Anwendung der $E(\varphi x)$-Rechnung zur Bestimmung des ganzen Teiles des Quotienten zweier Polynome. Mosk. Math. Samml. **20**, 247-257. (Russisch.)

Vollständige Lösung der Aufgabe von Jamet (Intermédiaire des mathém. **3**, quest. 936): Es sei $F(x) = p_0 x^m + \cdots + p_{m-1} x + p_m$, $\varphi(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n$, wo $m = n + \mu$ und

$$E\left(\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right) = P_0 x^\mu + P_1 x^{\mu-1} + \cdots + P_\mu.$$

Dann wird nach Bugajew's Formeln (Allgemeine Grundlagen der $E(\varphi x)$-Rechnung, Mosk. Math. Samml. **13**, 59; F. d. M. **18**, 340, 1886) $P_\mu = \frac{1}{\Pi(\mu)} \Delta^{(\mu)}(p_0/q_0)$, wo Δ_μ die μ^{te} Derivation bezeichnet, oder

$$P_\mu = \Sigma(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu} \frac{\Pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_\mu)}{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_\mu)} \frac{q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \ldots q_\mu^{\lambda_\mu} p_t}{q_0^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu+t}},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, t$ ganzzahlige positive (Null inbegriffen) Lösungen von $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + \mu\lambda_\mu + t = \mu$ sind. Si.

P. S. Florow. Einige Eigenschaften der Coefficienten einer ganzen rationalen Function mit nur reellen Wurzeln. X. Vers. Russ. Naturf., 431. (Russisch.)

Besitzt das Polynom $\Sigma_i (m)_i a_i x^{m-i}$ nur reelle Wurzeln, so bestehen die Ungleichungen $a_{i+1}^2 - a_i a_{i+2} \geqq 0$,

$$(a_{i+1} a_{i+2} - a_i a_{i+3})^2 - 4(a_{i+1}^2 - a_i a_{i+2})(a_{i+2}^2 - a_{i+1} a_{i+3}) \leqq 0.$$

Si.

L. Gérard. Sur le théorème de Rolle. Bull. math. spéc. **5**, 88-89.

J. Hadamard. Sur la démonstration d'un théorème d'Algèbre. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 84-86.

„Der Beweis des berühmten Satzes von der Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen höheren Grades als des vierten, so wie derselbe von Abel dargestellt ist, unterliegt einem gewichtigen Einwande, der, obschon leicht zu beseitigen, es vielleicht verdient, wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes angezeigt zu werden.“ Die Bemerkung bezieht sich auf die Aussage, dass zu jeder der betrachteten p^{ten} Wurzeln $\sqrt[p]{A} = z$ eine Form $B = b_0 + z + \cdots + b_{p-1} z^{p-1}$ in der gewollten Art gehört. Lp.

M. Vazquez. La solución algebraica del grado N que dicen que Abel demostro imposible, y asi lo afirmaban, desqués de Abel, todos los algebristas. Oviedo. 57 S. gr. 8°.

L. Baur. Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Aus einem Schreiben an H. Weber in Strassburg. Math. Ann. **50**, 241-246.

Genügt y einer reducibeln oder irreducibeln algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variable x sind, so gilt der Satz: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die n conjugirten Wurzeln $y_1, y_2, \dots, y_n$ jener Gleichung für $x = a$ genau ϱ von einander verschiedene Werte annehmen, ist die, dass für $x = a$ alle aus dem System (s_{h+i}) (die s bedeuten die Potenzsummen und $h, i = 0, 1, \dots, n-1$) gebildeten Minoren $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, die ϱ^{ten} Grades aber nicht mehr alle.“

Sind insbesondere die Coefficienten der Gleichung ganze rationale Functionen und der Coefficient von y^n gleich 1, so lässt sich durch Benutzung der von Kronecker für die Reduction ganzzahliger Systeme gegebenen Vorschriften (J. für Math., **107**) aus diesem Satze das Corollar ableiten: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass unter den n conjugirten ganzen algebraischen Functionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ von x an der Stelle $x = a$ genau ϱ verschiedene Werte sich finden, ist die, dass der $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Elementarteiler des Systems (s_{h+i}) modulo $(x-a)$ verschwindet, der ϱ^{te} aber nicht mehr.“ Es folgt noch die Aufstellung der Gleichungen, welchen die ϱ von einander verschiedenen Wurzeln der vorgelegten Gleichung genügen. F.

A. Capelli. Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. Napoli Rend. (3) **4**, 84-90.

A. Capelli. Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. Napoli Rend. (3) **4**, 243-247.

Die erste der beiden Arbeiten ist die unmittelbare Fortsetzung derjenigen, über welche F. d. M. **28**, 90, 1897 referirt worden ist. Von der Gleichung $x^4 - A = 0$ ausgehend, wird mit Hülfe des Schlusses von n auf $(n+1)$ und unter Anwendung eines in der

früheren Arbeit bewiesenen Hülfssatzes gezeigt, dass die Gleichung $x^{2\lambda}-A=0$ dann und nur dann in einem beliebigen Rationalitätsbereiche (R) reducibel ist, wenn entweder A das Quadrat oder $-A$ das Vierfache der vierten Potenz einer Grösse des Rationalitätsbereiches ist.

Die Gleichungen $\Theta(\vartheta(x))=0$, auf welche sich der erwähnte Hülfssatz bezieht, können als besonderer Fall derjenigen Gleichungen $f(x)=0$ betrachtet werden, die sich durch eine rationale Transformation $y=\varphi(x)$ in eine Gleichung niedrigeren Grades $V(y)=0$ überführen lassen. Ist $V(y)=0$ in dem beliebigen Rationalitätsbereiche (R) reducibel, so gilt dasselbe auch von $f(x)$. Die Irreducibilität von $V(y)$ ist aber nicht hinreichende Bedingung für die Irreducibilität von $f(x)$. Vielmehr ist hierzu, wie in der zweiten Arbeit gezeigt wird, noch erforderlich, dass eine gewisse Function $\psi(x, y_1)$, deren Grad gleich dem Quotienten der Grade von f und V ist, sich in dem Rationalitätsbereiche (R, y_1) als irreducibel erweist, wobei y_1 eine Wurzel von $V(y)=0$ bedeutet. F.

U. Dini. Un teorema sui limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica. Annali di Mat. (3) **1,** 77-81.

Ist die Gleichung

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0$$

vorgelegt, und bedeuten $a'_0, \ldots, a'_m$ die absoluten Beträge der Coefficienten $a_0, \ldots, a_m$, so ist die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$a'_0 \lambda^m - a'_1 \lambda^{m-1} - a'_2 \lambda^{m-2} - \cdots - a'_{m-1}\lambda - a'_m = 0$$

eine obere Grenze für die absoluten Beträge der Wurzeln der vorgelegten Gleichung (oder gleich dem grössten dieser absoluten Beträge). Diese obere Grenze ist niedriger als die von Gauss in seinen „Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen“ und die von Desaint in der Abhandlung: „Sur quelques points de la théorie des fonctions“ (1897) angegebene. Durch die Substitution $\frac{1}{z}$ für z findet man in ähnlicher Weise eine untere Grenze für die absoluten Beträge der Wurzeln. F.

E. Maillet. Sur la détermination du groupe des équations numériques. C. R. **127,** 1004-1005.

Der Verf. teilt zwei Theoreme mit, um die Gruppe der irreducibeln Gleichungen der Form

$$x^p + qA_1 x^{p-1} + \cdots + qA_{p-1} x \pm q = 0,$$
$$x^{2p} \pm qx \pm q = 0$$

zu bestimmen, wo p und q Primzahlen, $A_1, \ldots, A_{p-1}$ ganze Zahlen bedeuten und p ungerade sein soll. Jhk.

F. J. Studnička. Erläuterung des Borchardt'schen Lehrsatzes, betreffend die Qualität der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Časopis **27**, 237-246. (Böhmisch.)

Zum Ausgangspunkte des Beweises, den der Verfasser zunächst liefert, dient ihm die in dem Wortlaute des gedachten Satzes enthaltene charakteristische Determinante, ersetzt durch das entsprechende Product, in welchem die aus den Wurzeln der Gleichung zusammengesetzten Factoren auftreten. Erläuterung, betreffend die Anwendung des Satzes in speciellen Fällen. Sda.

Bertel P. Bertelsen. Additionssubstitutioner i algebraiske Ligninger. Nyt Tidss. for Math. **9** B, 84-94.

Ueber die Invarianten einer algebraischen Gleichung $F(x) = 0$, welche mittels der Substitution $x + \lambda$ ungeändert bleiben. V.

F. Enriques. Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 145-146.

Der Verf. teilt in dieser Notiz nur mit, dass er sich mit dem Problem beschäftigt hat, die algebraische Gleichung $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ durch Darstellung der $x_1, x_2, \dots, x_n$ als Functionen von $n-1$ Parametern $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ zu lösen, und dass er in einigen besonderen Fällen zu Ergebnissen gelangt ist. F.

F. Enriques. Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues. Math. Ann. **51**, 134-153.

Inhalt des Vortrags von Enriques auf dem internationalen Mathematikercongress zu Zürich 1897 (vergl. das vorangehende Referat), in dem er über den augenblicklichen Stand der im Titel genannten Teile der Algebra berichtet hat. Die Hauptaufgabe besteht darin, wenn eine Gleichung zwischen n Variabeln $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ vorgelegt ist, die $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ in der einfachsten Weise als Functionen von $n-1$ Parametern $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ derart darzustellen, dass durch Einsetzen dieser Functionen in $f = 0$ die Gleichung identisch erfüllt wird. Es ist dabei wesentlich, zu unterscheiden, ob die $u_1, \dots, u_{n-1}$ sich rational durch die $x_1, \dots, x_n$ ausdrücken lassen oder nicht. Im ersteren Fall wird die Lösung als „einfache" bezeichnet. Falls man für eine vorgelegte Gleichung eine „nicht einfache" Lösung mittels bekannter Irrationalitäten besitzt, erhebt sich die Frage, ob man die Gleichung nicht auch in „einfacher" Weise durch dieselben Irrationalitäten lösen kann. Diese Frage ist erst in ganz speciellen Fällen beantwortet worden (Lüroth, Math. Ann. **9**; Castelnuovo, Math. Ann. **44**; Painlevé, Ann. de l'Éc. Norm., 1891; Enriques, Palermo Rend. 1895). Im Zusammenhang mit dem Problem der Lösung einer Gleichung steht das der Transfor-

mation, welches dazu führt, alle Gleichungen, die durch rationale Transformationen in einander übergehen, (nach Riemann) einer und derselben Klasse zuzuweisen. Die hierher gehörigen Fragen sind auch erst für Gleichungen zwischen zwei Variabeln vollständig erledigt. Indem Enriques näher auf die Gleichungen zwischen zwei Variabeln $f(x, y) = 0$ eingeht, bespricht er den Zusammenhang zwischen der Function f und der Irrationalität $x = \varphi(u)$, durch welche $f = 0$ gelöst werden kann. In gewissen Fällen kann man die Lösung einer Gleichung $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ zwischen n Variabeln auf die einer Gleichung zwischen zwei Variabeln zurückführen, dadurch dass man die übrigen als Parameter wählt und die Lösung von $\bar{f}(x_1, x_2) = 0$ für die von $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ verwertet (Noether, Math. Ann. **3**). — Für die allgemeinen Gleichungen zwischen drei Variabeln von höherem als dem vierten Grade kann man noch nicht den niedrigsten Grad der Irrationalität angeben, durch welche sie lösbar sind. Für specielle Kategorien von Gleichungen zwischen drei Variabeln sind wenigstens einige Resultate bereits gefunden.

F.

W. P. Ermakow. Das Theorem von L. K. Lachtin. Kiew Univ. Nachr. No. 2, 5 S. (Russisch.)

L. K. Lachtin. Bemerkung über mein Werk „Differentialresolventen der algebraischen Gleichungen höheren Ranges". Mosk. Math. Samml. **20**, 260-268. (Russisch.)

Ermakow spricht ein Bedenken gegen eine Stelle in der oben genannten Arbeit von Lachtin aus (Mosk. Math. Samml. **19**, 324; S. 114 des Separatabzugs). Lachtin bemerkt dagegen, die Stelle sei richtig, es müsse nur das Wort „reguläre" (Riemann'sche Fläche) hinzugefügt werden.

Si.

M. Bôcher. The roots of polynomials which satisfy certain linear differential equations of the second order. American M. S. Bull. (2) **4**, 256-258.

„Ist $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$ ein Polynom, welches der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a_1}{x-l_1} + \frac{a_2}{x-l_2} + \cdots + \frac{a_n}{x-l_n}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\psi(x)}{(x-l_1)(x-l_2)\cdots(x-l_n)}\,y = 0$$

genügt, worin $\psi(x)$ ein Polynom ist, die $l_1, l_2, \dots, l_n$ reell und ungleich $(l_1 < l_2 < \cdots < l_n)$ und die $a_1, a_2, \dots, a_n$ reell und grösser als Null sind, so müssen die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_k$ alle reell sein und in dem Intervall $l_1 \leqq x \leqq l_n$ liegen."

Wbg.

V. JAROLÍMEK. Beitrag zur Lösung der binomischen Gleichung $x^n \pm 1 = 0$. Časopis **27**, 209-217. (Böhmisch.)

Ausgehend von der Analogie zwischen den Werten von $\sqrt[n]{\pm 1}$ und den Ecken eines regulären n-Eckes, liefert der Verfasser elementare Lösungen der oben angeführten Gleichungen für $n = 2^r$, $n = 3\cdot 2^r$ $n = 5\cdot 2^r$, wobei r eine beliebige, ganze, positive Zahl vorstellt.
Sda.

L. G. GASCÓ. Rosolución por determinantes de los sistemas de ecuaciones lineales. Archivo de Mat. **2**, 124-127.

Der Verf. lehrt die Auflösung der linearen Gleichungssysteme vermittelst der Determinanten. Er giebt einen einfachen Beweis für die bei der Lösung anzuwendende Regel. Tx. (Lp.)

E. C. ATKINSON. The solution of quadratic equations. Nature **57**, 463.

G. B. MATHEWS. The solution of quadratic equations. Nature **57**, 463-464.

Der zweite Autor befürwortet die sofortige Zerlegung des Polynoms zweiten Grades in zwei Factoren. Lp.

AUSSANT-CARA. Sulla discussione dei problemi riducibili al secondo grado. Suppl. al Periodico di Mat. **1**, 49-54, 65-69, 85-88.

Für Schüler berechnete Darstellung, bei welcher als Muster gedient hat: A. Tartinville, Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue, Paris (1885 und 1891).
Lp.

R. MEHMKE. Hülfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln. Schlömilch Z. **43**, 80-84.

Die aufzulösende Gleichung $a\cdot x^2 \pm b\cdot x - c = 0$ resp. $a\cdot x^2 \pm b\cdot x + c = 0$ $(a, b, c$ positiv) wird durch die Substitution $x = \pm c/by$ resp. $x = \mp c/by$ auf die Form $y^2 - y - ac/b^2 = 0$ resp. $y - y^2 - ac/b^2 = 0$ gebracht. Von zwei nach Art der Logarithmentafeln eingerichteten Tabellen liefert die eine $v = \log y$ als Function von $u = \log(y^2 - y)$, die andere als Function von $u = \log(y - y^2)$. Nachdem u durch drei Subtractionen bekannter Logarithmen bestimmt ist, findet man v aus der Tabelle und sodann durch eine Subtraction $\log(\pm x_1)$ und durch eine Addition $\log(\pm x_2)$. Die Tafeln sind zunächst auf drei Stellen berechnet. F.

E. J. NANSON. On the solution of a system of equations of which one is quadric and the rest linear. Messenger (2) **28**, 107-110.

Diese Aufgabe ist von W. Baur behandelt in Schlömilch Z. **14** (F. d. M. **2**, 50, 1869) für den Fall, dass die quadratische Gleichung keine Glieder erster Ordnung enthält. Mit Hülfe eines Sylvester'schen Satzes vereinfacht der Verf. die Untersuchung nebst den Resultaten derselben und dehnt sie gleichzeitig auf die allgemeine quadratische Gleichung aus. Lp.

A. Macfarlane. Sur la résolution de l'équation du troisième degré. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 147-155.

Um bei den kubischen Gleichungen einen völligen Parallelismus der Formeln für die beiden Fälle einer positiven und einer negativen Invariante zu erreichen, führt der Verf. im ersten Falle nach bekannter Art die Hyperbelfunctionen ein, wie man für den zweiten die Kreisfunctionen benutzt, und deutet die hierbei auftretenden complexen Zahlen. Lp.

Demanet. Résolution hydrostatique de l'équation du troisième degré. Mathesis (2) **8**, 81-83.

Die Lösung h der Gleichung $x^3+x=k$ ist die Höhe, bis zu welcher eine Flüssigkeit in zwei communicirenden Gefässen ansteigt, von denen das eine cylindrisch ist mit einem Querschnitte gleich einem Quadratcentimeter, das andere konisch und derartig, dass das Verhältnis des Radius der Basis zur Höhe $\sqrt{3/\pi}$ ist, falls man in diese beiden Gefässe k Kubikcentimeter der Flüssigkeit bringt und ausserdem noch so viel, wie zur Füllung der Verbindungsröhre der beiden Gefässe nötig ist. Aehnliche Lösung für $x^3-x=k$. Mn. (Lp.)

D. Biddle, A. Droz-Farny. Solution of question 13639. Ed. Times **68**, 109-111.

Liegt ein Punkt P auf dem Umkreise eines gleichseitigen Dreiecks ABC von der Seite a, und ist l das Lot von P auf die zugehörige Simson-Linie (gleich dem Abstande vom Mittelpunkte des Umkreises), so stellen PA, PB, PC der Grösse nach die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3+qx+r=0$ dar, wo $q=-a^2$, $r=\pm 4R^2l=\pm\frac{4}{3}a^2l$. Hierdurch ist eine geometrische Darstellung der drei reellen Wurzeln einer kubischen Gleichung gegeben. Lp.

A. S. Bang. Om en Trediegradsligning. Nyt Tidss. for Math. **9** B, 94-96.

Beweis des bekannten Satzes, dass die Gleichung

$$(s-A)(s-B)(s-C)-D^2(s-A)-E^2(s-B)-F^2(s-C)-2DEF=0$$

reelle Wurzeln hat. V.

J. W. Russel. Question 6618. Ed. Times 69, 68.

Die sechs anharmonischen Verhältnisse z der vier Geraden $ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0$, sind, wenn man $\theta = z + (1/z) - 1$ setzt, bekanntlich die Wurzeln der Gleichung in z:

$$\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} = \frac{4}{27} - \frac{4T^2}{S^3}.$$

Lp.

K. Th. Vahlen. Ueber die kubischen und biquadratischen Gleichungen, von denen eine Wurzel durch rational ausführbare Wurzelausziehungen gefunden werden kann. Schlömilch Z. 43, 167-168.

Einfachere Herleitung der von Kummer (Berl. Ber. 1880) angegebenen Bedingungen dafür, dass eine rationale Wurzel einer Gleichung dritten, resp. vierten Grades durch ausschliesslich rationale Wurzelausziehungen gefunden werden kann (F. d. M. 12, 79, 1880). F.

F. Malfel. Sulla risoluzione di alcune equazioni del terzo e quarto grado. Periodico di Mat. 13, 110-117.

Die behandelten Gleichungen sind solche, bei denen die Wurzeln entweder eine arithmetische oder eine geometrische Progression bilden.

Lp.

M. R. Candioti. Ecuaciones de 3° y 4° grado. El método de resolución de Lagrange. Anales Soc. Cient. Argentina 46, 223-231.

H. Fürle. Ueber die Verwendung des Faber'schen Rechenstabes zur Lösung quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen I. Pr. (No. 125) IX. Städt. Realsch. Berlin. 30-36, 4°.

Die Arbeit behandelt die Transformationen, denen eine quadratische Gleichung unterworfen werden muss, um sie mittels des „Faber'schen Rechenstabes“ lösen zu können. Welchen Vorteil die verhältnismässig complicirte und dabei doch nur zu nicht sehr genauen Resultaten führende Methode besitzen soll, hat Referent nicht erkennen können.

F.

U. Ceretti. Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. Periodico di Mat. 13, 104-107, 155-160.

Einfache Bemerkungen über die numerische Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades, wenn man eine Wurzel durch ein tastendes Verfahren ermittelt hat. Lp.

P. Starkweather. A solution of the biquadratic by binomial resolvents. American M. S. Bull. 4, 524-528.

Durch consequente Verfolgung der allgemeinen Galois'schen Theorie gelingt es dem Verf., für die biquadratische Gleichung die resolvirenden Functionen so zu wählen, dass die Resolventen binomisch werden und sich explicite Ausdrücke für die Wurzeln ergeben.

Wbg.

H. Valentiner. Om Lösningen af Ligningen af 4de Grad. Nyt Tidss. for Math. **9**B, 36-39.

Elementare Darstellung der Lösung der Gleichungen vierten Grades.

V.

E. McClintock. Further researches in the theory of quintic equations. American J. **20**, 157-192.

Nachdem der Verf. über die Einteilung der Gleichungen fünften Grades in irreducible und reducible gesprochen und Methoden angegeben hat, um die letzteren in ihre irreduciblen Factoren zu zerlegen, reproducirt er in etwas veränderter Form den Inhalt der 1885 von ihm im American J. veröffentlichten Abhandlung „Analysis of quintic equations", in welcher er drei Resolventen sechsten Grades für die allgemeine Gleichung fünften Grades aufgestellt hat. Sodann folgt, als wesentlichster Bestandteil der vorliegenden Arbeit, die Darstellung der Coefficienten aller auflösbaren Gleichungen fünften Grades durch vier Parameter. Nach einigen historischen Bemerkungen wird zum Schlusse der Satz bewiesen, dass, wenn die aufgestellte Resolvente sechsten Grades eine rationale Wurzel hat und man die Gleichung sechsten Grades vermittelst Division durch den rationalen Factor auf eine Gleichung fünften Grades reducirt, die Resolvente dieser letzteren Gleichung fünften Grades dieselbe rationale Wurzel besitzt (F. d. M. **17**, 79, 1885). F.

A. C. Burnham. On some cases when the quintic is solvable by elementary methods. Amer. Math. Monthly **5**, 99-101.

L. K. Lachtin. Differentialresolvente einer gewissen Art der Gleichungen sechster Ordnung mit der Gruppe 360ster Ordnung. Mosk. Math. Samml. **20**, 353-410. (Russisch.)

Anwendung der in früheren Arbeiten desselben Verfassers (1. Algebraische Gleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen auflösbar sind, Mosk. Math. Samml. **16**, **17**; 2. Differentialresolventen der algebraischen Gleichungen von höherem Range, ebenda **19**) zur Aufstellung der Differentialresolvente für die Gleichung sechsten Grades, welche eine Gruppe 360ster Ordnung besitzt (Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung heisst die lineare Differentialgleichung, deren Integrale sämtlich Wurzeln der Gleichung sind). Resultate von Valentiner [Abh. Copenh. Ak. (6) **5** Nr. 2] und Wiman (Math. Ann. **47**) werden dabei als Hülfsmittel benutzt. (Vergl. auch R. Fricke, Jahresber. d.

Deutsch. Math. Ver., **5**, 55-56.) Als Endresultat der Rechnungen ergiebt sich die Gleichung

$$x^2(x-1)^2v'''+3x(x-1)(2x-1)v''$$
$$+\tfrac{1}{1200}\{8288x^2-8513x+1125\}v'+\{\tfrac{616}{675}x-\tfrac{4389}{4320}\}=0$$

als Differentialresolvente der Gleichung

$$(z^2+x(x-1)^2)^2\left(z^2+\frac{11\pm 3i\sqrt{15}}{2}x(x-1)^2\right)$$
$$=2^4 3^{\frac{9}{4}}5^{-\frac{5}{4}}e^{\pm\frac{\pi i}{4}}x^3(x-1)^3t.$$

Si.

L. Lachtin. Die Differentialresolventen einer algebraischen Gleichung sechsten Grades mit einer Gruppe 360$^{\text{ster}}$ Ordnung. Math. Ann. **51**, 463-472.

In einer Arbeit von 1889 (F. d. M. **21**, 135, 1889) weist H. Valentiner die Existenz einer Collineationsgruppe G_{360} von 360$^{\text{ster}}$ Ordnung nach, die mit der Gruppe gerader Vertauschungen von sechs Elementen isomorph ist.

Der Verf. berechnet hier zunächst die Endformeln der G_{360}, die von Valentiner nicht völlig hergestellt waren.

A. Wiman fand 1897 (F. d. M. **27**, 103, 1897) alle Formen, die gegenüber der G_{360} invariant sind. Die Form niedrigster Ordnung ist eine $F(x_1, x_2, x_3)$ von der Ordnung 6 und vom Geschlecht 10.

Dadurch wurde der Verf. darauf geführt, dass eine Gleichung sechsten Grades mit der G_{360} verbunden sei, deren Wurzeln rationale Functionen der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei singulären Punkten sind.

Der Verf. glaubt darin den Schlüssel zur Lösung von Gleichungen sechsten Grades gefunden zu haben, analog der Lösung der Gleichungen fünften Grades mittels des Ikosaeders. Vergl. dazu die Arbeiten von R. Fricke (F. d. M. **28**, 129, 1897). My.

E. M. Radford. On the solution of certain equations of the seventh degree. Quart. J. **30**, 263-306.

Die Modulargleichung für die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen ist vom achten Grade und besitzt eine Resolvente siebenten Grades. F. Klein hat bereits die Modulargleichung gelöst (Math. Ann. **14**) und gezeigt (Math. Ann. **15**), dass alle durch eine Gruppe von 168 Substitutionen charakterisirten Gleichungen siebenten Grades sich auf dieselbe zurückführen lassen; die Reduction selbst ist von Gordan (Math. Ann. **20** und **25**) geleistet worden. Während Klein's Entwickelungen auf functionentheoretischer Grundlage beruhen, bezweckt der Verf. der vorliegenden Arbeit, ohne Benutzung der Functionentheorie, durch algebraische Methoden, die von Klein gegebene

Form der Modulargleichung abzuleiten, dann die Resolvente siebenten Grades aufzustellen und ihre sieben Wurzeln (ebenso wie Klein) durch drei Parameter auszudrücken. Den Schluss bilden einige geometrische Interpretationen. F.

E. H. Moore. Concerning the general equations of the seventh and eighth degrees. Math. Ann. **51**, 417-444.

Die Arbeit behandelt die Beziehungen der allgemeinen Gleichung achten Grades $F_8(x) = 0$ nach Adjunction der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante und ihrer Totalresolvente 15^{ten} Grades $G_{15}(y) = 0$; ebenso die Relationen der allgemeinen Gleichung siebenten Grades nach Adjunction der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante und ihrer Totalresolvente 15^{ten} Grades $H(z) = 0$. Im Anschluss namentlich an Noether (Math. Ann. **15**) und Jordan (Traité des Substitutions, No. 426, 516) studirt der Verf. die linearen Tripelsysteme $\varDelta_{2^k-1}$ bei 2^k-1 Elementen und die ihnen entsprechende Substitutionengruppe $G^{2^k-1}_{(2^k-1)(2^k-2^1)\dots(2^k-2^{k-1})}$ sowie die 30 Quadrupelsysteme $\square_8$ für acht Elemente und die entsprechenden 30 Substitutionengruppen $G^8_{8.168}$ und beweist, ähnlich wie Jordan, dass die alternirende Gruppe $G^8_{\frac{1}{2}.8!}$ und die lineare homogene Gruppe $LHG^5_{\frac{1}{2}.8!}$ holoedrisch isomorph sind. Von diesem letzteren Satze wird dann noch ein rein gruppentheoretischer Beweis gegeben.

Den Schluss bildet die Verwendung der vorhergehenden Entwickelungen für die Lösung des Kirkman'schen Problems der 15 Schulmädchen. F.

G. Maupin. Note sur le problème d'Adrianus Romanus. Revue de math. spéc. **9**, 3-5.

A. C. Biese. Geometrische Untersuchung über die Wurzeln einer Gleichung von der Form $f(x) = ax + b$. Berlin.

E. Borel. Sur la méthode d'approximation de Laguerre. Darboux Bull. (2) **22**, 11-16.

Laguerre hat (Nouv. Ann. 1880) gezeigt, wie man für eine algebraische Gleichung $f(x) = 0$ mit lauter reellen Wurzeln, von irgend einem Werte x_0 ausgehend, der zwischen zwei Wurzeln liegt, durch Auflösung einer quadratischen Gleichung ein Intervall finden kann, welches x_0, aber keine Wurzel der Gleichung enthält. Die Endpunkte dieses Intervalls sind Näherungswerte für die x_0 benachbarten Wurzeln. Einer Idee Hermite's folgend, giebt Borel in der vorliegenden Note eine Modification des Laguerre'schen Verfahrens, aus welcher hervorgeht, dass, wenn man nur die Werte $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ (aber nicht die Coefficienten von $f(x)$) kennt, das Laguerre'sche Intervall das grösste mit den erwähnten Eigenschaften ist, das man auffinden kann.

F.

A. Sommerfeld. Ueber die numerische Auflösung transcendenter Gleichungen durch successive Approximationen. Gött. Nachr. 1898, 360-369.

Die Gleichung $x \log \text{nat}\, x = a$ besitzt, wenn $a < -1/e$, keine reelle, wenn $-1/e < a < 0$, zwei reelle, und wenn $a > 0$, eine reelle Wurzel.

Im Falle $-1/e < a < 0$ werden die Wurzeln als Grenzwerte einer Reihe $x_1, x_2, x_3, \dots$ dargestellt, deren Glieder für die kleinere Wurzel durch $x_1 = -a$, $x_2 \log(1/x_1) = -a$, $x_3 \log(1/x_2) = -a, \dots$, und für die grössere durch $\log(1/x_1) = -a$, $x_1 \log(1/x_2) = -a$, $x_2 \log(1/x_3) = -a, \dots$ zu bestimmen sind.

Ist $a > 0$, so findet man die Wurzel als Grenzwert ähnlich zu bildender Reihen, deren Glieder aber, abweichend vom ersten Fall, sich der gesuchten Wurzel abwechselnd von beiden Seiten nähern.

Schliesslich wird noch erörtert, in wie weit die Entwicklungen auch für die allgemeinere Gleichung $f(x)\varphi(x) = a$ Gültigkeit behalten.

F.

E. M. Lémeray. Sur le calcul des racines des équations par approximations successives. Nouv. Ann. (3) **17**, 534-539.

Eine auf die Form $f(x) = x$ gebrachte Gleichung kann bekanntlich durch successive Annäherungen gelöst werden, indem man, mit α einen Näherungswert bezeichnend, $f(\alpha) = \beta$, sodann $f(\beta) = \gamma$ u. s. w. bildet. Unter gewissen Bedingungen convergirt diese Reihe gegen eine Wurzel der Gleichung. Um die Convergenz zu vergrössern, führt Lémeray statt der vorgelegten Gleichung die andere $\varphi(x) = x + h(x - f(x))$ ein und bestimmt die Constante h so, dass die Näherungsmethode möglichst schnell zum Ziele führt. F.

W. Heymann. Ueber die elementare Auflösung transcendenter Gleichungen. Hoffmann Z. **29**, 1-15.

Die Methode der „An- und Umläufe“, die der Verf. im J. für Math. **113**, 267-302, sowie in Schlömilch Z. **39**, 162-182, 193-202, 257-272, 321-354 (vergl. F. d. M. **25**, 154-155, 1894) entwickelt hat, wird jetzt graphisch skizzirt und auf die Lösung transcendenter Gleichungen angewandt, während früher hauptsächlich algebraische Gleichungen berücksichtigt waren. Weitere Bemerkungen beziehen sich auf die Berechnung der Wurzeln trinomischer Gleichungen durch wiederholte Wurzelausziehungen, „Kettenwurzeln“ genannt. Alle Betrachtungen werden an Beispielen erläutert. Lp.

E. Bortolotti. Sulla convergenza degli algoritmi periodici e sulla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche. Bologna: Civelli. 13 S. 8°.

R. Mehmke. Ueber einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern. Schlömilch Z. **43**, 338-340.

Der Apparat, welcher 1893 in München ausgestellt war und als räumliche Verallgemeinerung der Abacusse von d'Ocagne angesehen werden kann, beruht auf der Ueberlegung, dass, wenn man sich vier beliebige Curven im Raume mit bezifferten Einteilungen versehen denkt, die Zahlenwerte t, u, v, w, die zu vier Teilpunkten, von denen jeder auf einer andern Curve liegen soll, gehören, eine bestimmte Gleichung $F(t, u, v, w) = 0$ erfüllen, damit jene Punkte in derselben Ebene liegen, und dass, wenn von einem dieser Gleichung genügenden Wertsysteme drei Werte, z. B. u, v, w, gegeben sind, der vierte Wert, t, sich geometrisch dadurch finden lässt, dass man die zu den Werten u, v, w gehörigen Punkte der betreffenden Scalen durch eine Ebene verbindet und den am Schnittpunkte derselben mit dem Träger der vierten Scala stehenden Wert abliest. Bei dem beschriebenen Apparate sind drei der Curven parallele gerade Linien, die vierte eine auf einer Cylinderfläche liegende Raumcurve. F.

M. d'Ocagne. Nomographie. Une leçon sur les diagrammes cotés ou abaques. J. de l'Éc. Pol. (2) **4**, 205-225.

In dieser Abhandlung, die zur Einleitung einer Vorlesung an der École des Ponts et Chaussées bestimmt ist, werden nochmals die Principien der graphischen Methoden auseinandergesetzt, über welche in diesem Jahrbuch schon wiederholt berichtet worden ist (F. d. M. **23**, 1251, 1891 und **28**, 101, 1897). F.

M. d'Ocagne. Résumé d'un Mémoire sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés. S. M. F. Bull. **26**, 53-55.

Résumé der Abhandlung Acta Mathematica **21**, 301, über welche bereits in F. d. M. **28**, 101, 1897 berichtet worden ist. F.

M. d'Ocagne. Sur les types les plus généraux d'équations représentables par trois systèmes de cercles ou de droites cotés. Application aux équations quadratiques. Schlömilch Z. **43**, 269-276.

Aus den Gleichungen dreier Scharen von Kreisen $f_1(x, y, \alpha_1) = 0$, $f_2(x, y, \alpha_2) = 0$, $f_3(x, y, \alpha_3) = 0$ (x, y sind als cartesische Coordinaten aufzufassen; die Coefficienten von f_1, f_2, f_3 sind resp. irgend welche Functionen der Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) eliminirt der Verf. x, y und gewinnt dadurch die allgemeinste Gleichung zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die durch einen aus drei Kreisscharen bestehenden Abacus gelöst werden kann. Das Resultat wird für den Fall specialisirt, dass zwei der Kreisscharen in Scharen gerader Linien übergehen, und die Frage

gelöst, unter welcher Bedingung die resultirende Gleichung von der zweiten Dimension in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wird. Vgl. hierzu F. d. M. **27**, 73, 1896. F.

E. Duporcq. Sur la théorie des abaques à alignements. C. R. **127**, 265-268.

E. Duporcq. Sur la théorie des abaques à alignements. Darboux Bull. (2) **22**, 287-291.

Eine Gleichung $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ kann durch einen aus drei Systemen isoplether Punkte gebildeten Abacus gelöst werden, wenn sie sich als Resultante dreier in x, y linearen Gleichungen $xf_i(\alpha_i)+y\varphi_i(\alpha_i)+\psi_i(\alpha_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ darstellen, also auf die Form

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0$$

bringen lässt. Die von d'Ocagne mehrfach angeregte Frage, welchen Bedingungen $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ unterworfen sein muss, um sich in dieser Determinantenform darstellen zu lassen, beantwortet Duporcq in den beiden Arbeiten und giebt auch, im Falle dass die Bedingungen erfüllt sind, den Weg an, um F in die Determinante überzuführen. F.

M. d'Ocagne. Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés. C. R. **126**, 397-400.

M. d'Ocagne. Application de la méthode nomographique la plus générale, résultant de la superposition de deux plans, aux équations à trois et à quatre variables. S. M. F. Bull. **26**, 16-43.

Um Gleichungen zwischen beliebig vielen Grössen graphisch zu lösen, versieht d'Ocagne jeden Punkt und jede Curve seiner Abacusse mit mehreren Zahlenwerten („cote") und legt zwei Ebenen mit ihren Punkt-, resp. Curvenscharen auf einander. Die relative Lage der beiden Ebenen ist durch drei Bedingungen bestimmt, z. B. durch das Liegen dreier, verschiedenen Systemen angehörigen Punkte des einen Abacus auf je einer von drei Curven des andern. Zeigt sich nun, dass bei dieser bestimmten Lage der beiden Ebenen noch ein Punkt des ersten Abacus auf einer Curve des zweiten sich befindet, so besteht zwischen den „cotes" der vier Punkte und der vier Curven eine Gleichung, die durch unmittelbares Ablesen aus der Figur gelöst werden kann. Eine grosse Anzahl schon bekannter Verfahren zur graphischen Auflösung von Gleichungen zwischen drei und vier Variabeln lassen sich als Specialfälle dieser allgemeinen Methode nachweisen. F.

P. A. MacMahon. Solution du problème de partition d'où résulte le dénombrement des genres distincts d'abaques relatifs aux équations à n variables. S. M. F. Bull. **26**, 57-64.

Die Frage, wieviel Arten von Abacussen auf Gleichungen zwischen n Variabeln anwendbar sind, hat d'Ocagne auf die Aufgabe geführt, festzustellen, auf wieviel Arten man die gegebene Zahl n als Summe von acht positiven ganzen Zahlen (die Null eingeschlossen)

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \end{matrix}$$

darstellen kann, wobei zwei Lösungen nur dann als verschieden betrachtet werden, wenn sie nicht durch Vertauschung der beiden Zeilen oder zweier Colonnen in einander übergehen. D'Ocagne hat diese Aufgabe MacMahon vorgelegt, welcher in der vorliegenden Arbeit die gesuchte Zahl als Coefficienten eines gewissen Gliedes in der Entwicklung einer erzeugenden Function nach Potenzen der Variable bestimmt. F.

M. d'Ocagne. Sur les questions de mathématiques pures que soulève l'étude de la nomographie. Darboux Bull. (2) **22**, 177-180.

Das Studium der Nomographie führt im wesentlichen auf die folgenden drei Probleme aus der reinen Mathematik:

1. die verschiedenen Arten graphischer Darstellung zu finden, die auf eine Gleichung mit einer gegebenen Anzahl von Variabeln anwendbar sind;

2. die partiellen Differentialgleichungen zu ermitteln, denen die linke Seite einer beliebig gegebenen Gleichung genügen muss, damit sie auf eine Form gebracht werden kann, die einer bestimmten Darstellungsart entspricht;

3. wenn für die bei einer Darstellungsform auftretenden willkürlichen Functionen Polynome von einem bestimmten Grade gesetzt werden, die Coefficienten dieser Polynome so zu berechnen, dass durch den Abacus eine gegebene Gleichung graphisch gelöst wird. F.

M. d'Ocagne. 1. Rapport sur un mémoire de M. Goedseels intitulé: Les abaques à transversales. 2. Sur les abaques à points cotés pour les équations à trois et à quatre variables. Brux. S. sc. **22** A, 75-76, 78-82.

Der Verf. giebt eine Klassificirung aller Abacusse dieser Art. Goedseels hat die sechs Arten ermittelt, die nur cotirte Punkte mit einer Cote gestatten. Mn. (Lp.)

E. Goedseels. Sur un nouveau genre d'abaques. Brux. S. sc. **22** A, 43-44, 77-78.

M. d'Ocagne. Sur quelques applications pratiques de la méthode des points cotés. Revue gén. des Sc. **9**, 116-119.

R. Dedekind. Sur les équations à coefficients rationnels. (Traduction de M. L. Laugel.) Nouv. Ann. (3) **17**, 201-204.
Aus Deutscher Math. Ver. **1**; F. d. M. **24**, 89, 1892.

V. Giriodi. Applicazioni delle principali teoriche algebriche. Torino. 12 S. 8°.

Kapitel 2.
Theorie der Formen (Invariantentheorie).

H. Andoyer. Théorie des formes algébriques. Paris: Gauthier-Villars. 184 S. 4°.

Diese, speciell für die „Candidats à l'Agrégation des sciences mathématiques" geschriebene und in lithographirter Form vorliegende Monographie will nur die Elemente der Formentheorie behandeln und soll zugleich ein Vorläufer eines umfassenderen Werkes über denselben Gegenstand sein. Es ist dem Verf. gelungen, eine Reihe der wichtigsten Sätze in klarer Darstellung vorzuführen und ihre Anwendbarkeit auf die Geometrie durch passende Beispiele zu erläutern.

Der erste Abschnitt behandelt die binären Formen in der Beschränkung auf die der ersten vier Grade und die bilineare Form der zweite Abschnitt die ternären Formen in der noch weiter gehenden Beschränkung auf die linearen, quadratischen und bilinearen.

Der Verf. hat sich bemüht, sowohl der unsymbolischen, wie der symbolischen Methode gerecht zu werden. Es steht zu hoffen, dass durch diese sich zwar in engeren Grenzen haltende, aber den Leser über die Grundlagen der Theorie orientirende Monographie das Studium der projectiven Invarianten in Frankreich sich lebendiger entwickeln möge als bisher. My.

C. Reuschle. Constituententheorie, eine neue, principielle und genetische Methode zur Invariantentheorie. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 123-140.

J. Sylvester hat (Cambr. and Dublin Math. Journ. **6**, 1851, 290) vorgeschlagen, sämtliche invariante Bildungen einer oder mehrerer gegebenen Urformen als „Concomitanten" der letzteren zu bezeichnen. Der Verf. schlägt zweckmässigerweise die Abkürzung „Comitanten" vor, die denn auch der Referent in seinem Invariantenartikel (IB 2) der Math. Encyklopädie (1899) adoptirt hat. Wenn hingegen der Verf. noch weitergeht, und den seit Gauss allgemein angenommenen Namen „Form" für „ganze, homogene, algebraische Function" verwirft, um wieder „Function" dafür zu setzen, so möchte der Ref. entschiedene Verwahrung dagegen einlegen. Gerade das Wort Form zeigt unmittelbar an, dass es sich hier nicht um functionentheoretische Eigenschaften der zu Grunde liegenden speciellen Functionen handelt, sondern eben um „formale";

wenn der Verf. aber betont, dass es misslich sei, von den verschiedenen „Formen“ einer Form zu sprechen, so brauchte er sich nur, wie es zumeist geschieht, des Ausdrucks „Gestalten“ (z. B. kanonische Gestalt einer Form u. s. f.) zu bedienen.

Der Ref. würde derartige Einzelheiten hier kaum hervorheben, wenn es ihm nicht schiene, als ob überhaupt der Verfasser auf Aeusserlichkeiten in Benennungen und Bezeichnungen ein viel zu grosses Gewicht legte.

Die Methode des Verf. beruht darauf, aus den Euler'schen Grundformeln für homogene Formen nebst ihren dualistischen durch blosse Combinirungen und Eliminationen zu invarianten Bildungen zu gelangen.

Sei $f(x_1, x_2, x_3) = f$ eine Ternärform n^{ter} Ordnung,

$$f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

so gilt: (1) $f_i = f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + f_{i3}x_3$.

Ist Φ die Determinante der f_{ik} und F_{ik} deren Unterdeterminante des Elementes f_{ik}, so ergiebt sich Formel (2) $\Phi(ux) = F_1 f_1 + F_2 f_2 + F_3 f_3$, wo (3) $F_i = F_{i1}u_1 + F_{i2}u_2 + F_{i3}u_3$, und hieraus das zu (1) analoge Formelsystem: (1ª) $\Phi u_i = f_{i1}F_1 + f_{i2}F_2 + f_{i3}F_3$.

Andererseits ist f selbst als quadratische Form schreibbar:

(4) $$f = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + \cdots.$$

Indem man so fortfährt und die erhaltenen Identitäten teils combinirt, teils aus ihnen je nachdem die x_i, u_i, f_i, f_{ik}, F_i, F_{ik} etc. eliminirt, ergiebt sich eine grosse Anzahl von Invarianten, Covarianten und Contravarianten. Als Musteraufgabe behandelt der Verf. die Aufstellung des Gordan'schen vollen Systems zweier Ternärformen f, g zweiter Ordnung auf seinem Wege. Wenn der Verf. als Vorzug seiner Methode rühmt, dass der Schüler so mit verhältnismässiger Geschwindigkeit zu einem grossen Kreise invarianter Bildungen gelange, ohne noch zu wissen, was eigentlich invariant ist, so hat diese Methode doch ihre Grenzen; denn an einem gewissen Punkte ist er doch genötigt, die Invarianz hinterher zu verificiren.

Dass dieses empirische Verfahren für theoretische Fragen nicht ausreicht, kann man gerade an dem erwähnten Beispiele des Systems der Formen f, g ersehen: der Ref. hält es für unmöglich, auf dem Wege des Verf. zu erweisen, dass das erhaltene System in der That ein vollständiges ist. Der Verf. möge versuchen, mit seiner Methode ein volles System von m quadratischen Ternärformen aufzustellen. Ueberdies ist die Anwendbarkeit der Methode, wenn man von den ersten Elementen absieht, wesentlich — mit Rücksicht auf die Natur der Hesse'schen Form — auf quadratische Formen beschränkt, trotz der gegenteiligen Versicherung des Verf. My.

G. Pick. Zur Theorie der zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Formen. Math. Ann. **50**, 381-397.

Der Verf. beschäftigt sich seit längerer Zeit mit einer Theorie der Formen beliebigen Geschlechts. In einer kurzen Note (F. d. M. **25**, 169, 1894) hatte er in diesem Sinne für die „nirgends singulären“ Differentialgleichungen zweiter Ordnung (die für hyperelliptische Gebilde in kanonischer Gestalt bereits von F. Klein [F. d. M. **23**, 337, 1891] untersucht waren) die correcte Gestalt mitgeteilt, die keinerlei beschränkende Voraussetzung über die Darstellungsform des vorgelegten Gebildes machte.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitte werden die Ueberschiebungsprocesse für algebraische Gebilde überhaupt allgemein definirt und untersucht; im zweiten Abschnitte folgen explicite Ausführungen für binär gegebene algebraische Gebilde.

Auf einem irgendwie definirten algebraischen Gebilde vom Geschlecht p denke man sich, etwa nach Ritter (F. d. M. **25**, 723, 1894), eine der ∞^{3p-3} nirgends singulären „automorphen“ Variabeln η ausgewählt.

Dann lässt sich $\eta = \xi_2/\xi_1$ so als Bruch darstellen, dass ξ_1, ξ_2 nirgends singulär sind und bei Periodenwegen lineare homogene unimodulare Umsetzungen erfahren. Dann ist $(\xi d\xi) = d\omega = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1$ eine überall endliche und von Null verschiedene Differentialform der Art, dass sie sich bei Periodenwegen nicht ändert; die ξ_1, ξ_2 werden den Formen des Gebietes als unabhängige Variabeln zu Grunde gelegt.

Nach Anleitung der Invariantentheorie construirt nun der Verf. auf Grund geeigneter Differentiationsprocesse die k^{te} „Ueberschiebung“ $(A, B)_k$ zweier Formen A, B des Gebietes; dann zeigt sich die functionentheoretische Invarianteneigenschaft der Bildung $(A, B)_k$ darin, dass, wenn vermöge eindeutiger Transformation das Gebilde in ein anderes, die Formen A, B dabei in A', resp. B' übergehen, die nämliche Transformation die Form $(A, B)_k$ in $(A', B')_k$ verwandelt.

Die Grundlage alles Folgenden bildet die erste Ueberschiebung, die als Functionaldeterminante eingeführt wird. Bedeuten α, β die Grade von A, B, so ist

$$(A, B)_1 = \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial B}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial B}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}.$$

Diese ersten Ueberschiebungen sind, abgesehen von constanten Factoren, von der getroffenen Auswahl der ξ_1, ξ_2 unabhängig; „ganze unverzweigte“ Formen haben ebensolche erste Ueberschiebungen u. s. f.

Der Begriff der ersten Ueberschiebung wird zunächst auf verwandte Bildungen ausgedehnt. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_r$ Formen resp. von den Graden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, und setzt man

$$A_{ik} = \frac{1}{\alpha_i(\alpha_i - 1)\cdots(\alpha_i - r + 2)} \frac{\partial^{r-1} A_i}{\partial \xi_1^{\,k-1}\, \partial \xi_2^{\,r-k}},$$

so ist $(A_1, A_2, \ldots, A_r)_1 = |A_{i,k}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$
eine invariante Bildung, die sich analog wie die erste Ueberschiebung zweier Formen ausdrücken lässt.

Die Erweiterung auf zweite und höhere Ueberschiebungen wird dadurch sehr erleichtert, dass diese im wesentlichen auf eine einzige zweite Ueberschiebung zurückkommen. Denn jede Ueberschiebung von höherem Index als 2 lässt sich rational durch wiederholte erste und zweite Ueberschiebungen darstellen, und die zweiten Ueberschiebungen beliebiger Formen lassen sich durch eine einzige zweite Ueberschiebung zweier beliebig auszuwählenden Formen, sowie durch erste Ueberschiebungen rational ausdrücken.

Die zweite Ueberschiebung $(A, B)_2$ wird zuerst für $A = 0$, dann für $B = 0$ definirt, und hieraus wird der allgemeine Fall zusammengesetzt. Im übrigen muss auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden. My.

M. Rabut. Théorie des invariants universels. J. de l'Éc. Pol. (2) **4**, 137-203.

Der Verf. betont im Eingange, dass die moderne Theorie der Invarianten einer Transformationsgruppe ihre Quelle in der Geometrie hätte, und dass sie durch ihre Verpflanzung in das Gebiet der Analysis viel von ihrer ursprünglichen Allgemeinheit eingebüsst habe.

Denn bei der analytischen Behandlung hat man sich im wesentlichen auf zwei grosse Kategorien von Invarianten beschränkt, einmal auf die projectiven, sodann auf die der Differentialinvarianten. Die zu den projectiven Invarianten gehörigen Gruppen sind ihrer Natur nach sehr speciell. Was die Differentialinvarianten angeht, so hat man nur solche betrachtet, in deren Ausdruck die Coordinaten und die Differentiale eines einzelnen Linien-, resp. Flächenelements eingehen. Indessen ist ein einzelnes solches Element offenbar nicht im Stande, eine Figur auch nur in der Umgebung eines ihrer Punkte zu charakterisiren. Im Gegenteil ist hier eine beliebige Anzahl von Elementen oder, wie der Verf. sagt, ein „Elementbündel" möglich, deren jedes seine specifischen Differentiale besitzt; zudem können die zu verschiedenen Punkten gehörigen Elementbündel ganz unabhängig von einander sein.

Dem Verfasser bedeutet der Begriff „Figur" ein allgemeinstes System von Linien- und Flächenelementen.

Eine „Transformation" ist ein System irgend welcher Relationen zwischen den Elementen zweier Figuren; „Invariante" eine bei der Transformation unverändert bleibende, im übrigen willkürliche Function der Coordinaten und der Differentialelemente: zum Unterschiede von den bisher betrachteten specielleren Invarianten fügt der Verf. das Epitheton „universell" hinzu (s. F. d. M. **24**, 109, 1892).

Treten in den Ausdruck einer Invariante nur Punktcoordinaten (nebst ihren Ableitungen) ein, so heisst sie (wie bei Lie) „Punktinvariante". Ein Hauptsatz sagt aus, dass die Punktinvarianten in

allen Räumen von zwei Dimensionen dieselben sind; insbesondere sind sie also vom euklidischen Postulat unabhängig. Die fraglichen Punktinvarianten werden nach der Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung in Ordnungen eingeteilt, und, von unten beginnend, werden die einzelnen Ordnungen durch Typen charakterisirt und geometrisch interpretirt. Die Leser seien auf die gedankenreiche Abhandlung besonders hingewiesen. My.

P. Medolaghi. Sopra la forma degli invarianti differenziali. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 145-149.

In einer vorjährigen Arbeit (F. d. M. **28**, 305, 1897) hat der Verf. gezeigt, dass sich die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer continuirlichen Gruppe auf die Form bringen lassen:

$$(1)\qquad J_k\left\{\omega_1(y_1,\dots,y_n),\ \dots,\ \omega_m(y_1,\dots,y_n),\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \dots\right\} = \omega_k(x_1,\ \dots,\ x_n).$$

Die Functionen ω (durch deren Variirung alle mit (1) ähnlichen Gruppen hervorgehen) heissen die „charakteristischen Functionen“ der Gruppe.

Durch Verallgemeinerung der eingeschlagenen Methode erhält der Verf. die Resultate:

„In den Differentialinvarianten einer continuirlichen Gruppe treten die abhängigen und unabhängigen Variabeln nur unter den charakteristischen Functionen auf.

Betrachtet man die partiellen Ableitungen und die charakteristischen Functionen als Argumente der Differentialinvarianten, so sind die letzteren die Invarianten (der Ordnung Null) von intransitiven Gruppen einer gewissen Zusammensetzung.“ My.

Miss A. L. MacKinnon. Concomitant binary forms in terms of the roots. Annals of Math. **12**, 95-109.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **26**, 141, 1895) hatte die Verfasserin eine „Wurzelsymbolik“ entwickelt, die erlaubt, In- und Covarianten von binären Formen, die in der üblichen symbolischen Gestalt geschrieben sind, unmittelbar durch die Wurzeln der Urformen auszudrücken. Die als Anwendung damals in Aussicht gestellte Tabelle von In- und Covarianten wird hier insoweit realisirt, als die irreducibeln In- und Covarianten der Formen von der Ordnung incl. 6, und der Paare von Formen der Ordnung incl. 4, in übersichtlicher Gestalt angeordnet, mitgeteilt werden. Es wäre sehr wünschenswert, dass diese für den praktischen Invariantenrechner überaus nützlichen Tabellen in einer in Deutschland leichter zugänglichen Zeitschrift veröffentlicht würden.

My.

L. Berzolari. Sulle spinte formate con potenze di una forma binaria quadratica. Palermo Rend. **12**, 258-259.

P. Gordan. Auszug aus einem Schreiben an Herrn L. Berzolari. Palermo Rend. **12,** 326-328.

Sei f eine binäre quadratische Form, $A = (f, f)^2$ ihre Invariante. Gelegentlich einer invariantiven Darstellung der Discriminante einer binären Form siebenter Ordnung, hat Gordan (F. d. M. **20,** 126, 1888) auf Grund der „Clebsch-Gordan'schen" Reihenentwickelung für die zweite Ueberschiebung der Potenzen f^λ, f^μ den Ausdruck gegeben:

$$(f^\lambda, f^\mu)^2 = \frac{\lambda+\mu-1}{(2\lambda-1)(2\mu-1)} \cdot A \cdot f^{\lambda+\mu-2}$$

und bemerkt, dass man, successive fortschreitend, zu einer entsprechenden Formel für die $(2\varrho)^{te}$ Ueberschiebung $(f^\lambda, f^\mu)^{2\varrho}$ gelangen würde. Der Verf. stellt zuerst fest, dass die fragliche Ueberschiebung sich von $A^\varrho f^{\lambda+\mu-2\varrho}$ nur um einen Zahlenfactor unterscheiden kann, und bestimmt dann diesen Factor direct durch einen Differentiationsprocess und nachherige Specialisirung $f = x_1 x_2$. Als Nebenproduct ergiebt sich hierbei die bemerkenswerte Relation:

$$\sum_i \frac{(-1)^i \binom{2\varrho}{i}}{(\lambda-i)!\,(\mu-i)!\,(\lambda-2\varrho+i)!\,(\mu-2\varrho+i)!} = \frac{(-1)^\varrho \binom{\lambda+\mu-\varrho}{\varrho}(2\varrho)!}{\lambda!\,\mu!\,(\lambda-\varrho)!\,(\mu-\varrho)!}.$$

Gordan leitet die letztere auf einem directen Wege combinatorischer Natur ab. My.

L. Berzolari. Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du faisceau syzygétique déterminé par la jacobienne. Math. Ann. **51,** 473-477.

In der Arbeit von O. Bolza „Ueber die kubische Involution ..." (s. das Referat in diesem Jahrgange) wird (in § 2) eine transcendente Lösung (d. h. durch elliptische Functionen) sowie eine analytisch-geometrische (in § 6) des Problems gegeben, alle kubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu finden.

Der Verf. löst hier die Frage durch einen rein algebraischen Process. Der Kern besteht in dem Satze, dass es im allgemeinen vier Büschel binärer kubischer Formen giebt, für die eine particulare Form des durch die Jacobiana des Büschels bestimmten syzygetischen Büschels mit einer gegebenen Form zusammenfällt.

Die explicite Ausführung wird nach invariantentheoretischer Methode geleistet. Der Fall bei Bolza entspricht einer speciellen Wahl der erwähnten particularen Form. My.

F. de Astis. Sulla derivabilità di un sistema di forme binarie da un' unica forma, con applicazione al sistema di due cubiche binarie. Batt. G. **36,** 161-171.

Seit Clebsch hat man sich vielfach damit beschäftigt, zwei binäre kubische Formen in der Weise „typisch" darzustellen, dass sie als erste partielle Ableitungen einer biquadratischen Form erscheinen. Der Verf. behandelt diese Aufgabe, indem er in erster Linie die Natur der Substitution untersucht, die die fragliche Ueberführung leistet. Es gelingt ihm das derart, dass er die Methode auf die analoge Aufgabe für eine Reihe binärer Urformen der n^{ten} Ordnung ausdehnen kann. Bezüglich der Litteratur, die dem Verf. nur unvollkommen bekannt gewesen ist, sei auf den Artikel IB2 No. 7 des Referenten in der Math. Encyklopädie verwiesen. My.

E. Lacour. Représentation géométrique de l'invariant absolu et des covariants d'une forme biquadratique. Nouv. Ann. (3) **17,** 341-351.

Die Untersuchung stützt sich auf die Betrachtung eines „Normkegelschnitts" N_2, wie ihn Referent (F. d. M. **15,** 510, 1883) wohl zuerst systematisch eingeführt hat.

Ist die gegebene Form: (1) $f = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$, so setze man (2) $X = x^2$, $Y = 2x$, und man erhält f repräsentirt durch vier Punkte des durch (2) dargestellten Kegelschnitts N_2. Die ausführliche, auf demselben Grunde beruhende Untersuchung von K. Geiger (F. d. M. **22,** 141, 1890) scheint dem Verf. unbekannt geblieben zu sein. My.

F. Brioschi. Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine. Annali di Mat. (2) **26,** 255-259.

Von Gordan (F. d. M. **20,** 126, 1888) rührt eine Darstellung der Discriminante ϑ einer binären Form f siebenter Ordnung her, die ϑ durch Invarianten von f ausdrückt.

Der Verf. leitet das Ergebnis auf einem directeren Wege her. Das Verfahren beruht auf einer Methode, die er früher angegeben hat (F. d. M. **27,** 89, 1896), und die hier erlaubt, eine Invariante von f als ganze rationale Function von Covarianten und Invarianten einer Form fünfter Ordnung herzustellen. My.

Brynolf Holmqvist. Ueber Beziehungen zwischen binären und ternären Formensystemen. Diss. Lund. 24 S.

Die von Burnside (Quart. J. **10,** 1869) und Salmon (Algebra der linearen Transformationen) angesetzten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den Invarianten und Covarianten binärer Formen und denjenigen ternärer Formenpaare werden vom Verf. weiter verfolgt

und verallgemeinert. Wegen des Näheren muss auf die Abhandlung selbst hingewiesen werden. Bdn.

A. R. Forsyth. An essay towards the generating functions of ternariants. Lond. M. S. Proc. **29,** 487-517.

Sylvester und Cayley (F. d. M. **9,** 76f., 1877; **10,** 82f., 1878; **11,** 81f., 1879) haben eine Theorie der „erzeugenden Functionen" für binäre Formen begründet, die erlaubt, (unter gewissen Einschränkungen) ein zugehöriges System von Grundformen aufzustellen, ferner die zwischen den letzteren bestehenden Syzygien u. a. Dieselben haben auch schon vereinzelte Fälle von ternären Formen in Betracht gezogen.

Der Verf. will in diesem Sinne die ternären Formen C_n (deren invariante Gebilde Ternarianten heissen) systematisch untersuchen; als Beispiel giebt er die vollständige Ausführung für eine C_2 und die bis zu einem gewissen Grade vollständige Ausführung für eine C_3.

Da die ganze Theorie darauf beruht, dass nach Cayley eine Ternariante durch ihr Leitglied (den Coefficienten der höchsten Potenz von x_1 und u_1) bestimmt gedacht wird, so tritt eine Schwierigkeit dadurch ein, dass die „universale" Ternariante $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ das Leitglied 1 besitzt, dass also das Leitglied einer Ternariante das nämliche bleibt, wenn die letztere noch mit einer Potenz von u_x multiplicirt wird. Als wesentliches Hülfsmittel dient die Untersuchung des Gewichts der Concomitanten. Um hier die einfachsten Gesetze zu finden, legt der Verf., wenn symbolisch

$$a_x^n u_\alpha^\nu = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^\nu,$$

x_1 und α_1, wie u_3 und a_3 ein beliebiges Gewicht ϱ bei, weiterhin u_2 und a_2 das Gewicht $\varrho - 1$, u_1 und a_1, wie x_3 und α_3 das Gewicht 0, endlich x_2 und α_2 das Gewicht 1.

Sodann werden, wenigstens für ternäre Formen a_x^n, numerische erzeugende Functionen vollständig aufgestellt. Dass die Lösungen gewisser dabei benötigter diophantischer Gleichungen linear unabhängig sind, kann wie im Falle der binären Formen nachgewiesen werden. Eine explicite Ausführung wird für $n = 2$ und $n = 3$ gegeben, die bez. erzeugenden Functionen werden in Tabellenform übersichtlich dargestellt.

Für die Abzählungsmethoden der englischen Algebraiker ist die vorliegende Arbeit als ein wesentlicher Beitrag anzusehen. My.

A. Brill. Ueber die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren. Math. Ann. **50,** 157-182.

Es liege die Ternärform, nach Potenzen einer der Variabeln angeordnet, vor: (1) $f(t) \equiv t^n + t^{n-1} f_1 + t^{n-2} f_2 + \cdots + t f_{n-1} + f_n$, wo f_i eine Binärform i^{ter} Ordnung in x, y ist.

Die n binären Linearfactoren $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ von f_n seien von einander verschieden. Es soll das Kriterium dafür aufgestellt werden,

dass (1) in lauter Linearfactoren zerfällt:

$$(2) \qquad f(t) \equiv (t-\varrho_1 \psi_1)(t-\varrho_2 \psi_2) \cdots (t-\varrho_n \psi_n)$$

(wo das Product der Constanten ϱ gleich $(-1)^n$ ist).

Die Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte: im ersten werden gewisse Gleichungen zwischen den Coefficienten der f_i hergeleitet, die erfüllt sein müssen, falls (2) bestehen soll; im zweiten Abschnitt wird gezeigt, dass diese Bedingungen auch umgekehrt das Bestehen von (2) gewährleisten.

Drückt man in bekannter Weise die Summen s_ν $(\nu \geqq n)$ der ν^{ten} Potenzen der Wurzeln von $f(t)=0$ durch die Coefficienten f_i aus, wodurch die s_ν Binärformen ν^{ter} Ordnung in x, y werden, so ergiebt sich zunächst, dass die Gleichungen

$$(3) \qquad (s_\nu, f_n)_n = 0 \quad (\nu = n, n+1, n+2, \dots \text{ in inf.})$$

erfüllt sind, wenn f in Linearfactoren zerfällt; hierbei bedeutet $(s_\nu, f_n)_n$ die n^{te} Ueberschiebung von s_n über f_n.

Es giebt indessen noch Bedingungsgleichungen von niedrigerem Gewicht. Zu solchen gelangt man, wenn man sich des Poisson-Liouville'schen Princips bedient, an Stelle von t in $f(t)$ den Ausdruck

$$(4) \qquad t+\varphi = t+px+qy \qquad (p, q \text{ Unbestimmte})$$

einzuführen, wodurch $f(t)$ übergehe in

$$(5) \quad f(t+\varphi) \equiv F(t) \equiv t^n + t^{n-1}F_1 + t^{n-2}F_2 + \cdots + t^n F_n.$$

Die Zerfällbarkeit von $f(t)$ bedingt die von $F(t)$, und umgekehrt.

An die Stelle der s_ν treten jetzt die Binärformen:

$$(6) \quad S_\nu = s_\nu - \binom{\nu}{1}\varphi s_{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\varphi^2 s_{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu n\varphi^\nu.$$

Somit liefert die Gleichung

$$(7) \qquad (S_\nu, F_n)_n = 0 \qquad (\nu \geqq n)$$

weitere Bedingungsgleichungen für die Zerfällbarkeit von $f(t)$.

Die aus ihnen für alle Werte von p, q und x, y sich ergebenden unbegrenzt vielen Relationen bilden das gewünschte Gleichungssystem.

Für das Weitere ist ihre allgemeine invariantive Darstellung erforderlich; es gelingt, sie zu (identisch verschwindenden) simultanen Covarianten der f_i zusammenzufassen. Umgekehrt zieht deren Bestehen wieder (7) nach sich. Dabei ist zu beachten, dass sich unter den erhaltenen Bedingungsgleichungen einige befinden, die in Wirklichkeit keine Bedingung für das Zerfallen von $f(t)$ liefern, da sie für jede beliebige Ternärform identisch erfüllt sind.

Um nunmehr den eingeschlagenen Gang umzukehren, bedient sich der Verf. eines allgemeinen Satzes von Hilbert (F. d. M. **22**, 133, 1890), wonach die erhaltenen, unbegrenzt vielen Relationen sich aus einer begrenzten Anzahl derselben linear zusammensetzen lassen müssen: die letzteren bilden dann die hinreichende Bedingung für das Zerfällen von $f(t)$.

Die fraglichen Bedingungsgleichungen sind zunächst binärer Natur; man könnte indessen von da vermöge eines bekannten, auf Ränderung symbolischer Determinanten beruhenden Uebertragungsprincipes von Clebsch zu ternären Relationen übergehen. Der Verf. zieht es jedoch vor, mit den binären Bildungen zu operiren, und gelangt auf einem nicht mühelosen Wege zu dem Ergebnis, dass das oben erwähnte, in x, y identische Gleichungssystem, für $n, n+1, \dots, 3n-3$ gebildet, von $3(n-1)^3$ Relationen zwischen den Coefficienten der f_i, die Zerfällung der Ternärform $f(t)$ in Linearfactoren gewährleistet. My.

M. Pannelli. Sopra alcuni significati geometrici degli invarianti del connesso ternario di primo grado. Batt. G. **36,** 81-99.

Clebsch und Gordan (F. d. M. **2**, 62, 1869), M. Pasch (ib. **16,** 728, 1884), J. Kraus (ib. **18,** 661, 1886) haben für eine Reihe von Invarianten des ternären Connexes der ersten Ordnung und Klasse geometrische Bedeutungen angegeben. Das Studium der projectiv zugeordneten Kegelschnitte, die den Punkten und Geraden einer Ebene, in der der Connex gedeutet wird, entsprechen, gestattet dem Verf., noch weitere Invarianten des Connexes geometrisch zu interpretiren. My.

E. v. Weber. Ueber Scharen von Bilinearformen. Münch. Ber. **28,** 1898, 369-394.

Der Verf. entwickelt die Invariantentheorie einer Schar von Bilinearformen (1) $u\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta + v\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$ für den Fall, dass die Formen (1) schiefsymmetrisch sind, d. h. den Relationen (2) $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$ unterliegen, und dass nur congruente Substitutionen der beiden Variabelngruppen x, y verwendet werden. Der Verf. betont, dass auf diesen Fall die von Weierstrass (F. d. M. **1,** 54, 1868) und Kronecker (F. d. M. **1,** 57, 1868) angegebenen Reductionsmethoden nicht ohne wesentliche Modificationen anwendbar sind.

Die Untersuchung basirt auf dem Begriff des Ranges einer Determinante, sowie auf dem der „regulären“ Unterdeterminante. Das Hauptergebnis ist, dass sich jede schiefsymmetrische Schar von Bilinearformen mit nicht verschwindender Determinante durch congruente lineare Transformationen der x und y in eine Summe von „elementaren“ schiefsymmetrischen Scharen überführen lässt. „Elementar“ heisst eine solche Schar, wenn sie die Minimalzahl von Elementarteilern, nämlich 2 besitzt (die überdies identisch sind). My.

A. Loewy. Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variabeln. Nova Acta Leop.-Carol. Acad. **71,** 379-446.

A. Loewy. Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variabeln. Math. Ann. **50,** 557-576.

Die zweitgenannte Abhandlung ist, abgesehen von einigen Zusätzen, ein Auszug aus der ersteren.

Es handelt sich um die formentheoretische Untersuchung der Transformation einer bilinearen Form $f = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i \bar{x}_k$ (von nicht verschwindender Determinante D) mit conjugirt imaginären Variabeln x, $\bar{x}$ in sich selbst; f wird hierbei zwei linearen Substitutionen S, $\bar{S}$ mit conjugirt imaginären Coefficienten s, $\bar{s}$ unterworfen. Derartige Transformationen spielen in neuester Zeit in den verschiedensten Teilen der Mathematik eine bedeutende Rolle. Zu Grunde gelegt werden die symbolischen Methoden von Frobenius (J. für Math. **84**, 1 ff.; cf. F. d. M. **9**, 85, 1877). Es ergiebt sich daraus ohne weiteres, dass die Determinante einer S, die zusammen mit $\bar{S}$ eine Form f in sich überführt, den absoluten Betrag 1 besitzt; das Kriterium für eine solche S ist, dass die Elementarteiler ihrer charakteristischen Function $|-s_{11}+\varrho, -s_{12}, \ldots, -s_{nn}+\varrho|$ paarweise von gleichem Grade sind, und falls einer derselben für $\varrho = d$ verschwindet, muss es der andere für $1/\bar{d}$; einzig und allein die Wurzeln ϱ, für die $|\varrho| = 1$, dürfen beliebig auftreten.

Sodann stellt der Verf. alle S, die f in sich überführen, wirklich auf, unter Erweiterung einer bereits von Cayley 1858 (Lond. Phil. Trans. 1858, 39 und Coll. Math. Pap. **2**, 497) für reelle f gegebenen symbolischen Ausdrucks.

Insbesondere werden definite f in Betracht gezogen, d. h. solche, die für conjugirt imaginäre Werte der Variabeln nur dann verschwinden können, wenn alle Variabeln verschwinden. Hier ergiebt sich, dass, wenn eine S nebst $\bar{S}$ eine definite f in sich überführt, die charakteristische Function von S in lauter einfache Elementarteiler zerfällt und nur für Werte ϱ vom absoluten Betrage 1 verschwindet.

Andererseits wendet der Verf. sein allgemeines Ergebnis auf die „Hermite'schen Formen" $(\bar{f}' = f)$ an, für die a_{ik} und a_{ki} conjugirt imaginär sind (also a_{ii} reell ist).

Eine Hermite'sche Form lässt sich und zwar noch auf unendlich viele Weisen durch S nebst $\bar{S}$ in die Normalform

$$G = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=n} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$$

setzen. Die Zahl q, der Trägheitsindex der Form nach Frobenius, ist der Kern des Folgenden. Die kleinere der beiden Zahlen q, $n-q$, die mit q' bezeichnet sei, wird Charakteristik der Hermite'schen Form genannt.

Es wird nachgewiesen, dass q' bei den automorphen Transformationen einer Hermite'schen Form die Rolle einer gewissen, nicht überschreitbaren Grenze spielt.

Auf diesem Wege gelangt der Verf. zu Verallgemeinerungen von Sätzen, die Frobenius über definite Hermite'sche Formen $(q' = 0)$ aufgestellt hatte, ferner zu solchen von Fuchs'schen Sätzen über ge-

wisse Klassen linearer Differentialgleichungen (s. F. d. M. **27**, 106, 241, 1896). Die Verwendbarkeit der Charakteristik beruht vor allem darauf, dass sie sich in sehr verschiedene Formen bringen lässt, die als ebenso viele selbständige Definitionen dienen können.

Insbesondere wird noch die Charakteristik reeller quadratischer Formen untersucht; es werden daraufhin Existenzsätze über die reellen automorphen Substitutionen reeller quadratischer Formen aufgestellt.

My.

TH. MUIR. A reinvestigation of the problem of the automorphic linear transformation of a bipartite quadric. American J. **20**, 215-228.

Cayley hat bereits in einer längere Zeit unbekannt gebliebenen Arbeit aus dem Jahre 1858 (London Phil. Trans. p. 39 und Coll. Math. Pap. **2**, 497) auf Grund seiner Theorie der Matrices eine Methode angegeben, eine bilineare Form durch lineare Substitutionen der Variabeln automorph, d. h. in sich, zu transformiren. Der Verf. bringt an Cayley's Methode gewisse Modificationen an, die nach verschiedenen Richtungen Vereinfachungen zu erzielen geeignet sind. My.

G. B. MATHEWS. The condition that a quadriquadric relation may be poristic. Quart. J. **30**, 16-17.

Es sei $F(x_1, x_2)$ eine in x_1, x_2 quadratische und symmetrische Form. Dann definiren die Gleichungen

$$F(x_1, x_2) = 0, \quad F(x_2, x_3) = 0, \ldots, \quad F(x_n, x_{n+1}) = 0 \text{ etc.}$$

eine Reihe von Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, wenn man von einer beliebigen Grösse x_1 ausgeht, für x_2 eine bestimmte Wurzel von $F(x_1, x_2) = 0$ nimmt, ferner für x_3 die Wurzel von $F(x_2, x_3) = 0$, die mit x_1 nicht zusammenfällt, u. s. f. Sind die Coefficienten von F im besondern so beschaffen — was in der Geometrie zu den Poncelet'schen Polygonen und dergl. führt —, dass x_n für jeden Wert von x_1 mit x_1 coincidirt, so sagt der Verf., dass F mit einem „Porismus der n^{ten} Ordnung" behaftet sei.

Nun hat Halphen in seinem Lehrbuche über elliptische Functionen zwei Ausdrücke in den Coefficienten von F gegeben, vermöge deren sich die Bedingungen des Porismus für $n = 3, 4, 5, \ldots$ am einfachsten darstellen. Diese Ausdrücke werden hier in eine andere, noch elegantere Gestalt gebracht. My.

E. O. LOVETT. Certain invariants of a quadrangle by projective transformation. Annals of Math. **12**, 79-86.

Nach Lie'schen Methoden bestimmt der Verf. die Invarianten, die das System von vier Punkten einer Ebene gegenüber verschiedenen Gruppen projectiver Transformationen der Ebene besitzt. My.

E. B. Elliott. The transformation of linear partial differential operators by extended linear continuous groups. Lond. M. S. Proc. **29**, 439-476.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **22**, 120, 1890) hatte der Verf. die Transformation linearer partieller Differentialoperatoren studirt, die vor sich geht, wenn man in den successiven Ableitungen einer abhängigen Variable bezüglich einer oder mehrerer unabhängigen Variabeln abhängige und unabhängige Variabeln vertauscht.

In einer weiteren Arbeit (F. d. M. **23**, 288, 1891) hatte der Verf. seine Methode auf den Fall ausgedehnt, dass mehr als eine unabhängige Variable auftritt.

Nunmehr wird allgemeiner die Transformation der Differentialoperatoren in dem Sinne untersucht, dass die Variabeln beider Arten continuirlichen (linearen) Substitutionen unterworfen werden. Wenn hinzugefügt wird, dass eine derartige Untersuchung völlig neu sei, so ist darauf hinzuweisen, dass in der Lie'schen Theorie bereits die Grundgedanken einer weit allgemeineren Auffassung ausgebildet sind, wenn auch die specielle Ausführung für die in Rede stehende Aufgabe fehlt.

My.

G. Bagnera. Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo Kleiniano. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 340-346.

Wenn eine Substitution $T=\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, wo $ad-bc=1$, vorliegt, so ist $[T]=a+d$ invariant für alle Transformirten von T, die mittels Substitutionen der obigen Art hervorgehen. Liegt weiter eine Gruppe Γ von unendlich vielen Substitutionen T vor, die durch n Fundamentalsubstitutionen $A, B, \dots, L$ erzeugbar sei, z. B. eine Klein'sche Gruppe, so sind nach Poincaré (F. d. M. **19**, 429, 1887) die Invarianten aller Substitutionen von Γ ganze rationale Functionen einer endlichen Zahl von Fundamentalinvarianten der Form

$$[A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda] \qquad (\alpha, \beta, \dots, \lambda = 0, 1).$$

Für $n>2$ sind die Fundamentalinvarianten algebraisch abhängig von einander. Der Verf. bezeichnet als „Ordnung“ einer solchen Invariante die Zahl der Fundamentalsubstitutionen, die in deren Ausdruck eingehen, und beweist den Satz: „Eine Invariante der Ordnung $r>2$ genügt einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten sich ganzrational durch die Fundamentalinvarianten der ersten und zweiten Ordnung ausdrücken, und die vermöge Quadratwurzelausziehungen lösbar ist“.

My.

E. Cartan. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. Toulouse Ann. **12** B, 1-99.

Bekanntlich ist, wie zuerst Poincaré (F. d. M. **16**, 119, 1884) bemerkte, die Theorie der Systeme höherer complexer Zahlen eng ver-

bunden mit der der linearen, homogenen, einfach transitiven Gruppen. Der Verf. betrachtet insbesondere „bilineare“ Gruppen, d. i. solche, deren endliche Gleichungen linear und homogen sind hinsichtlich der Variabeln und der Parameter: jede Transformation einer solchen Gruppe repräsentirt eine complexe Zahl eines Systems mit distributivem und associativem Gesetz, für das überdies die Division im allgemeinen ausführbar ist.

Von den Ergebnissen bezüglich der Zusammensetzung der fraglichen Zahlsysteme werden wieder Anwendungen auf die bilinearen Gruppen gemacht. Es seien

$$(1) \qquad x_i = a_1\xi_{i1} + a_2\xi_{i2} + \cdots + a_r\xi_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die Gleichungen einer Gruppe G in n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und r Parametern, wo die ξ Functionen der x sind; es wird vorausgesetzt, dass G die identische Transformation enthalte. G lässt sich dann erzeugen durch r unabhängige infinitesimale Transformationen.

Es wird das Kriterium aufgestellt, dass eine so erzeugte Gruppe in Bezug auf ihre Parameter linear und homogen ist. Das Nämliche wird geleistet, wenn die Linearität und Homogeneität sich auch auf die Variabeln beziehen sollen, d. h. die Gruppe eine „bilineare“ sein soll.

Eine einfache transitive bilineare Gruppe kann durch passende Wahl von Parametern in die Normalform gebracht werden, dass sie ihre eigene Parametergruppe ist. Bei dem Studium der mit den bilinearen Gruppen verknüpften Systeme von complexen Zahlen tritt der Begriff der Zahl „Pseudo-Null“ eines Systems hervor, d. h. einer Zahl des Systems, für welche die charakteristische Gleichung nur verschwindende Wurzeln besitzt. Weiterhin werden die Systeme von Wichtigkeit, deren charakteristische Gleichung sich in lineare Gleichungen zerlegt. Es giebt für derartige Systeme ganzzahlige Invarianten, die von der Darstellungsform des Systems unabhängig sind.

Eine beliebige complexe Zahl kann, durch geeignete Wahl von Einheiten, stets auf eine gewisse einfache Normalform gebracht werden.

Diese kurzen Hinweise mögen genügen, um die Richtung zu kennzeichnen, in der sich die Untersuchungen des Verf. bewegen.

My.

C. Stéphanos. Sur les systèmes associatifs de nombres symboliques. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 141-142.

Ist $e_x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$ eine höhere complexe Zahl (wo die x gewöhnliche reelle oder complexe Grössen sind), deren Multiplicationsgesetz ausgedrückt ist durch

$$e_x e_y = \Sigma a_{ijk} x_i y_j e_k \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

so kommt das Studium der Zahlen e_x zurück auf das der trilinearen Form

$$f(x, y, u) = \Sigma a_{ijk} x_i y_j u_k \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, m),$$

wo die u als zu den x, y contragrediente Variabeln anzusehen sind.

Man vergl. hiermit die Arbeit von F. Engel (F. d. M. **18**, 316, 1886). My.

Beez. Ueber die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hülfe infinitesimaler Transformationen und höherer complexer Zahlen. Schlömilch Z. **43,** 65-79, 121-132, 277-304.

Diese Arbeit enthält die Fortsetzung früherer in Bd. 41 derselben Zeitschrift (F. d. M. **27,** 463, 1896) veröffentlichter Untersuchungen über die Ausdehnung des Quaternionenbegriffs auf 2^n Einheiten. Die dort bereits erwähnte Verwendung dieser Quaternionen zur Lösung des Problems der automorphen Transformation einer Summe von Quadraten an Stelle der Benutzung von Cayley's schiefen Determinanten wird hier eingehend durchgeführt. Zunächst werden in gewöhnlicher Form die endlichen und die (Lie'schen) infinitesimalen Transformationen einer Summe von zwei Quadraten in sich selbst dargestellt, die letzteren unter Benutzung des Lie'schen Symbols $\varphi(t)$. Diese Transformationen lassen sich in Gleichungen zwischen gewöhnlichen complexen Grössen zusammenfassen. Durch Integration der Differentialgleichungen nach drei verschiedenen Methoden werden sodann aus der infinitesimalen Transformation die endlichen gewonnen. Ebenso wird die Transformation einer Summe von drei Quadraten behandelt. Indem die hier auftretenden Euler'schen Gleichungen in eine Vectorengleichung zusammengefasst werden, und die Euler'sche Transformation selbst in die Quaternionenform gebracht wird, lässt sich in bemerkenswert einfacher Weise die Gruppeneigenschaft der behandelten Transformationen feststellen. Bei der Ausdehnung des Lie'schen Verfahrens auf eine Summe von vier Quadraten stellt sich heraus, dass die oben erwähnten drei Integrationsmethoden entweder gar nicht oder unter Schwierigkeiten, die bis jetzt noch nicht überwunden werden konnten, durchführbar sind. Dagegen gelingt die Transformation einer Summe von acht, sechs und vier Quadraten mit Hülfe der vom Verf. auf acht Einheiten ausgedehnten Quaternionen. Die letzteren beiden Fälle ergeben sich aus dem ersten durch Specialisirung. Am Schlusse wird u. a. noch gezeigt, dass auch die Parametergruppe der Euler-Cayley'schen quaternären orthogonalen Substitution sich mit Hülfe von Quaternionen übersichtlich darstellen lässt.

Schg.

J. H. Philippot. Sur quelques points de la théorie des transformations linéaires. Liége Mém. **20,** 14 S.

Untersuchung der verschiedenen Wege zur Bildung transformirbarer Systeme, insbesondere der in den Producten der Variabeln und in den Coefficienten der algebraischen Formen cogredienten Systeme.

Mn. (Lp.)

Ch. L. Bouton. Some examples of differential invariants. American M. S. Bull. **4,** 313-322.

Verf. stellt einige neue Invarianten (Differentialinvarianten zweiter Ordnung) der projectiven Transformationen auf. Die Herleitung derselben wird nach den Lie'schen Methoden für die Ebene vollständig durch-

geführt und die Methode für das entsprechende Problem im dreidimensionalen Raum angedeutet mit Angabe der Lösungsresultate.

Wbg.

Ph. Maennchen. Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine teilweise symmetrische. Diss. Leipzig: B. G. Teubner. 32 S. 8°.

D. A. Rohrstock. Point invariants for the finite continuous groups of the plane. Amer. Math. Monthly **5**, 249-264.

M. W. Haskell. On rational quadratic transformations. California Acad. Proc. **1**, 1-12.

Kapitel 3.

Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Functionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

H. Burkhardt. Endliche discrete Gruppen. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 208-226.

Inhaltsübersicht: 1. Permutationen und Substitutionen. 2. Ordnung einer Substitution. 3. Cykeln. 4. Analytische Darstellung von Substitutionen. 5. Substitutionsgruppen. 6. Transitivität, Primitivität. 7. Symmetrische und alternirende Gruppe. 8. Mögliche Ordnungszahlen von Gruppen. 9. Mehrfach transitive Gruppen. 10. Lineare homogene Gruppe. 11. Gruppe der Modulargleichung. 12. Andere Untergruppen der linearen homogenen Gruppe. 13. Aufzählungen von Gruppen der niedrigsten Grade. 14. Isomorphismus. 15. Allgemeiner Gruppenbegriff. 16. Normalteiler. 17. Compositionsreihe. 18. Isomorphismen einer Gruppe mit sich selbst. 19. Erzeugende Operationen; geometrische Bilder von Gruppen. 20. Abel'sche Gruppen. 21. Die Sylow'schen Sätze. 22. Einfache Gruppen. 23. Auflösbare Gruppen. 24. Gruppendeterminante.

Wbg.

P. Hoyer. Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben. Math. Ann. **50**, 499-517.

Unter Gruppirungsaufgaben versteht Verf. solche Aufgaben, bei denen es sich um die Gruppirung irgend welcher Elemente gegebenen Bedingungen gemäss handelt. Zu Aufgaben dieser Art gehören z. B. die Aufgaben über Elementenvertauschungen, wenn man sich die Substitutionen durch Angabe ihrer Circularsubstitutionen, d. h. also der Elementencomplexe dieser, bestimmt denkt, ferner geometrische Aufgaben,

wie z. B. die folgende: N Punkte im Raume so durch einfache, einander nicht schneidende Linienzüge zu verbinden, dass ein Gebilde entsteht, welches eine bestimmte Anzahl von Spaltungen zweiter Art (vergl. Hoyer's Prog. 1897, S. 13; F. d. M. **28**, 342) zulässt, d. h. solcher Spaltungen, durch die keine Vermehrung der Anzahl der nicht zusammenhängenden Teile des entstandenen Liniengebildes bewirkt wird. Die Natur dieser Aufgaben bedingt es nun, dass dieselben eine directe analytische Behandlung nicht zulassen, wenn man unter analytischer Behandlung einer Aufgabe eine solche versteht, bei der Zahlgrössen den Gegenstand und die für das Operiren mit Zahlgrössen gültigen Gesetze die Hülfsmittel der Behandlung bilden, also eine Behandlung im allgemeinen Sinne desjenigen Zweiges der Mathematik, den man als Analysis zu bezeichnen pflegt. Denn die zu gruppirenden Elemente sind im allgemeinen überhaupt keine Grössen, und die Bedingungen der Gruppirung daher auch nicht durch Beziehungen zwischen Zahlgrössen direct darstellbar. Es bedarf daher eines Hülfsmittels, um Aufgaben dieser Art der analytischen Behandlung zugänglich zu machen. Dieses Hülfsmittel hat nun Verf. in dem charakteristischen Functionensystem einer Reihe von Elementencomplexen gefunden und zum Gegenstande der vorliegenden Arbeit gemacht. Doch behandelt er keine Specialaufgaben, sondern beschränkt sich darauf, zu zeigen, wie die Fragen nach den allgemeinen Eigenschaften einer jeden durch Gruppirung einer Reihe von Elementen entstandenen Reihe von Elementencomplexen, wie Verf. sie in seiner Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc.“ und in seiner Programmabhandlung entwickelt hat, sich analytisch in dem angegebenen Sinne behandeln lassen. Es findet also die Frage nach den transitiven Gruppen einer Reihe, ihrem Grade des Zusammenhanges, ihren Cyklen und den Spaltungen erster oder zweiter Art, die sie zulässt, ihre Erledigung. Eine Andeutung dieser Entwickelungen findet sich bereits im letzten Teile von § 2 der Programmabhandlung des Verf., ohne dass indessen dort die allgemeine Grundlage derselben gegeben ist. Wbg.

P. Hoyer. Neue Grundlagen der Gruppen- und Substitutionentheorie. Math. Ann. **51**, 445-462.

Verf. legt in der vorliegenden Abhandlung dar, in welcher Weise die Gruppen- und Substitutionentheorie auf die von ihm entwickelte Theorie des Zusammenhanges in Reihen (Math. Ann. **42**, F. d. M. **25**, 695, 1893) zu stützen ist. Es geschieht dies dadurch, dass den Substitutionen gewisse Reihen zugeordnet werden und auf diese Reihen der in der vorstehend besprochenen Abhandlung entwickelte Begriff des charakteristischen Functionensystems einer Reihe übertragen wird; doch soll dieser Begriff, da er hier von der Reihenvorstellung unabhängige Bedeutung gewinnt, unmittelbar im Anschluss an den Substitutionenbegriff entwickelt und vorangestellt werden. Damit gestalten sich die Fragen nach der Beschaffenheit mehrerer Substitutionen oder einer

Gruppe derselben zu Fragen nach der Beschaffenheit dieser Reihen, bez. Functionensysteme. Verf. weist dies im ersten Teil nach an der Untersuchung des Grades der Transitivität, der Ordnung einer Gruppe und der grössten Anzahl von Elementen, die von den Substitutionen einer Gruppe ungeändert bleiben können, ohne dass die übrigen ungeändert bleiben. Verf. zeigt, wie durch Benutzung der Ergebnisse seiner letzten Abhandlung die Fragen nach diesen Zahlen sich zu rein analytischen Fragen nach dem Grade gewisser Determinanten gestalten, und schliesst alsdann den ersten Teil mit der Entwickelung der Functionalgleichung, welche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass mehrere gegebene Substitutionen eine Gruppe bilden. Im zweiten, z. T. als Anwendung des ersten zu betrachtenden Teil zeigt Verf., wie die Untersuchung der verschiedenen Formen gleichwertiger Producte, die sich aus gegebenen Substitutionen bilden lassen, aufs engste mit der Gruppentheorie verknüpft ist. Wbg.

G. Frobenius. Ueber Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Berl. Ber. 1898, 501-515.

In seiner Arbeit „Ueber Gruppencharaktere" (Berl. Ber. 1896; F. d. M. **27**, 92) hat Verf. zur Berechnung der Charaktere einer endlichen Gruppe von bekannter Constitution eine allgemeine Methode entwickelt und ihre praktische Verwendbarkeit an einer Reihe von einfachen Beispielen dargethan. Da aber ihre Anwendung auf complicirtere Gruppen mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, so hat Verf. nach anderen Wegen gesucht, um die Charaktere einer Gruppe und damit ihre primitiven Darstellungen durch lineare Substitutionen zu erhalten, und er hat zwei ganz verschiedene Methoden gefunden, die in speciellen Fällen leichter zu diesem Ziele führen können als jene allgemeine Methode. — Die erste, die in der vorliegenden Arbeit dargelegt wird, stützt sich auf die Betrachtung der in der gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{G}$ und auf die Beziehungen, die zwischen den Charakteren von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ bestehen. Diese Relationen ergeben sich auf zwei verschiedenen Wegen. Der eine (§ 1) führt von den Primfactoren der Determinante der Gruppe $\mathfrak{H}$ zu denen der Determinante der Gruppe $\mathfrak{G}$, der andere (§ 3) umgekehrt von den letzteren zu den ersteren. Zu besonders einfachen Ergebnissen gelangt man durch diese Betrachtungen in dem Falle, wo $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist (§§ 2, 4). Die erhaltenen Formeln stehen in naher Beziehung zu der Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{H}$ in Complexe von Elementen, die nach einem Doppelmodul äquivalent sind, welcher aus zwei in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ gebildet wird. Die Untersuchung des speciellen Falles, wo $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ ist, führt direct zur Ermittelung eines Charakters jeder zweifach transitiven Gruppe von Permutationen (§ 5). — Eine zweite Methode, um die Charaktere einer Gruppe zu berechnen, ergiebt sich aus der Theorie der Composition der Charaktere, die Verf. bei einer anderen Gelegenheit entwickeln wird. Wbg.

H. Laurent. Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions. Journ. de Math. (5) **4**, 75-119.

Der Verf. entwickelt eine systematische und allgemeine Theorie der linearen Substitutionen S, wie sie neuerdings von vielen Seiten in Angriff genommen worden ist (vergl. vor allem die grundlegende Arbeit von Frobenius: F. d. M. **9**, 85, 1877). Die Substitutionen werden durch Symbole repräsentirt, mit denen man rechnen kann, wie mit complexen Grössen (im allgemeinsten Sinne des Wortes).

Unter den Anwendungen befindet sich eine Methode, wie man zu neuen Gruppen von S gelangt, sowie ein einfaches Kriterium für die Vertauschbarkeit zweier S.

Im übrigen ist die Abhandlung eine weitere Ausführung einer Arbeit des Verf., über die in F. d. M. **28**, 131, 1897 berichtet ist. Auch jetzt hat es der Verf. verschmäht, auf die vorhandene reichhaltige Litteratur Rücksicht zu nehmen, so dass der Leser den Eindruck erhalten kann, als stamme die „théorie nouvelle" ausschliesslich vom Verf.

My.

A. Viterbi. Sui gruppi di sostituzioni a coefficienti interi appartenenti a un corpo di numero complesso di grado finito qualunque. Batt. G. **36**, 346-361.

Der Verf. beschäftigt sich mit den Gruppen linearer Substitutionen S, wie sie von Fricke und Poincaré (F. d. M. **19**, 429, 1887; **25**, 726, 1894) untersucht sind, indem er allgemein annimmt, dass die Coefficienten von S einem beliebigen endlichen (algebraischen) Körper als ganze Zahlen angehören, und sich erst hinterher auf den Fall reeller Körper concentrirt.

Zunächst wird festgestellt, unter welchen Bedingungen eine Gruppe der in Rede stehenden Art eine eigentlich discontinuirliche ist. Sodann werden die Gruppen in geeigneter Weise „erweitert". Insbesondere werden dabei die Substitutionen untersucht, die mit ihrer inversen zusammenfallen. Das liefert Hülfsmittel, um das „erzeugende Polyeder" der Gruppe zu bestimmen. My.

W. Burnside. On the continuous group that is defined by any given group of finite order. Lond. M. S. Proc. **29**, 207-224, 546-565.

Study (Leipz Ber. 1889, 201) hat gezeigt, dass für jede transitive lineare homogene Gruppe von n Variabeln mit n unabhängigen Parametern die Parameter so gewählt werden können, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe linear und homogen in den Parametern wie in den Variabeln sind. Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die ursprünglichen, $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ die transformirten Variabeln und $y_1, y_2, \dots, y_n$ die in der angegebenen Weise gewählten Parameter, so lauten die endlichen Gleichungen der Gruppe

$$x'_s = \sum_{i,k} a_{sik}\, x_i y_k \qquad (s, i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Die Grössen a_{sik} sind absolute Constanten, durch eine Anzahl von Relationen mit einander verbunden, welche die Gruppeneigenschaft des Gleichungssystems bedingen. — In der ersten Arbeit betrachtet nun Verf. solche continuirlichen Gruppen, bei denen die Constanten a_{sik} mittels einer Gruppe von der endlichen Ordnung n bestimmt werden, und zwar in folgender Weise: Wenn $S_1, S_2, \dots, S_n$ die Operationen einer Gruppe von der endlichen Ordnung n sind, so ist a_{sik} gleich 1 oder 0, je nachdem $S_k S_i^{-1} S_s$ die identische Operation ist oder nicht. In den einfachsten Fällen $n=2$ und $n=3$, deren Untersuchung den Verf. zu der vorliegenden Arbeit angeregt hat, lauten die Transformationsgleichungen: $x'_1 = x_1y_1 + x_2y_2$, $x'_2 = x_1y_2 + x_2y_1$; und

$$x'_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad x'_2 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2,$$
$$x'_3 = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1,$$

von denen man leicht feststellen kann, dass sie die Gruppeneigenschaft besitzen. Ein solches System von n^2 Coefficienten ist bereits von Frobenius untersucht worden (Berl. Ber. 1896, 1343-1382; F. d. M. **27**, 94), und aus einem von ihm gefundenen Satze (l. c. 1346) folgt sofort, dass die entsprechenden Transformationsgleichungen die Gruppeneigenschaft besitzen; trotzdem ist Frobenius' Arbeit von der des Verf. wesentlich verschieden und bezieht sich nicht auf die continuirliche Gruppe, die mit diesem Coefficientensystem verknüpft ist. — Das Resultat der ersten Arbeit ist folgender Satz: „Die continuirliche Gruppe G, welche einer Gruppe g von der endlichen Ordnung n zugeordnet ist, ist das directe Product aus einer continuirlichen Abel'schen Gruppe von der Ordnung r und einer halbeinfachen Gruppe von der Ordnung $n-r$, wo r die Anzahl der verschiedenen Systeme conjugirter Operationen in g bedeutet.“ Dabei versteht Verf. unter dem der Theorie der endlichen Gruppen entlehnten Ausdruck „directes Product“ Folgendes: Die beiden in G enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen haben keine Operation ausser der identischen gemeinsam und sind so beschaffen, dass jede Operation der einen mit jeder Operation der anderen vertauschbar ist, während jede infinitesimale Operation von G durch eine lineare Combination der infinitesimalen Operationen dieser Untergruppen gebildet werden kann. Ferner versteht Verf. unter einer „halbeinfachen Gruppe“ eine solche, welche keine ausgezeichnete integrable Untergruppe enthält. Der obige Satz wird durch instructive Beispiele erläutert. Es ergiebt sich noch, dass die Gruppe G dann und nur dann integrabel ist, wenn g eine Abel'sche Gruppe. — In dem zweiten Teile der Arbeit wird die Untersuchung der Gruppe G zum Abschluss gebracht: Verf. zeigt, dass r ganze Zahlen $\mu_1 (=1), \mu_2, \dots, \mu_r$ derart existiren, dass $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_r^2 = n$ und G das directe Product von r Gruppen $G_1, G_2, \dots, G_r$ ist, welche mit den allgemeinen linearen homogenen Gruppen in bez. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ Variabeln einfach isomorph sind. Dabei ergeben sich zwei Sätze von Frobenius (Berl. Ber. l. c.) über die Primfactoren der Gruppendeterminante. Ferner wird gezeigt, dass, wenn g als eine Gruppe mit m Symbolen gebildeter linearer Substituti-

onen dargestellt werden kann, so dass der Operation S_k von g die Substitution $x'_s = \sum_{i=1}^{i=m} a_{sik} x_i$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ entspricht, dann die Gleichungen $x'_s = \sum_{i,k} a_{sik} x_i y_k$ $(s, i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ eine endliche continuirliche Gruppe definiren, welche das directe Product aus einer Anzahl von Gruppen ist, deren jede mit einer allgemeinen linearen homogenen Gruppe einfach isomorph ist.

Die gleichzeitige Betrachtung der discontinuirlichen Gruppe g und der continuirlichen Gruppe G scheint die Untersuchung gewisser Eigenschaften von g zu erleichtern, insbesondere die Bestimmung des von Klein so genannten „Grades des mit g verbundenen Normalproblems", d. h. der kleinsten Zahl von Variabeln, in denen g als Gruppe linearer Substitutionen dargestellt werden kann.

Die in den ersten Paragraphen entwickelten Eigenschaften der charakteristischen Determinante einer einfach transitiven linearen homogenen Gruppe, welche für die Discussion von G notwendig sind, machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit und sind, einschliesslich der Resultate des § 6, bereits von Molien („Ueber Systeme höherer complexer Zahlen", Math. Ann. **41,** 83-156, 1892) in anderer Form und mit anderen Beweismitteln gefunden worden. Ferner sind die in den §§ 11-13 behandelten Fragen bereits in einer Abhandlung von Frobenius (Berl. Ber. 1897, 994-1015) enthalten, der sich seinerseits auf eine Arbeit von Molien (Dorp. Naturforscher Ges. Ber. 1897) bezieht.

Wbg.

W. Burnside. On linear homogeneous continuous groups whose operations are permutable. Lond. M. S. Proc. **29,** 325-352.

Der Zweck der Abhandlung ist eine Klassification der Gruppen vertauschbarer Operationen, welche in der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in conjugirten Systemen enthalten sind. Einige Eigenschaften solcher Gruppen, falls sie intransitiv sind, werden in dem letzten Teile der Arbeit angegeben; aber die Hauptresultate beziehen sich auf transitive Gruppen. Aus bekannten Sätzen (Study, Leipz. Ber. 1889, vergl. auch Lie-Scheffers, „Vorlesungen über continuirliche Gruppen", 627-633), die Verf. in der Einleitung angiebt, folgt nämlich, dass für diese transitiven Gruppen die endlichen Gleichungen in einer Form geschrieben werden können, in welche die Parameter ebenso wie die Variabeln linear und homogen eingehen. Verf. behandelt das in Frage stehende Problem in der vorliegenden Arbeit fast ausschliesslich vom Gesichtspunkte der endlichen Gleichungen aus und stützt sich dabei hauptsächlich auf die von Weierstrass und Frobenius gewonnenen Sätze über die Elementarteiler der charakteristischen Determinante. Wbg.

C. Jordan. Sur les groupes d'ordre $p^m q^2$. Journ. de Math. (5) **4,** 21-26.

Sylow hat gezeigt, dass eine Gruppe von der Ordnung p^m

(p Primzahl, $m > 1$) notwendig zusammengesetzt ist; Frobenius hat diesen Satz auf die Gruppen von der Ordnung $p^m q$ (q Primzahl und von p verschieden) ausgedehnt; Verf. zeigt, dass derselbe auch für die Gruppen von der Ordnung $p^m q^2$ gilt. Wbg.

A. C. L. Wilkinson. On the transitive substitution groups of 24 letters that admit of two different imprimitive systems of degrees 3 and 4. Quart. J. **30**, 157-165.

Verf. zeigt an dem Beispiel der im Titel angegebenen Gruppen, dass der von Jordan (Traité des substitutions, 35-36) vermutete Satz von der Constanz der „Factoren der Imprimitivität" nicht allgemein gültig ist, indem jene Gruppe zwei Systeme von Factoren der Imprimitivität besitzt, die nicht identisch sind. Wbg.

G. A. Miller. On the operation groups whose order is less than 64 and those whose order is $2p^3$, p being any prime number. Quart. J. **30**, 243-263.

Die Gruppen, deren Ordnung kleiner als 48 ist, wurden vom Verf. 1896 veröffentlicht (Quart. J. **28**, 232-284); einige davon waren schon früher bekannt (Hölder, Math. Ann. **43**, 301-412, 1893). Die Gruppen von der Ordnung $8p$, wo p eine Primzahl, wurden ebenfalls 1896 vom Verf. (Phil. Mag. **42**, 195-200, 1896) und von Levavasseur (C. R. **123**, 91, 92) untersucht. Die Gruppen von der Ordnung 60 wurden von Burnside in seinem Werk „The Theory of Groups", 1897, 105-108 bestimmt. — Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die übrigbleibenden Gruppen zu bestimmen, deren Ordnung kleiner als 64 ist, und die wichtigsten Eigenschaften dieser Gruppen anzugeben. Die einzige Ordnung, welche einige Schwierigkeiten bereitet, ist 48, da sie mehr als vier Primfactoren enthält; diesen Gruppen widmet daher Verf. den grössten Teil seiner Arbeit: Es giebt 52 Gruppen dieser Ordnung; fünf davon sind Abel'sche, und eine ist eine Hamilton'sche Gruppe. Alle mit Ausnahme von zweien enthalten mindestens eine Untergruppe von der Ordnung 24; jede dieser beiden Gruppen enthält 16 Untergruppen von der Ordnung 3 und eine einzige von der Ordnung 16. In 17 Gruppen ist jede Untergruppe von Primzahlordnung invariant, in 25 ist nur eine Untergruppe der Ordnung 3 vorhanden, dagegen mehrere conjugirte Untergruppen der Ordnung 2, und in acht Gruppen giebt es gerade vier conjugirte Untergruppen der Ordnung 3. Alle diese Gruppen, mit Ausnahme von 18, enthalten mindestens eine Abel'sche Untergruppe der Ordnung 24; in 12 Gruppen ist dieselbe cyklisch. Alle diese Gruppen enthalten entweder eine oder drei Untergruppen der Ordnung 16. Falls drei vorhanden sind, haben sie stets acht gemeinsame Operatoren und werden durch alle Operatoren der Gruppe entsprechend der symmetrischen Gruppe von der Ordnung 6 transformirt. Daher enthalten diese drei Untergruppen 32 verschiedene Operatoren der Gruppe, und 24 dieser

Operatoren transformiren jeden Operator der Ordnung 3 in sein Quadrat. Die acht gemeinsamen Operatoren bilden die einzige invariante Untergruppe der Ordnung 8. — An Stelle der Gruppen von der Ordnung 54 betrachtet Verf. die allgemeineren Gruppen von der Ordnung $2p^3$, wo p eine Primzahl: ihre Anzahl ist 15, wenn p ungerade, darunter sind drei Abel'sche Gruppen, fünf die directen Producte einer Gruppe von der Ordnung p^3 und eines Operators von der Ordnung 2, und 10 enthalten eine Abel'sche Untergruppe von der Ordnung p^3. Ist dagegen $p = 2$, so ist die Anzahl dieser Gruppen 16; dieselben sind bereits von Young, Hölder (Math. Ann. **43**, 395, 1893) u. a. untersucht worden. — Zum Schluss giebt Verf. folgende Tabelle:

Ordnung:	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
Zahl der Gruppen:	52	2	5	1	5	1	15	2	13	2	2	1	13	1	2	4.

Wbg.

G. A. Miller. Sur les groupes hamiltoniens. C. R. **126**, 1406-1408.

Verf. legt die fundamentale Wichtigkeit der „Hamilton'schen Gruppen" (vergl. Dedekind, Math. Ann. **48**, 557, 1897) von der Ordnung 2^a für die allgemeine Untersuchung der Hamilton'schen Gruppen dar und leitet die wesentlichen Eigenschaften derselben ab. Wbg.

G. A. Miller. On the primitive substitution groups of degree sixteen. American J. **20**, 229-241.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung aller primitiven Gruppen vom Grade 16 und die Untersuchung derselben hinsichtlich ihrer Auflösbarkeit. Verf. zeigt, dass die Anzahl dieser Gruppen beträchtlich grösser ist, als bisher angenommen wurde: während nämlich in Jordan's Aufzählung nur 12 derartige Gruppen angegeben sind, welche die alternirende Gruppe nicht enthalten, weist Verf. die Existenz von 20 solcher Gruppen nach; 10 davon sind auflösbar. — In dem ersten Teile der Arbeit werden die Gruppen durch sehr einfache Methoden bestimmt und hinsichtlich der oben angegebenen Eigenschaft untersucht; im zweiten Teile wird bewiesen, dass es unmöglich ist, eine primitive Gruppe vom Grade 16 herzustellen, welche in dem ersten Teile nicht enthalten ist. Den Schluss bildet folgende Tabelle der auflösbaren primitiven Gruppen, deren Grad bekanntlich (Jordan, Traité des substitutions, 398) eine Potenz einer Primzahl sein muss, bis zum Grade 27 excl.:

Grad:	3	4	5	7	8	9	11	13	16	17	19	23
Anzahl der Gruppen:	2	2	3	4	2	7	4	6	10	5	6	4.

Wbg.

G. A. Miller. On the perfect groups. American J. **20**, 277-282.

Perfecte Gruppen sind solche Gruppen, die mit ihrer ersten Ab-

leitung (abgeleiteten Gruppe) identisch sind (Lie). Bei einer auflösbaren Gruppe führt eine endliche Anzahl von Ableitungen auf die Einheit, bei einer unauflösbaren Gruppe auf eine perfecte Gruppe, deren Ordnung grösser als 1 ist, und deren Factoren der Zusammensetzung alle zusammengesetzten Factoren der Zusammensetzung der ursprünglichen Gruppe enthalten, so dass die Untersuchung der unauflösbaren Gruppen auf die der perfecten Gruppen zurückgeführt ist. Die Gesamtheit der perfecten Gruppen umfasst die der einfachen Gruppen, ist aber ihrerseits in der Gesamtheit der unauflösbaren Gruppen enthalten. So sind alle symmetrischen Gruppen, deren Ordnung 24 überschreitet, unauflösbar, ohne perfect zu sein. Von den vielen interessanten Eigenschaften der perfecten Gruppen, welche Verf. ermittelt, mögen die wichtigsten hier angegeben werden:

1. Jede perfecte Gruppe ist $(a, 1)$-fach isomorph mit einer einfachen Gruppe von zusammengesetzter Ordnung. Wenn eine perfecte Gruppe Primfactoren der Zusammensetzung besitzt, so muss sie eine auflösbare charakteristische Untergruppe besitzen, deren Ordnung das Product aller dieser Primfactoren ist.

2. Eine perfecte transitive Substitutionsgruppe von Primzahlgrad ist einfach; daher kann eine transitive Gruppe von Primzahlgrad höchstens einen zusammengesetzten Factor der Zusammensetzung enthalten.

3. Eine perfecte transitive Substitutionsgruppe vom Grade $2p$ (p Primzahl) ist entweder einfach oder imprimitiv; in dem letzteren Falle muss sie p Systeme der Imprimitivität enthalten und dieselben einer einfachen Gruppe vom Grade p gemäss vertauschen.

4. Es giebt nur eine zusammengesetzte perfecte Gruppe vom Grade 8 und keine von kleinerem Grade, ferner keine vom Grade 9, zwei vom Grade 10, von denen die eine transitiv, die andere intransitiv ist, und zwei vom Grade 11, deren Ordnungen 21600, bez. 3600 sind.

Grad:	5	6	7	8	9	10	11
Zahl der einfachen Gruppen:	2	2	3	2	2	4	5
Zahl der perfecten Gruppen:	1	2	2	3	2	6	6
Zahl der unauflösbaren Gruppen:	2	4	6	16	41	106	228.

Wbg.

G. A. Miller. **On the commutator groups.** American M. S. Bull. **4**, 135-139.

Sind s und t zwei Operatoren einer Gruppe G, so heisst der Operator $s^{-1}t^{-1}st$ und ebenso der inverse $t^{-1}s^{-1}ts$ nach Dedekind der Commutator von s und t. Die Commutatoren sämtlicher Operatoren von G bilden eine Gruppe G_1, die Commutatoruntergruppe von G. Die Gruppe G_1 ist eine ausgezeichnete und auch eine charakteristische Untergruppe (Frobenius, Berl. Ber. 1895, 183) von G. Ist G_2 die Commutatoruntergruppe von G_1, G_3 die von G_2 etc., so nennt Verf. analog der von Lie in die Theorie der continuirlichen Gruppen eingeführten Bezeichnung G_k die k^{te} Ableitung von G. Die notwendige

und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit einer Gruppe ist die, dass man nach einer endlichen Anzahl von Ableitungen zur Einheit gelangt (vergl. das vorangehende Referat). Da eine Gruppe viele ausgezeichnete und auch charakteristische Untergruppen, aber nur eine Commutatoruntergruppe besitzt, so gelten für die letztere besondere Sätze; Verf. stellt deren eine grosse Anzahl auf. Wbg.

G. A. Miller. On the limit of transitivity of the multiply transitive substitution groups that do not contain the alternating group. American M. S. Bull. **4,** 140-143.

Wir geben nur die wichtigsten der vom Verf. aufgestellten Sätze wieder:

1. „Wenn eine Gruppe vom Grade n k-fach transitiv ist, so muss es eine mindestens β-fach transitive Gruppe vom Grade $(n-k+\beta)$ $(\beta = 1, 2, 3, \ldots, k-2)$ geben, deren Quotientgruppe in Bezug auf eine ausgezeichnete Untergruppe die symmetrische Gruppe vom Grade $k-\beta$ ist.“

2. „Eine transitive Gruppe vom Grade p kann nicht Untergruppe einer primitiven Gruppe sein mit Ausnahme derer vom Grade p, $p+1$ und $p+2$.“

Daraus folgt der wichtige Jordan'sche Satz: „Eine Gruppe vom Grade $p+k$, $k>2$, kann nicht mehr als k-fach transitiv sein.“

3. „Eine transitive Gruppe vom Grade $2p$, $p>3$, welche keine regelmässige Substitution vom Grade p enthält, kann nicht mit der symmetrischen Gruppe der Ordnung 6 isomorph sein.“

4. „Eine Gruppe vom Grade $2p+k$, $k>2$, kann nicht mehr als k-fach transitiv sein.“ Wbg.

G. A. Miller. On an extension of Sylow's theorem. American M. S. Bull **4,** 323-327.

Verf. beweist mit Methoden von Frobenius die Theoreme von Cauchy und Sylow, indem er gleichzeitig Cauchy's wichtigen Anteil an Sylow's Theorem klarstellt, und giebt dann von dem letzteren folgende Erweiterung: „Wenn eine Gruppe von der Ordnung g eine Untergruppe von der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ (p und q Primzahlen) enthält, so ist die Anzahl ihrer Untergruppen dieser Ordnung von der Form $1+kp+lq$, worin k und l ganze positive Zahlen bedeuten“. Wbg.

G. A. Miller. On the Hamilton groups. American M. S. Bull. **4,** 510-515.

Eine Hamilton'sche Gruppe ist eine nicht-Abel'sche Gruppe, welche nur ausgezeichnete Untergruppen (Normalteiler) besitzt (Dedekind, Math. Ann. **48,** 549, 1897). Verf. stellt folgende neue Sätze über dieselben auf:

1. Die Ordnung jeder Hamilton'schen Gruppe (H. Gr.) ist gerade.

2. Eine H. Gr. von der Ordnung $2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots$ ($p_1, p_2, \dots$ Primzahlen) ist das directe Product ihrer Untergruppen von der Ordnung 2^{α}, $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}, \dots$. Die erste dieser Untergruppen ist eine Hamilton'sche, alle anderen sind Abel'sche Gruppen. Die ganze Gruppe kann als intransitive Substitutionsgruppe dargestellt werden, in der jede dieser Untergruppen durch ein besonderes Buchstabensystem dargestellt wird.

3. Es giebt eine und nur eine H. Gr. von der Ordnung 2^{α} ($\alpha > 1$). Diese Gruppe enthält $2^{\alpha-2}$ Operatoren der Ordnung 2. Die übrigen Operatoren sind von der Ordnung 4 und ihre Quadrate einander gleich. Jeder Operator der Ordnung 4 ist mit der Hälfte aller Operatoren der Gruppe vertauschbar. Die Gruppe ist in Bezug auf die Untergruppe der Ordnung $2^{\alpha-2}$ mit der 4-Gruppe isomorph.

4. Das Product einer H. Gr. der Ordnung 2^{α} in eine Abel'sche Gruppe von ungerader Ordnung, deren sämtliche Operatoren mit jedem Operator der H. Gr. vertauschbar sind, ist eine H. Gr., und jede H. Gr. kann auf diese Weise erhalten werden.

5. Eine H. Gr. der Ordnung 2^{α} enthält $2^{\alpha-6}$ Quaterniongruppen als Untergruppen. Diese haben alle die Commutatorgruppe der ganzen Gruppe gemeinsam (C. R. **126**, 1406-8; vergl. das Referat oben S. 107).

Wbg.

G. A. Miller. On an important theorem with respect to the operation groups of order p^{α}, p being any prime number. Messenger (2) **27**, 119-121.

Der betreffende Satz lautet: „Eine Gruppe von der Ordnung p^{α} enthält eine solche Untergruppe von der Ordnung $p^{\alpha-\gamma}$ [wo $\frac{1}{2}\beta(\beta-1) = \gamma$], dass jeder einzelne der Operatoren dieser Untergruppe commutativ ist zu jedem der Operatoren einer Untergruppe von der Ordnung p^{β}, die in der gegebenen Untergruppe enthalten ist." Da $\beta \overline{\gtrless} \alpha - \frac{1}{2}\beta(\beta-1)$, so folgt $\alpha \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\beta(\beta+1)$. Daher gilt der Zusatz: Eine Gruppe, deren Ordnung $p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ überschreitet, enthält eine commutative Gruppe von der Ordnung p^{n}.

Lp.

G. A. Miller. On the supposed five-fold transitive function of 24 elements and $19! \div 48$ values. Messenger (2) **27**, 187-190.

„Mathieu beweist die Existenz der bemerkenswerten fünffach transitiven Gruppe von 12 Elementen und 7! Werten in seinem Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités (Liouville J. 1861, p. 241). In derselben Abhandlung behauptet er, eine fünffach transitive Function von 24 Elementen gefunden zu haben, die 19!/48 Werte hat. Zwölf Jahre später veröffentlichte er in demselben Journale einen Artikel über diese Function mit der Ueberschrift: Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités (F. d. M. **5**, 88, 1873). Wegen des grossen Interesses, das einer solchen Function beiwohnen würde, schien

es wünschenswert, eine vollständige Untersuchung über sie anzustellen. Es kam bald zu Tage, dass eine solche Function nicht existirte (C. Jordan, C. R. **79**, 1149-1151; F. d. M. **6**, 80, 1874). Diese Thatsache wird in dem Folgenden festgestellt." Lp.

G. A. Miller. On the groups which can be represented as multiply transitive substitution groups. Messenger (2) **28**, 104-107.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Gruppe der Ordnung mn als eine vielfache transitive Gruppe dargestellt werden kann, ist die, dass sie eine Untergruppe der Ordnung m enthält, die nicht selbstconjugirt ist und nicht eine beliebige selbstconjugirte Untergruppe enthält mit Ausnahme der Identität, und dass ein gewisser Operator der Gruppe nicht mehr als $m/(n-1)$ Operatoren dieser Untergruppe in Operatoren derselben Untergruppe transformirt. Zwei andere entsprechende Sätze für eine einfach und eine k-fach transitive Gruppe n^{ten} Grades. Lp.

G. A. Miller. On the total number of the transitive substitution groups that have a $1,\alpha$ isomorphism to a given group. Messenger (2) **28**, 84-87.

Die Anzahl der transitiven Substitutionsgruppen, welche einen $(1, \alpha)$-Isomorphismus zu einer gegebenen Gruppe (G) haben, ist gleich der Anzahl der Systeme von Untergruppen von G, die der folgenden Bedingung genügen: Jedes System schliesst alle Untergruppen ein, die einander in jedem Isomorphismus von G zu sich selbst entsprechen, worin die grösste selbstconjugirte Untergruppe (G_2) von G, die in irgend einer der Untergruppen (G_1) des Systems sich vorfindet, der Identität entspricht. Die Ordnung und der Grad der entsprechenden transitiven Gruppe ist der Quotient, den man durch Division der Ordnung von G durch den von G_2 und G_1 beziehungsweise erhält. Lp.

W. Burnside. On the representation of a group of finite order as a substitution group. Messenger (2) **28**, 102-103.

W. Burnside. Correction to the paper on the representation of a group of finite order as a substitution group (pp. 102-103). Ibid. 115.

Mit Bezug auf die im vorangehenden Referate besprochenen Untersuchungen von G. A. Miller betont Burnside die Notwendigkeit, die Frage zu entscheiden, wann zwei Substitutionsgruppen als verschieden zu betrachten sind, und stellt die folgenden beiden Definitionen auf: 1. Zwei Substitutionsgruppen g und g' sind als verschieden anzusehen, wenn nicht irgend eine ausgedehntere Substitutionsgruppe h, die g und g' enthält, so gefunden werden kann, dass in h die Gruppen g und g' conjugirt sind. 2. Zwei Substitutionsgruppen g und g' sind als ver-

schieden anzusehen, wenn nicht ein einfacher Isomorphismus derart zwischen ihnen aufgestellt werden kann, dass jedes Paar correspondirender Substitutionen von g und g' ähnliche Substitutionen sind. Lp.

E. Maillet. Des groupes transitifs de substitutions de degré N et de classe $N-1$. S. M. F. Bull. **26**, 249-259.

Es sei G eine transitive Gruppe vom Grade N, von der Klasse $N-1$ und der Ordnung $g = Nk$, so gelten folgende Sätze:

1. Ist G primitiv und $N = p^m r$ (p und r von einander verschiedene Primzahlen), so muss $r-1 \equiv 0 \pmod{p}$ sein, und $r \geqq 11$, wenn $p = 2$. 2. Ist $N = \varrho p$ (p Primzahl und relativ prim zu $\varrho > 1$), so muss $k < \frac{p\delta}{p-1} \leqq p$ sein, wo δ der grösste gemeinsame Teiler von $p-1$ und g, so dass $p \geqq 3$ ist. Wenn überdies G primitiv, so ist $p-1$ nicht relativ prim zu ϱ, $\varrho \geqq p+1$, $p > 5$; $p-1$ und $\varrho(\varrho-1)$ haben einen gemeinsamen Teiler > 2. 3. Ist $N = \varrho p^2$ (p Primzahl und relativ prim zu $\varrho > 1$), so ist $k < \frac{p^2\delta}{p^2-1} < p^2(p-1)$, wo δ der grösste gemeinsame Teiler von $(p-1)(p^2-1)$ und g. Wenn $p = 2$, so ist G imprimitiv und von der Ordnung 12ϱ ($\varrho = 3l+1$). Ist ferner G primitiv, so ist p^2-1 nicht relativ prim zu ϱ, $\varrho \geqq p^2+1$ und, wenn $p = 3$, ϱ eine gerade Zahl. 4. Ist G primitiv und $N \leqq 401$, so ist $N = p^m$ (p Primzahl) und G eine lineare Gruppe mit m reellen Indices. Wbg.

Éd. Maillet. Sur les groupes d'opérations et de substitutions. Assoc. Franç. St.-Étienne (1897) **26**, 190-197.

I. Der Verf. greift auf die Operationen und Gruppen von Operationen zurück, die er in Annali di Mat. **23** (F. d. M. **26**, 165, 1895) betrachtet hat, und durch die er den Begriff der Substitutionen und Gruppen von Substitutionen verallgemeinert hat. Hieraus leitet er den Beweis zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionen her. II. Es sei $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten und n verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sind $x_1, x_2, \dots, x_{2v-1}, x_{2v}$ die $2v$ imaginären Wurzeln ($v > 0$) dieser Gleichung, x_{2k-1} conjugirt zu x_{2k}, so enthält die Gruppe der Gleichung die Substitution:

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2v} x_{2v-1}).$$

Hieraus leitet man insbesondere ein Mittel ab, um zu erkennen, ob die Gruppe gewisser irreducibler Gleichungen von Primzahlgrad die alternirende Gruppe enthält. Lp.

G. Bagnera. La composizione dei gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo. Annali di Mat. (3) **1**, 137-228.

Die Gruppen, deren Ordnung das Product von zwei, drei und vier gleichen oder ungleichen Primzahlen ist, sind bereits von Netto (Substitutionentheorie), Hölder, Frobenius und Young behandelt worden (vergl. F. d. M. 1892, 1893), die sich bei der Aufstellung derselben hauptsächlich auf die bekannten Sätze von Sylow (Math. Ann. **5**) stützten. Hölder hat ferner (Gött. Nachr. 1895) die Zusammensetzung und Klassification aller Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl gegeben und gefunden, dass sie mit linearen Permutationsgruppen isomorph sind. Verf. giebt in der vorliegenden Arbeit zum ersten Male die Zusammensetzung aller Gruppen von der Ordnung p^5 (p Primzahl). Das Problem der Aufstellung aller Gruppen von der Ordnung p^ν zeigt erst für $\nu = 5$ seine wahre Gestalt; denn während es nur eine Gruppe von der Ordnung p, nur zwei von der Ordnung p^2, fünf von der Ordnung p^3 und 15 von der Ordnung p^4 giebt, falls $p > 2$ ist, hängt die Anzahl der Gruppen von der Ordnung p^5 wesentlich von dem Werte der Primzahl p ab. — Der Specialfall $p = 2$ ist von Levavasseur behandelt worden (C. R. **122**, 182, 1896), welcher mehr als 65 Gruppen von der Ordnung $2^5 = 32$ gefunden zu haben behauptete; seine Ergebnisse wurden von Miller berichtigt (C. R. **122**, 370, 1896), dessen Resultate aber auch noch nicht ganz exact sind: es giebt nämlich, wie Verf. im Verlaufe seiner Arbeit feststellt, nur 50 Gruppen von der Ordnung 32.

In dem ersten Teile der Arbeit stellt Verf. zunächst im § I das allgemeine Princip auf, welches als Fundament für die folgenden Untersuchungen dient: dasselbe besteht in einer eigentümlichen Darstellung der allgemeinsten zu einer gegebenen Gruppe holoëdrisch isomorphen Gruppe. Darauf behandelt er der Gleichmässigkeit der Methode halber im § II noch einmal die Gruppen von der Ordnung p^3 und p^4; die Unterschiede zwischen der Schlusstabelle dieses Paragraphen und den Resultaten von Hölder und Young sind nicht wesentlicher Natur, sondern rühren nur von der verschiedenen Wahl der reducirten Typen her: in den meisten Fällen genügt es, die Benennungen der erzeugenden Elemente zu vertauschen, um Uebereinstimmung zu erzielen. Im § III beschäftigt sich Verf. mit der Zusammensetzung der Gruppen von der Ordnung p^5, indem er sich auf den Fall beschränkt, wo diese mehr als einen Abel'schen Teiler vom Index p besitzen. — In dem zweiten Teile der Arbeit, welcher die §§ IV-VII umfasst, wird die Untersuchung der übrigen Fälle durchgeführt und die vollständige Klassification aller Gruppen von der Ordnung p^5 gegeben. Das Resultat ist folgendes: Es giebt 50 Gruppen von der Ordnung $2^5 = 32$ und 66 Gruppen von der Ordnung $3^5 = 243$. Die Anzahl aller Gruppen von der Ordnung p^5, wenn $p > 3$, ist eine der vier Zahlen $2p+65$, $2p+67$, $2p+69$, $2p+71$, je nachdem die Primzahl p einer der vier Congruenzen genügt:

$$p \equiv -1, \quad p \equiv 5, \quad p \equiv -5, \quad p \equiv 1 \pmod{12}.$$

Wbg.

G. Bagnera. Sopra i divisori normali d'indice primo di un gruppo finito. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 63-67.

Die Anzahl der Normalteiler von einem gegebenen Primzahlindex p, welche in einer endlichen Gruppe G enthalten sind, ist, vorausgesetzt, dass G Normalteiler von diesem Index besitzt, von der Form $(p^r-1)/(p-1)$; die Gruppe G ist dann, wenigstens meriedrisch, isomorph mit einer commutativen Gruppe von der Ordnung p^r, deren sämtliche Invarianten gleich p sind. — Allgemeiner ist die Zahl der Teiler vom Grade p^λ einer Abel'schen Gruppe von der Ordnung p^r, deren sämtliche Invarianten gleich p sind:

$$\nu_\lambda = \frac{(p^r-1)(p^{r-1}-1)\dots(p^{r-\lambda+1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^\lambda-1)}.$$

Diese Resultate sind von grossem Nutzen bei der Behandlung des schwierigen Cayley'schen Problems, alle möglichen Gruppen einer gegebenen Ordnung n zu finden; Verf. wendet sie zum Schluss auf die Untersuchung der Zusammensetzung einer Gruppe an, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl ist. Wbg.

H. Maschke. Die Reduction linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Math. Ann. **50**, 220-224.

H. Maschke. Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. Math. Ann. **50**, 492-498.

E. H. Moore. An universal invariant for finite groups of linear substitutions: with application in the theory of the canonical form of a linear substitution of finite period. Math. Ann. **50**, 213-219.

In diesen Arbeiten werden endliche lineare homogene Substitutionsgruppen arithmetisch untersucht.

In der erstgenannten Abhandlung erledigt Maschke das im Titel genannte Problem mit Hülfe gewisser, von R. Lipschitz (F. d. M. **19**, 139, 1887) behufs Aufstellung eines Kriteriums für die Endlichkeit der Periode einer linearen Substitution S benutzter Ausdrücke. Hiernach ergiebt sich, wenn $x_i' = \Sigma s_{ik} x_k$ eine derartige Substitution S von der Periode p darstellt, und $\Sigma = |a_{11}-\varrho, a_{12}, \dots, a_{1n}|$ ihre charakteristische Function ist, dass die Gleichung $\Sigma = 0$ nur p^{te} Einheitswurzeln zu Wurzeln haben kann.

Hieraus fliesst, wenn noch der Rang der Determinante Σ genauer berücksichtigt wird, die Lösung der gestellten Aufgabe, d. h. S wird auf eine kanonische Form gebracht, in der nur Einheitswurzeln auftreten. Hiermit in engem Zusammenhange steht die zweite Abhandlung von Maschke. Hier wird gezeigt, dass (von einer einzigen Einschränkung abgesehen) jede endliche Substitutionsgruppe G in n Variabeln

so transformirt werden kann, dass die Coefficienten der Gruppe „cyklotomisch", d. i. rationale Functionen von Einheitswurzeln werden.

Die fragliche Einschränkung ist die, dass G mindestens eine Substitution S enthalten soll, für welche die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung alle verschieden sind. Die Methode besteht darin, dass, gemäss der ersten Abhandlung, S auf ihre kanonische Form gebracht wird: $z_1' = \gamma_1 z_1$, $z_2' = \gamma_2 z_2$, ..., $z_n' = \gamma_n z_n$, wo die γ von einander verschiedene Einheitswurzeln sind. Damit geht G in eine Gruppe G' über, und in G' ist das Product von irgend zwei in derselben oder in zwei verschiedenen Substitutionen symmetrisch auftretenden Coefficienten cyklotomisch.

Indem dieses Kanonisirungsverfahren in geeigneter Weise noch einmal ausgeführt wird, gelangt der Verf. zum Ziele.

Moore löst die nämlichen Aufgaben mit Hülfe der Hermite'schen Formen (cf. J. für Math. **47,** 346). Eine endliche Gruppe G von $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lässt eine positive Hermite'sche Form der x absolut invariant, die auf die kanonische Form $\Sigma x_i \bar{x}_i$ gebracht werden kann. Daraus ergiebt sich zugleich, dass mit G eine holoedrisch isomorphe Gruppe von reellen $2n$ orthogonalen S verknüpft ist. Die Untersuchung ist eine Verallgemeinerung der Methode, mittels deren F. Klein (s. F. d. M. **7,** 53, 1875) die endlichen binären Gruppen abgeleitet hat.

Der gewonnene Satz wird combinirt mit dem oben erwähnten über die kanonische Form einer S von endlicher Periode.

Am Schlusse wird die allgemeinste Hermite'sche Form aufgestellt, die eine S von endlicher Periode zulässt.

Bezüglich der mannigfachen Prioritätsansprüche, die von verschiedener Seite her hinsichtlich der erwähnten Sätze erhoben werden können, sei auf die Abhandlung von Moore selbst verwiesen. My.

W. Burnside. On the canonical form of a linear substitution of finite order. Messenger (2) **28,** 111-114.

Die Arbeit ist durch die in dem vorangehenden Referate besprochenen Untersuchungen von Moore und Maschke über den von C. Jordan im J. für Math. **84,** 112 aufgestellten Satz betreffs einer linearen Substitution von endlicher Ordnung p veranlasst. „Soweit meine Kenntnis reicht, beruhen alle bis jetzt gegebenen Beweise des Satzes mehr oder weniger auf Eigenschaften der charakteristischen Determinante der Substitution. Auf den folgenden Seiten lege ich einen Beweis von äusserst elementarer Art vor, der bei jedem Schritt direct auf der einzigen Betrachtung beruht, dass die Ordnung der Substitution endlich ist." Lp.

H. Maschke. Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. Math. Ann. **51,** 253-298.

Das in der Ueberschrift bezeichnete Problem wird vom Verf. nach folgender Methode in systematischer Weise gelöst: Man nimmt an, man wäre im Besitz einer Reihe von Collineationen $E_1, E_2, \ldots, E_r$ in n Variabeln, von denen man weiss, dass sie eine endliche Gruppe $C_{k!}$ erzeugen, welche mit der symmetrischen Gruppe $G_{k!}$ der Vertauschungen von k Buchstaben holoedrisch isomorph ist. Auch soll bekannt sein, welchen Buchstabenvertauschungen die einzelnen Erzeugenden $E_1, E_2, \ldots, E_r$ entsprechen. Der Kürze wegen sollen auch diese Buchstabenvertauschungen mit $E_1, E_2, \ldots, E_r$ bezeichnet werden. Alsdann kann man mittels Hinzunahme eines neuen $(k+1)^{ten}$ Buchstabens eine Buchstabenvertauschung E_{r+1} angeben, welche mit den Vertauschungen $E_1, E_2, \ldots, E_r$ die symmetrische Vertauschungsgruppe $G_{(k+1)!}$ von $k+1$ Buchstaben hervorbringt. Diese Vertauschung E_{r+1} wird eine bestimmte endliche Periode besitzen, und auch die Perioden der Combinationen $E_1 E_{r+1}$, $E_2 E_{r+1}, \ldots, E_r E_{r+1}$ werden leicht anzugeben sein. Verf. setzt nun E_{r+1} mit unbestimmten Coefficienten als Collineation in n Variabeln an und unterwirft E_{r+1} für sich sowohl als auch in Combination mit den bereits bekannten Collineationen den angegebenen Periodenbedingungen. Diese für die Bestimmung der Collineation E_{r+1} notwendigen Bedingungen sind nun mit einander entweder verträglich oder nicht. Im ersteren Falle entsteht dann die weitere Frage, ob sie für den holoedrischen Isomorphismus der $C_{(k+1)!}$ mit der $G_{(k+1)!}$ auch hinreichend sind. Diese Frage, welche übrigens ein Problem der abstracten Gruppentheorie vorstellt, lässt sich, wie in § 1 mittels eines Satzes von Moore auseinandergesetzt wird, in dem Sinne entscheiden, dass sich in der That eine bestimmte Anzahl von Operationen E für jedes k stets so wählen lässt, dass die angegebenen Periodenbedingungen für den holoedrischen Isomorphismus notwendig und hinreichend sind. Genau das Gleiche gilt für die alternirenden Gruppen. Geht man jetzt von den niedrigsten Werten für k aus, für welche die betreffenden Collineationsgruppen ohne weiteres angegeben werden können, so führt das auseinandergesetzte Verfahren successive in allgemeinster Weise zu den Collineationsgruppen für höhere Werte von k. — Während so theoretisch eine Methode zur Lösung des fraglichen Problems gegeben ist, bleibt es ungewiss, wie weit sich dieselbe rechnerisch durchführen lässt. Hier ist Folgendes zu beachten: Durch Einführung neuer Variabeln oder, was dasselbe ist, mittels Transformation durch eine beliebige lineare Substitution im gruppentheoretischen Sinne lässt sich jede Collineationsgruppe auf unendlich viele Arten (linear) transformiren. Verf. betrachtet zwei Collineationsgruppen, die sich in einander transformiren lassen, als identisch, und als verschieden nur solche, die sich nicht in einander transformiren lassen. Hieraus folgt noch nicht, dass zwei Collineationsgruppen, welche mit einer und derselben Buchstabenvertauschungsgruppe holoedrisch isomorph sind, im soeben genannten Sinne identisch sein müssen; vielmehr treten im Verlaufe der Untersuchung viele Beispiele auf, wo sich zwei derartige Gruppen nicht in einander transformiren lassen. Es kommt nun darauf an, unter allen

identischen Collineationsgruppen in jedem Falle eine solche zu Grunde zu legen, welche in möglichst übersichtlicher Form erscheint. Dies lässt sich erreichen, wenn man die Gruppen durchgängig in die sogenannte Hermite'sche Normalform transformirt, wie in § 2 des näheren auseinandergesetzt wird. — Mit den genannten Hülfsmitteln lässt sich nun das fragliche Problem in der That mit einem relativ geringen Aufwand an Rechnung vollständig erledigen. Als besonders bemerkenswert sei noch erwähnt (man ist es sonst in der Mathematik anders gewohnt), dass die zur Bestimmung der $C_{k!}$ und $C_{\frac{1}{2}k!}$ erforderlichen Rechnungen im allgemeinen um so einfacher werden, je grösser k ist. Eine Zusammenstellung der Resultate für die ternären Gruppen findet sich in § 7. Hier giebt es für $k = 4, 5, 6$ immer nur je eine $C_{\frac{1}{2}k!}$ und $C_{k!}$. Die erst in neuerer Zeit entdeckte $C_{\frac{1}{2}6!}$ (Valentiner, Wiman) erscheint hier in einer besonders einfachen und übersichtlichen Gestalt. — Für quaternäre Gruppen sind die Resultate am Schluss der Arbeit zusammengestellt. Die Anzahl der von einander verschiedenen Gruppen ist hier wesentlich grösser, nämlich 25. In Uebereinstimmung mit den Resultaten von Wiman (Gött. Nachr. 1897, Heft 1 und 2) ergiebt sich, dass keine quaternären $C_{\frac{1}{2}k!}$ für $k>7$ und keine $C_{k!}$ für $k>6$ existiren können. Wbg.

L. Heffter. Ueber metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen. Math. Ann. **50,** 261-268.

Bei der modernen geometrischen Repräsentation einer Gruppe von Operationen (vergl. Dyck, Math. Ann. **20,** 1ff., 1882) hat das zu einer geschlossenen Fläche zusammengebogene Fundamentalpolygon vornehmlich die Eigenschaft, bei allen Operationen der Gruppe, als Ganzes betrachtet, invariant zu bleiben und nur Drehungen im Sinne der Analysis situs zu erleiden, gerade wie das Tetraeder bei der Gruppe der Tetraederdrehungen (Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 14). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie speciell bei metacyklischen Gruppen ein solches invariantes Gebilde, das natürlich mit dem entsprechenden Dyck'schen geschlossenen Polygonnetz nahe verwandt, auf sehr einfache, directe Art herzustellen ist. Dabei treten Nachbarelemente auf (vergl. Heffter, Ueber das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann. **38,** 477ff., 1891), und zwar u. a. die vom Verf. (a. a. O. S. 491, Anm.) schon erwähnten, sich selbst dualistischen Netze, deren Flächen Nachbargebiete und deren Ecken gleichzeitig Nachbarpunkte sind. Endlich gestattet jenes geometrische Gebilde unmittelbar die Aufstellung einer Function, welche bei den Substitutionen der metacyklischen Gruppe und nur bei diesen ungeändert bleibt, d. h. einer metacyklischen Function. Wbg.

L. Heffter. Ueber Abel'sche Gruppen. J. für Math. **119,** 261-266.

Für eine Abel'sche Gruppe von n Elementen lassen sich bekanntlich gewisse Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ so auswählen, dass sie bez. zu

den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ gehören (d. h. dass erst die Potenzen $g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, \ldots, g_\nu^{n_\nu}$ äquivalent der Einheit werden), und dass jedes Element der Gruppe einmal und nur einmal in der Form $g_1^{a_1} g_2^{a_2} g_3^{a_3} \ldots g_\nu^{a_\nu}$ $(0 \leqq a_k \leqq n_k)$ darstellbar ist, wobei $n_1 n_2 \ldots n_\nu = n$ und jede der Zahlen n_k durch die folgende n_{k+1} teilbar ist. Jedes der n Elemente einer Abel'schen Gruppe gehört also entweder zu n_1 oder zu einem Divisor d von n_1. Verf. löst die Frage nach der Beziehung zwischen der Anzahl $\psi(d)$ der zu d gehörigen Elemente und der bekannten arithmetischen Function $\varphi(d)$, einer Beziehung, welche für den Specialfall einer cyklischen Gruppe in die bekannte Relation $\psi(d) = \varphi(d)$ übergeht. (Gleichzeitig und unabhängig vom Verf. hat Netto dieselbe Frage im zweiten Bande seiner „Vorlesungen über Algebra" behandelt.)

Wbg.

L. E. Dickson. **The first hypoabelian group generalized.** Quart. J. **30,** 1-16.

Verf. verallgemeinert Jordan's Entwickelungen (Traité des substitutions, 199-206) von dem ganzzahligen Körper modulo 2 auf den Galois'schen Zahlkörper von der Ordnung 2^n. Wbg.

L. E. Dickson. **Simplicity of the Abelian group on two pairs of indices in the Galois field of order 2^n, $n > 1$.** Quart. J. **30,** 383-384.

Die vorliegende Note bildet einen Nachtrag zu der Arbeit des Verf. „On a triply infinite system of simple groups" (Quart. J. **29,** 169-178, 1897), indem sie den dort nicht behandelten Fall $p = 2$, $m = 2$, $n > 1$ erledigt. Wbg.

L. E. Dickson. **1. Orthogonal group in a Galois field. 2. Systems of simple groups derived from the orthogonal group.** American M. S. Bull. **4,** 196-200; 382-389.

Verf. dehnt Jordan's Sätze über orthogonale Gruppen (Traité des substitutions, §§ 197-212) auf den Galois'schen Zahlkörper von der Ordnung p^n $(GF[p^n])$ aus. — Aus der zweiten Arbeit mögen die beiden folgenden Theoreme hervorgehoben werden:

1. Für $p > 2$ besitzt jede ternäre orthogonale Gruppe im $GF[p^n]$ eine Untergruppe vom Index 2 und der Ordnung $\frac{1}{2}p^n(p^{2n}-1)$, welche mit der Gruppe der linearen gebrochenen Substitutionen von der Determinante 1 mit einem Index einfach isomorph ist.

2. Die Quadrate der linearen Substitutionen mit m Indices im $GF[p^n]$, $p \neq 2$, welche die Summe der Quadrate der m Indices ungeändert lassen, erzeugen eine Gruppe, welche für $m = 2k+1$ die Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(p^{2nk}-1)p^{2nk-n}(p^{2nk-2n}-1)p^{2nk-3n} \ldots (p^{2n}-1)p^n$$

hat und einfach ist, ausser wenn $p^n = 3$, $m = 3$; dagegen besitzt sie für $m = 2k > 4$ die Factoren der Zusammensetzung 2 und die Ordnung

$$\tfrac{1}{4}[p^{nk}-(\pm 1)^k]\, p^{nk-n}(p^{2nk-2n}-1)p^{2nk-3n}\dots(p^{2n}-1)p^n,$$

wo das Vorzeichen $\pm$ von der Form $4l\pm 1$ von p^n abhängt.

Wbg.

L. E. Dickson. **The structure of the hypoabelian groups.** American M. S. Bull. **4**, 495-510.

Verf. vereinfacht die allgemeinen Begriffe und die einzelnen Entwickelungen in der Theorie der beiden hypoabelschen Gruppen Jordan's (Traité des substitutions, 199-206) sowie der vom Verf. (Quart. J. **30**, 1-16, vergl. das Referat S. 118) gegebenen Verallgemeinerung der ersteren dieser beiden Gruppen und berichtigt einige Irrtümer Jordan's.

Wbg.

L. E. Dickson. **Concerning a linear homogeneous group in $C_{m,q}$ variables isomorphic to the general linear homogeneous group in m variables.** American M. S. Bull. **5**, 120-135.

Es bedeute

$$(a_{ij})\ :\ \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j \qquad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$(a_{ij}'') = (a_{ij})(a_{ij}'), \quad \text{wo}$$

$$a_{ij}'' = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}a_{kj}' \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Ferner mögen die q^{ten} Minoren der Determinante $|a_{ij}|$ nach Sylvester mit $\begin{vmatrix} i_1 i_2 \dots i_q \\ j_1 j_2 \dots j_q \end{vmatrix} a$ bezeichnet werden. Verf. betrachtet die lineare Substitution in $C_{m,q}$ Variabeln

$$[a]: Y'_{i_1 i_2 \dots i_q} = \sum_{l_1 \dots l_q} \begin{vmatrix} i_1 i_2 \dots i_q \\ l_1 l_2 \dots l_q \end{vmatrix} a\, Y_{l_1 l_2 \dots l_q},$$

worin für die Systeme $(i_1, \dots, i_q)$ und $(l_1, \dots, l_q)$ successive die $C_{m,q}$ Combinationen der Zahlen $1, 2, \dots, m$ zu je q zu nehmen sind und $i_1 < i_2 < \dots < i_q$, $l_1 < l_2 < \dots < l_q$ ist. Aus bekannten Determinantensätzen ergiebt sich die Compositionsformel

$$[a][a'] = [a''];$$

die Substitutionen $[a]$ bilden daher zugleich mit den Substitutionen (a) eine Gruppe $G_{C_{m,q}}[a] = C_{m,q}$, welche Verf. die q^{te} Componirte der Gruppe $G_m(a)$ nennt. „Eine lineare Gruppe ist mit jeder ihrer Componirten isomorph.“ Verf. stellt die infinitesimalen Transformationen von $C_{m,q}$ auf (§§ 5-7) und untersucht die Eigenschaften der Pfaff'schen Invarianten von $C_{m,2}$ (§§ 8-10) und $C_{m,m-2}$ (§§ 16-18), insbesondere die von $C_{m,2}$, bez. $C_{m,m-2}$ auf dieselben ausgeübten Transformationen. Zwischen $C_{m,q}$ und $C_{m,m-q}$ besteht eine gewisse Reciprocität (§§ 11-15).

Wbg.

E. H. Moore. Concerning Abelian-regular transitive triple systems. Math. Ann. **50**, 225-240.

Verf. beschäftigt sich im Anschluss an die Arbeiten von Netto (Math. Ann. **42**, 143-152, 1893), Heffter (Math. Ann. **49**, 101-112, 1897) und von ihm selbst (Math. Ann. **43**, 271-285, 1893) mit solchen Tripelsystemen, deren zugehörige Substitutionsgruppe transitiv ist und eine reguläre Abel'sche Untergruppe enthält, deren Ordnung gleich ihrem Grade ist. Die ausführlichere Angabe der Resultate setzt indessen so viele Erklärungen voraus, dass auf die Abhandlung selbst verwiesen werden muss. Wbg.

F. Gerbaldi. Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. Math. Ann. **50**, 473-476; Palermo Rend. **12**, 23-94; Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 242-246.

Verf. bemerkt, dass er die Configuration eines „Sextupels von Kegelschnitten in Involution", welche der von Valentiner (Kjöb. Skrift. (6) **5**, 1889) entdeckten und von Wiman (Math. Ann. **47**, 1896) genauer untersuchten Gruppe G_{360} entspricht, bereits im Jahre 1882 (Torino Atti **17**) gefunden hat, und teilt einige Resultate mit, welche sich ihm aus der Beschäftigung mit der algebraischen Theorie dieser Gruppe in Verbindung mit der allgemeinen Gleichung sechsten Grades, wie Klein sie in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" behandelt, ergeben haben. Wbg.

J. E. Campbell. Note on the theory of continuous groups. American M. S. Bull. **4**, 407-408.

Entgegnung auf einen Einwurf, welcher der vom Verf. (Lond. M. S. Proc. **23**, 381-390) gegebenen Verallgemeinerung eines Lie'schen Satzes von Lovett (American M. S. Bull. **4**, 59-63, 1897) gemacht wurde. Wbg.

G. Brunel. Sur un groupe d'opérations. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 30-33.

Man denke sich einen Würfel auf eine horizontale Ebene gestellt, so dass seine untere Fläche ein in der Ebene gezeichnetes congruentes Quadrat deckt; dann sind 24 Stellungen dieser Art für den Würfel möglich. Denkt man sich ferner die drei Axen des Würfels, welche die Mittelpunkte der Gegenflächen verbinden, so kann der Würfel um je eine der drei Axen um je einen rechten Winkel gedreht werden, damit die oben beschriebenen Stellungen erreicht werden. Man nenne eine solche Rotation um die erste Axe α, um die zweite β, um die dritte γ, eine p-malige Rotation um die erste Axe α^p u. s. w., so ist die Operation $\beta^r\gamma^q\beta^p\alpha^m$ leicht verständlich. Diese Betrachtung wird auf mehrere combinirte Würfel ausgedehnt. Lp.

G. Brunel. Sur une suite remarquable d'opérations. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 86-90.

Man betrachte einen Inbegriff von einander verschiedener Operationen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und die zugehörigen inversen Operationen $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \ldots, P_n^{-1}$. Der Verf. ermittelt die Construction einer Folge solcher Operationen, dass das Endergebnis die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn eine beliebige Operation P_k der gegebenen sich auf die identische Operation reducirt, so soll die dann bestehende gesamte Operation gleicherweise auf die identische Operation zurückkommen. Lp.

Weitere Litteratur.

H. Bourget. Sur une classe supérieure de groupes hyperabéliens. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 95 S. 4°. Referat in Abschnitt VII.

L. E. Dickson. Systems of simple groups derived from the orthogonal group. California Acad. Proc. **1,** 29-40.

L. E. Dickson. A new triply-infinite system of simple groups obtained by a twofold generalization of Jordan's first hypoabelian group. American M. S. Bull. (2) **5,** 10-12.

A. Emch. Ueber orthogonale Systeme und einige technische Anwendungen. Pr. Biel: Schüler. 20 S. 4°.

G. A. Miller. On the simple isomorphisms of a substitution-group to itself. Phil. Mag. (5) **45,** 234-242.

G. A. Miller. On the groups which are determined by a given group. Amer. Math. Monthly **5,** 221-224.

G. A. Miller. On a method to construct intransitive substitution groups. Amer. Math. Monthly **5,** 288-290.

Th. Mollien. Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen. Dorpat Naturf. Ges. **11,** 259-274.

Th. Mollien. Ueber die Anzahl der Variabeln einer irreductibeln Substitutionsgruppe. Ibid. 277-288.

B. Determinanten.

F. J. Studnička. Ueber die Symbolik der Determinanten überhaupt und diejenige der adjungirten Determinanten höherer Ordnung insbesondere. Vestnik **7,** 73-81 (Böhmisch).

Vorschlag zu einer einheitlichen Symbolik der Determinanten und Erweiterung derselben durch Einführung des Begriffes einer complementaren und einer adjungirten Determinante höherer Ordnung. Ein in der r^{ten} Zeile und der s^{ten} Colonne gelegenes Element wird hierbei durch $l_{r \atop s}$ bezeichnet. Sda.

F. J. Studnička. Beitrag zur Determinanten-Symbolik. Vestnik **7,** 159-164 (Böhmisch).

Fortsetzung der im vorangehenden Referate angeführten Abhandlung. Weitere Vereinfachungen durch Weglassung des Trägers l und somit Annäherung an die ursprünglich von Leibniz vorgeschlagene Bezeichnungsweise. Neue Relationen zwischen den Subdeterminanten adjungirter höherer und complementarer niederer Systeme. Sda.

F. J. Studnička. Beitrag zur Lehre von den schief-symmetrischen Determinanten. Vestnik 7, 235-239 (Böhmisch).

Neuer Beweis des Satzes, dass eine schief-symmetrische Determinante der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung ein Quadrat ist. Sda.

F. J. Studnička. Wie lässt sich die Subdeterminante k^{ter} Ordnung des Productes zweier Determinanten der n^{ten} Ordnung mit Hülfe ihrer zugehörigen Subdeterminanten ausdrücken? Vestnik 7, 239-247 (Böhmisch).

Aufstellung und Beweis eines von Pascal in seiner Schrift „I determinanti“ nach Erachten des Verf. in unklarer Fassung gegebenen Satzes. Anwendung auf die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Sda.

F. J. Studnička. Ueber eine neue Gattung von adjungirten Determinanten. Vestnik 7, 283-291 (Böhmisch).

Eine Determinante n^{ter} Ordnung $\varDelta_n$, nach der vom Verf. eingeführten Symbolik geschrieben in der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & & n \\ \vdots & & \\ n & & n \\ 1 & \cdots\cdots & n \end{vmatrix}$$

besitzt Subdeterminanten von der Ordnung 1, 2, 3, ..., k, deren Anzahl n_r^2 beträgt, wenn r ihre Ordnung bezeichnet. Aus diesen Subdeterminanten als Elementen hergestellte neue Determinanten nennt der Verf. zu $\varDelta_n$ adjungirt von der Klasse 1, 2, ..., k. Einer jeden Determinante n^{ter} Ordnung sind auf diese Weise $(n-2)$ solcher Determinanten adjungirt von der Klasse 2, 3, 4, ..., $(n-1)$. Behandlung derselben.

Sda.

F. J. Studnička. Beitrag zur Lehre von den Potenzdeterminanten. Vestnik 7, 350-358 (Böhmisch).

Neue Eigenschaften der von dem Verf. eingeführten Potenzdeterminanten und hieraus hervorgehende neue Sätze der Zahlentheorie. Der allgemeine Typus einer Potenzdeterminante ist eine Determinante n^{ter}

Ordnung, deren $(m+1)^{te}$ Zeile lautet $a^{r_m}, b^{r_m}, c^{r_m}, \ldots, n^{r_m}$; der einfachste Fall derselben hat statt für $r_m = m$. Sda.

F. J. Studnička. Neue Lehrsätze über einige specielle Determinanten. Vestnik 7, 477-493 (Böhmisch).

Neue Beiträge zur Theorie der cyklischen, anticyklischen, ortho- oder perisymmetrischen und Wronski'schen Determinanten. Nachtrag zu der vom Verf. in Prag. Ber. 1898, 235 veröffentlichten Abhandlung, enthaltend die Lösung der Aufgabe, das Product zweier Summen von je n Quadraten durch die Summe von n Quadraten auszudrücken. Für $n = 3$ lautet der Lehrsatz folgendermassen:

$$(a^2+b^2+c^2).(a^2+b^2+d^2) = (a^2+b^2+cd)^2+(ad-ac)^2+(bd-bc)^2.$$

Sda.

F. J. Studnička. Ableitung neuer allgemeiner Formeln der Goniometrie. Vestnik 6, 369-376 (Böhmisch).

Aus einer einfachen Potenzdeterminante n^{ter} Ordnung, nämlich einer Determinante, deren $(r+1)^{te}$ Zeile lautet $a_1^r, a_2^r, a_3^r, \ldots, a_n^r$, und die in der Form $s_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})$ geschrieben werden kann, leitet der Verf. unter Anwendung der Substitution $a_k = \operatorname{tg}\alpha_k$ eine beträchtliche Anzahl merkwürdiger allgemeiner Formeln der Goniometrie ab, in denen n verschiedene Winkel auftreten. Zum Schlusse zeigt der Verf. an einem Beispiele, wie man unter Anwendung einer allgemeinen Potenzdeterminante zu noch zahlreicheren und interessanteren Formeln gelangen könnte. (Bez. der allg. Potenzdeterminante vergl. man Vestnik 7, 350 desselben Autors.) Sda.

F. J. Studnička. Ein neuer Lehrsatz über Determinanten. Vestnik 8, 167-169 (Böhmisch).

Aufstellung und Beweis des Satzes, dass eine Determinante n^{ter} Ordnung verschwindet, wenn deren Zeilen nach Weglassung von $(n-k)$ Colonnen n arithmetische Reihen von höchstens $(k-2)^{ter}$ Ordnung darstellen. Sda.

E. Waelsch. Ueber eine geometrische Behandlungsweise der Elemente der Determinantentheorie. Monatsh. f. Math. 9, 207-214.

Nachdem einige Sätze über Polygone eines Punktequadrats (quadratischen Gitters) zusammengestellt worden sind, beweist der Verf. mit ihrer Hülfe die Fundamentalsätze der Determinantentheorie. Dabei ergiebt sich ein besonders anschaulicher Beweis für das Multiplicationstheorem zweier Determinanten und Matrizen. Jhk.

N. Traverso. Sopra la differenza di due determinanti qualunque. Periodico di Mat. **13**, 146-148.

Es sei $\Delta = |a_{ik}|$, wo $i, k = 1, 2, \ldots, n$, und Δ' gehe aus Δ dadurch hervor, dass man $m (\overline{\gtrless} n^2)$ der Elemente: $a_{r_1 s_1}, \ldots, a_{r_m s_m}$ in $a'_{r_1 s_1}, \ldots, a'_{r_m s_m}$ verwandele. Der Verf. stellt eine Formel auf, durch welche $\Delta' - \Delta$ vermittelst der m Differenzen $a'_{r_1 s_1} - a'_{r_1 s_1}$ etc. ausgedrückt wird, und wendet diese Formel zur Verallgemeinerung einiger bekannten Formeln aus der Theorie der Determinanten an. Lp.

W. H. Metzler. Compound determinants. American J. **20**, 253-272.

W. H. Metzler. A theorem in determinants. American J. **20**, 273-276.

In der ersten Notiz verwendet der Verf. eine ähnliche Methode wie diejenige, von der er im American J. **16**, 131-150 (F. d. M. **25**, 215, 1894) Gebrauch gemacht hat, um gewisse Unterdeterminanten der Componirten einer gegebenen Determinante vermittelst der letzteren und ihrer Unterdeterminanten auszudrücken.

Das Theorem der zweiten Notiz ist eine Ausdehnung desjenigen, welches Binet im Journ. de l'Ec. Polyt. **11**, 280-302 gegeben hat. Jhk.

R. F. Muirhead. Question 13651. Ed. Times **69**, 52-54.

Aus den Elementen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{matrix}$$

lassen sich 40 Determinanten bilden, indem man je zwei Colonnen und eine Zeile ausstreicht. Von diesen können 6 so gewählt werden, dass ihr Verschwinden das Verschwinden aller übrigen nach sich zieht. Ausdehnung auf Determinanten r^{ter} Ordnung bei p Colonnen und q Reihen. Die Lösung von L. E. Reay wird mitgeteilt. Lp.

E. J. Nanson. On partial compounds. Messenger (2) **28**, 17-18.

Man nehme zwei rechtwinklige Anordnungen von Elementen mit demselben Unterschuss (deficiency) oder Ueberschuss (redundancy), componire eine beliebige Anzahl von Colonnen der ersten reihenweise mit der nämlichen Anzahl von Colonnen der zweiten und rändere die so gebildete Anordnung vertical mit den übrigen Colonnen der ersten Anordnung, horizontal mit den übrigen Colonnen der zweiten. Die Determinante der so erhaltenen quadratischen Anordnung wird eine partielle Componirte der gegebenen Anordnungen genannt. Dieselbe ist

Null, wenn die Anordnungen unterschüssig sind, oder wenn ihre uncomponirten Teile überschüssig sind. In allen anderen Fällen ist der Wert der partiellen Componirten $(-1)^{bb'}\Sigma DD'$, wo D die aus der ersten Anordnung durch Wegstreichen einer Zahl der componirten Colonnen gebildeten Determinante ist, D' die aus der zweiten Anordnung durch Wegstreichen der correspondirenden Colonnen gebildete Determinante; Σ bezeichnet die Summation bezüglich aller Arten der Bildung der Determinante D, und b, b' sind die Tiefen der Ränderung.

Lp.

G. Fontené. Sur un système remarquable de n relations entre deux systèmes de n quantités. Nouv. Ann. (3) **17**, 317-328.

Bezeichnen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ die n^{ten} Einheitswurzeln, so lässt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1 x_n + u_2 x_{n-1} + \cdots + u_n x_1 &= 0, \\ u_2 x_n + u_3 x_{n-1} + \cdots + u_1 x_1 &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \\ u_n x_n + u_1 x_{n-1} + \cdots + u_{n-1} x_1 &= 0 \end{aligned}$$

zunächst zurückführen auf die beiden Systeme

$$u_1 + \theta_i u_2 + \theta_i^2 u_3 + \cdots + \theta_i^{n-1} u_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, p),$$
$$x_1 + \theta_x u_2 + \theta_x^2 x_3 + \cdots + \theta_x^{n-1} x_n = 0 \qquad (x = p+1, p+2, \dots, n);$$

und diese lassen sich wie folgt lösen:

$$x_{h+1} = \alpha_1 \theta_1^{-h} + \alpha_2 \theta_2^{-h} + \cdots + \alpha_p \theta_p^{-h} \qquad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$
$$u_{h+1} = a_{p+1} \theta_{p+1}^{-h} + a_{p+2} \theta_{p+2}^{-h} + \cdots + a_n \theta_n^{-h} \qquad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

wo die p Grössen α und die $n-p$ Grössen a willkürliche Parameter darstellen.

Jhk.

C. Stephanos. Sur un mode de composition des déterminants et des formes bilinéaires. Batt. G. **36**, 376-379.

Das hier mitgeteilte Verfahren rührt, wie der Verf. selbst in einer Nachschrift mitteilt, schon von Kronecker her. (Vgl. Encyklopädie d. math. Wissensch. **1**, 40.)

Jhk.

C. Weltzien. Ueber Potenzen von Determinanten. Math. Ann. **50**, 282-284.

Der Verf. erbringt den Beweis für die allgemeine Gültigkeit einer Recursionsformel, die er in dem Programm der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule für den Fall der Determinanten dritter Ordnung aufgestellt hatte.

Jhk.

B. Igel. Beweis einiger Determinantentheoreme von Sylvester. Monatsh. f. Math. **9**, 47-51.

Der Verf. leitet aus der Transformation der bilinearen Form eine Reihe Sylvester'scher Determinantentheoreme her (vgl. Phil. Mag. (2) **1**, 1851 und Netto, J. für Math. **114**, 1895). Jhk.

A. Brambilla. Intorno ad alcuni determinanti. Periodico di Mat. **13**, 169-175.

Versteht man unter $x^{(n)}$ die n^{te} Factorielle von x, d. h. also $x^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$, so bildet der Verfasser in Analogie zu den Potenzdeterminanten jetzt Determinanten aus Factoriellen. Es ist z. B.:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \\ 1 & a_1 & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Eine andere Formel wird für $|(a_i+k)^{(n)}|$ entwickelt, wo $i, k = 0, 1, 2, \dots, m$ u. dergl. m. Dann folgen Determinanten aus Binomialcoefficienten nach Hankel, Stern, Zeipel, Pascal. Lp.

T. Cazzaniga. Sul calcolo di qualche determinante numerico. Batt. G. **36**, 362-367.

Der Verf. benutzt die von Mangeot (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **14**, 247, 1897) für $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{-1}$ und $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{\frac{1}{2}}$ gegebenen Entwickelungen, in welche Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 4a_2 & 3a_1 & 2a_0 & \dots & 0 \\ 6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n-2)a_{n-1} & (2n-3)a_{n-3} & (2n-4)a_{n-4} & \dots & (n-1)a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

eingehen, um umgekehrt Determinanten dieser Art zu berechnen. So ergiebt sich, wenn die an erster Stelle genannte Function gleich e^{-x} gewählt wird, der Wert obiger Determinante für $a_i = 1/i!$ gleich der positiven Einheit. Jhk.

T. Cazzaniga. Relazioni fra i minori di un determinante di Hankel. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 610-614.

E. Pascal hat dem Verf. das folgende Theorem mitgeteilt: Unterdrückt man in der Hankel'schen Determinante

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix}$$

die erste und dritte Horizontale wie Verticale, so ist die entstehende Unterdeterminante gleich der Summe der beiden Unterdeterminanten, welche sich ergeben, wenn man die erste und zweite Horizontale sowie die erste und vierte Verticale, bezw. die erste und zweite Horizontale sowie die dritte und vierte Verticale unterdrückt. Die vorliegende Notiz enthält eine Verallgemeinerung dieses Theorems. Jhk.

T. Cazzaniga. Sui determinanti d'ordine infinito. Annali di Mat. (2) **26,** 143-218.

In der vorliegenden Arbeit werden die von Hill (Acta Math. 8), Pincherle (Ann. di Mat. 1884), Poincaré (S. M. F. Bull. **13, 14**) und Helge v. Koch (Acta Math. **15, 16**) über specielle Determinanten unendlich hoher Ordnung gefundenen Resultate verallgemeinert und zusammenhängend dargestellt. Insbesondere giebt der Verf. eine vollständige Theorie der „Normaldeterminanten" unendlich hoher Ordnung. Als solche bezeichnet H. v. Koch diejenigen Determinanten, bei denen das Product der Diagonalglieder absolut convergirt und desgleichen die doppelte Reihe der nicht in der Diagonale befindlichen Glieder. Ein specieller Fall ist die von Poincaré untersuchte Determinante, in der sämtliche Diagonalglieder gleich der positiven Einheit sind. Hierbei ergiebt sich dem Verf. eine Reihe neuer Theoreme.

In einem besonderen Kapitel werden die Untersuchungen von Pincherle weiter geführt. Dieselben bringen den Verf. zu einer speciellen Klasse von Determinanten, den Nulldeterminanten, deren Elemente a_{ik} der folgenden Bedingung genügen: Bezeichnen r, s, A drei positive Zahlen, so dass $|rs| = \gamma^2 > 1$, dann soll

$$a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i s^k}$$

sein für alle Werte von $i, k = 1, \dots, \infty$. Unter dieser Bedingung ergiebt sich der Wert der Determinante gleich Null.

Zum Schluss wendet der Verf. seine Theorie auf die Lösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen zwischen unendlich vielen Unbekannten an, in Ausdehnung eines Verfahrens, das H. v. Koch für ein homogenes lineares Gleichungssystem mitgeteilt hat. Jhk.

T. Cazzaniga. Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. Annali di Mat. (3) **1,** 83-94.

Die vorliegende Notiz ergänzt ein Kapitel der vorstehend referirten Arbeit des Verfassers, in welchem die Nulldeterminanten behandelt worden sind. Jhk.

H. F. Baker. Note on a property of Pfaffians. Lond. M. S. Proc. **29,** 141-142.

Bedeuten (r, s) die Elemente einer schiefsymmetrischen Determinante, für welche also $(r, s) = -(s, r)$ und $(r, r) = 0$ ist, so ist die Quadratwurzel aus der Determinante $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung bekanntlich ein rationales Aggregat von $\frac{2n!}{2^n . n!}$ Gliedern der Form $(12)(34) \dots (2n-1, 2n)$, wo in den Klammern die Indices alle möglichen verschiedenen Werte annehmen können. Bezeichnet man diese Wurzel mit $(1\ 2\ 3 \dots 2n)$ und bedeuten x, y zwei von 1 bis $2n+1$ verschiedene Indices, so werden folgende zwei Sätze verificirt:

1. Wird in der Entwicklung von $(1\ 2 \dots 2n)$ jedes Glied $(r\,s)$ ersetzt durch $(x y r s)$, so erhält man $(xy)^{n-1}(xy\,1\,2 \dots 2n)$.

2. Wird in der Entwicklung von $(y\,1\,2 \dots 2n+1)$ jedes Glied (rs), welches nicht den Index y enthält, durch $(x y r s)$ ersetzt und jedes Glied (yr) durch (xr), so erhält man $(xy)^n (x\,1\,2 \dots 2n+1)$. Sh.

E. Bortolotti. Sulla generalizzazione della proprietà del determinante wronskiano. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 45-50.

G. Vivanti. Sul determinante wronskiano. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 194-197.

Das bekannte Wronski'sche Theorem, wonach aus dem Verschwinden der Wronski'schen Determinante von n reellen Functionen einer reellen Veränderlichen die Existenz einer linearen homogenen Relation mit constanten Coefficienten zwischen jenen Functionen hervorgeht und umgekehrt, ist von Peano schärfer gefasst und auf der Grundlage der Grassmann'schen Methode bewiesen worden. Der Verf. der zweiten Notiz giebt einen einfacheren Beweis, während in der ersten Notiz jenes Theorem verallgemeinert wird. Jhk.

L. Ravut. Remarques sur une matrice. Nouv. Ann. (3) **17**, 118-120.

Nachweis, dass für die Matrize

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

identisch $(S^2-1)(S^3-1) = 0$ ist. Jhk.

Th. Muir. The relations between the coaxial minors of a determinant of the fourth order. Edinb. Trans. **39**, 323-339.

Sind von einer Determinante vierten Grades die diagonalen Elemente, die Hauptunterdeterminanten zweiten und drei von denen dritten Grades C_1, C_2, C_3 bekannt, so ist sowohl die vierte C_4 als auch die ganze Determinante D bestimmt und zwar vierdeutig. Die Ausdrücke

für C_4 und D werden zunächst unter der Voraussetzung hergeleitet, dass die diagonalen Elemente sämtlich verschwinden, auf welchen Fall der allgemeine leicht zurückgeführt werden kann. Die Gleichung vierten Grades, welcher D bez. C_4 genügt, lässt sich mit Hülfe einer Determinante übersichtlich angeben. Es folgen einige Anwendungen auf die Darstellung trigonometrischer Ausdrücke. Stz.

R. Guimarães. Règle pratique pour développer les déterminants du 4[me] ordre. Assoc. Franç. St.-Étienne (1897) **26**, 129-131.

Mechanische einfache Regeln für die Bildung der einzelnen Glieder einer Determinante vierter Ordnung. Lp.

C. E. Bickmore. Question 13748. Ed. Times **69**, 85.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ -w & x & y & z \\ -z & -w & x & y \\ -y & -z & -w & x \end{vmatrix}$$

ist gleich $a^2+b^2=c^2+2d^2=e^2-2f^2$, wo gesetzt ist:

$$a=x^2+2yw-z^2,\quad c=x^2-y^2+z^2-w^2,\quad e=x^2+y^2+z^2+w^2,$$
$$b=y^2-2xz-w^2,\quad d=xy+xw-yz+zw,\quad f=xy-xw+yz+zw.$$

Beziehung zu den Zahlen $x+y\varrho+z\varrho^2+w\varrho^3$, wo $\varrho^4=-1$. Lp.

A. Laisant. Déterminant de quatre points d'un plan par rapport à un cinquième point. Lisboa Jorn. (2) **5**.

Es seien A, B, C, D vier gegebene Punkte einer Ebene und X ein beliebiger fünfter Punkt derselben Ebene. Der Verf. beschäftigt sich mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} XA & XB \\ XC & XD \end{vmatrix}.$$

Tx. (Lp.)

H. Kühne. Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes auf Mannigfaltigkeiten von gerader Ordnung als Beispiel der Anwendung einer schiefen Determinante. J. für Math. **119**, 186-195.

Der in Rede stehende Satz rührt von Steiner (vgl. Ges. W. **1**, 223) her und lautet so: Vier gerade Linien bilden vier Dreiecke, deren Umkreise sich in einem Punkte schneiden; die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einem fünften Kreis.

Die Uebertragung dieses Satzes auf n-fache Mannigfaltigkeiten führt den Verf. zu einer schiefen Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese

soll im vorliegenden Fall identisch verschwinden. Das geschieht bekanntlich nur, wenn sie von ungerader Ordnung ist; demnach muss n gerade sein. Jhk.

G. Loria. Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia. Periodico di Mat. **13**, 129-138.

Abdruck aus Prag. Ber. 1897; vergl. F. d. M. **28**, 143, 1897.

E. D. Roe. Die Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach Normal-Formen. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 52 S. 8°.

C. Elimination und symmetrische Functionen.

E. Netto. Zur Theorie der Elimination. Oberhess. Ges. f. Naturk. 1898, 6 S. 8°.

Wenn ein k-facher Punkt einer ebenen Curve mit einem l-fachen einer anderen zusammenfällt, so ist dieser Punkt als $(k.l)$-facher Schnittpunkt beider Curven zu zählen. Analog im Raume, wenn ein k-facher Punkt einer Fläche, ein l-facher einer zweiten und ein m-facher einer dritten Fläche zusammenfallen, so ist dieser Punkt als $(k.l.m)$-facher Schnittpunkt der drei Gebilde zu zählen.

Für den entsprechenden allgemeinen Satz giebt der Verf. einen einfachen arithmetischen Beweis.

Zunächst werden einige Gewichtsfestsetzungen getroffen. Wenn jedem Summanden einer Summe ein (nicht-negatives) Gewicht beigelegt wird, so heisst „Grenzgewicht" ($GG.$) ein solches, unter das kein Gewicht eines der Summanden sinken kann. Sind nun $G_1, G_2, \dots, G_n$ ($G_i \geqq G_{i+1}$) die $GG.$ einer Reihe von einander unabhängiger Grössen $u_1, u_2, \dots, u_n$, dann haben $S(u_1)$, $S(u_1 u_2)$, ... die $GG.$ $\gamma_1 = G_1, \gamma_2 = G_1 + G_2, \dots$, wo die S symmetrische Functionen bedeuten. Es haben also die Coefficienten von $(u-u_1)(u-u_2)\dots(u-u_n)$ der Reihe nach die $GG.$ $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ Hieraus folgt, dass das $GG.$ einer symmetrischen Function $S(u_1^k u_2^l u_3^m \dots u_n^p)$ $(k \geqq l \geqq m \dots \geqq p)$ gleich $k\gamma_1 + l(\gamma_2 - \gamma_1) + m(\gamma_3 - \gamma_2) + \dots + p(\gamma_n - \gamma_{n-1})$ wird.

Hiervon werden nun Anwendungen auf zwei Gleichungen $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ gemacht; es ergiebt sich ein einfacher Satz für das $GG.$ der Resultante.

Sodann wird angenommen, dass die Coefficienten von f und g selbst wieder ganze Functionen einer zweiten Variable y sind. Mittels der Poisson-Liouville'schen Substitution $\omega = u_1 x + u_2 y$ und nachheriger Elimination von y wird die Resultante in ω aufgestellt und hinsichtlich der $GG.$ ihrer Coefficienten untersucht.

Fährt man so fort, so kommt man zu dem allgemeinen Resultat: „Man gebe den Variabeln z in den Gleichungen $f_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0$

($\lambda = 1, 2, \ldots, m$) die Gewichte 1 und den Coefficienten solche $GG.$, dass jedes f_λ das $GG.$ ϱ_λ erhält, dann haben $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_m$ der Wurzeln des Systems $f_\lambda = 0$ in ihren m Coordinaten das $GG.$ 1."

Dieser Satz gestattet ohne weiteres den Beweis des zu Anfang erwähnten Satzes. My.

N. v. Szûts. Ueber die Bildung der Resultante und des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzer rationaler Functionen einer Variabeln. Monatsh. f. Math. **9,** 34-42.

Der Verf. beweist den folgenden Satz: Bildet man bei zwei algebraischen ganzen Functionen

$$f(x) = \sum_0^m a_{m-\tau}\, x^\tau, \qquad \varphi(x) = \sum_0^n b_{n-\tau}\, x^\tau,$$

wobei $m \geqq n$, die n Restfunctionen

$$r_k(x) = \sum_{\lambda=1}^n l_\lambda^{(k)} x^{n-\lambda} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der Function $\varphi(x)$ und betrachtet dieselben als lineare Formen der Potenzen $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$, so ist ihre Functionaldeterminante $D_{f\varphi}$ eine rücksichtlich der Hauptdiagonale symmetrische Determinante n^{ten} Grades und ist gleich der mit dem Factor $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_0^n$ multiplicirten Resultante $R_{f\varphi}$ der gegebenen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$. Jhk.

P. Gordan. Sur le résultant de deux équations. C. R. **127,** 539-541.

Die Resultante R von $f = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots$, $1 + \varphi = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ ist eine ganze Function der Coefficienten a, b vom Gewicht mn. An Stelle der a, b werden vermöge der Waring'schen Formel die Wurzelpotenzen eingeführt. Hieraus leitet der Verf. einen merkwürdigen Ausdruck für R her, indem er, von der Reihenentwickelung für $l(1+\varphi)$ ausgehend, zunächst eine solche für lR erhält, und dann durch partielle Differentiation und geeignete Integration für R selbst. My.

P. Gordan. Resultante ternärer Formen. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 143-144.

Es handelt sich um das Problem, die Resultante von drei ternären Formen explicite durch übersichtliche invariantive Processe darzustellen. Der wesentliche Inhalt der Note ist bereits in einem vorjährigen Referat (F. d. M. **28,** 117, 1897) angegeben worden. My.

W. Booth, W. E. Jeffares. Solution of question 13526. Ed. Times **68,** 85-87.

Sind α, β, γ, δ die Wurzeln der Gleichung $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$, und bildet man das Product $\Pi(2\alpha-\beta-\gamma)$, erstreckt über alle vier Wurzeln, so ist Π, ausgedrückt in den Functionen H, I, J, G der Wurzeldifferenzen, durch die Formel gegeben:

$$a^9\Pi = 256\{9261a^3J^2-16632a^2HIJ+625a^3I^3-2304a^2H^2I^2+55296H^3J\}.$$

Lp.

E. D. Roe. On symmetric functions. Amer. Math. Monthly. **5**, 1-6, 25-30, 53-58.

E. D. Roe. Note on a formula of symmetric functions. Amer. Math. Monthly **5**, 161-164.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.

Niedere Arithmetik.

H. SCHUBERT. Grundlagen der Arithmetik. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 1-27.

Dieses erste Kapitel der Encyklopädie giebt einen streng logischen Aufbau der Arithmetik der ganzen und gebrochenen (positiven und negativen) Zahlen mit vielen Litteraturangaben. F.

G. E. FISHER and J. J. SCHWATT. Text-book of algebra with exercises for secondary schools and colleges. Part I. Philadelphia: Fisher and Schwatt. XIII + 683 S. 8°.

Das Buch giebt in ausführlicher Darstellung einen streng logischen Aufbau der Elemente der Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten und den geometrischen und arithmetischen Reihen. Beigefügt sind zahlreiche Uebungsbeispiele. F.

M. NASSÒ. Elementi di calcolo algebrico ad uso delle scuole normali. Torino: Tip. e libreria Salesiana. 107 S. 8°.

Eine Einführung in die ersten Elemente der Algebra (bis zu den linearen Gleichungen ersten Grades) mit vielen historischen Notizen und einem Anhange von 360 Uebungsaufgaben. Jhk.

M. NASSÒ. Algebra elementare ad uso dei licei e degli istituti tecnici. Torino: Tip. e libreria Salesiana. 426 S. 8°.

Das mit vielen historischen Notizen versehene Werk zerfällt in zwei Teile: der erste bringt das bekannte algebraische Pensum bis zu den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, den arithmetischen und geometrischen Reihen und der Zinseszinsrechnung; der zweite eine

reiche Sammlung von Uebungsaufgaben. In Bezug auf die letzteren ist hervorzuheben, dass jeder Abschnitt meist mit einer knappen Darlegung der zur Verwendung kommenden Regeln und Methoden sowie mit der vollständig durchgeführten Lösung einiger Beispiele anhebt. Jhk.

F. Ritter von Močnik. Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien, bearbeitet von A. Neumann. 1. Abt. 35. Aufl., 2. Abt. 26. Aufl. Wien u. Prag: F. Tempsky. 124 S. u. 110 S. 8°.

F. Ritter von Močnik. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgaben-Sammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen, bearbeitet von A. Neumann. 25. Aufl. Wien u. Prag: F. Tempsky. V + 306 S. 8°.

Exacte Darstellung des arithmetischen und algebraischen Pensums der österreichischen Gymnasien nebst beigefügten Aufgaben. F.

R. Foth. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössenlehre. Zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte. 5. Aufl. Hannover, Berlin: Carl Meyer (Gustav Prior). XIII + 304 S. 8°.

Referat über die 4. Aufl. siehe F. d. M. **25**, 882, 1893. F.

Alb. Richter. Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner. X u. 149 S. 8°.

Alb. Richter. Resultate und Erläuterungen zu den arithmetischen Aufgaben. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 104 S. 8°.

Die vorliegende Aufgabensammlung berücksichtigt die Anwendungen auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge mehr als die bisher zu gleichem Zwecke verfassten Bücher, folgt also darin den Wünschen, die in dem Verein zur Förderung des Unterrichtes in der Mathematik und in den Naturwissenschaften wiederholt ausgesprochen sind. Doch stehen vor den Anwendungen stets so viel rein arithmetische Beispiele, dass die betreffenden mathematischen Probleme an denselben bis zur vollen Sicherheit eingeübt werden können. Das Resultatenheft enthält bei den Anwendungen zum Teil ausführliche Erläuterungen, auch Zeichnungen; es ist nicht für Schüler bestimmt und wird nur an Lehrer gesandt. Lp.

R. Bettazzi. Generalizzazione dei sistemi di numerazione. Periodico di Mat. **13**, 186-191.

Unter Bezugnahme auf die früheren Aufsätze: „Sui sistemi di numerazione pei numeri reali“ (Periodico di Mat. **6**, 14-23; F. d. M.

23, 166, 1891) und „Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo" (Torino Atti **33,** 355-374; Referat in Abschnitt V dieses Bandes) zeigt der Verf., dass sich jede Zahl als Summe von Gliedern einer divergenten Reihe Σu_n darstellen lässt, wenn $\lim u_n = 0$ ist für $n = \infty$, und wenn $u_p = \Sigma u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Solche Reihen nennt er „Minimalreihen". Die Gesetze dieser Darstellung, ob eindeutig oder mehrdeutig, werden des näheren untersucht. Lp.

J. Schuster. Zur Multiplication mit Einheiten. Bemerkungen zu verschiedenen Aufsätzen dieser Zeitschrift. Hoffmann Z. **29,** 15-17.

Erörterung darüber, wie man die Multiplication von Zahlen mit verschiedenen Benennungen zu verstehen habe. Lp.

Ernst Meyer, E. Lindenthal. Zu dem Aufsatz „Zahlenriesen" Jahrgang 1897, Heft 6, S. 462. Hoffmann Z. **29,** 314-316.

Bemerkungen über die „Sandzahl" des Archimedes und die Zahl, welche Gauss scherzhaft eine „messbare Unendlichkeit" genannt haben soll, definirt als 9^α, wo $\alpha = 9^\beta$, $\beta = 9^9$, also aus vier Neunen gebildet, sowie über das Princip der Benennung solcher Zahlen (vergl. Fink, F. d. M. **28,** 151, 1897). Lp.

O. Stolz. Sulla teoria della divisione e dell'estrazione di radice. (Traduzione dal tedesco di A. Martini-Zuccagni). Periodico di Mat. **13,** 89-94.

O. Stolz. Supplemento all'articolo sulla teoria della divisione e dell'estrazione di radice. Ebenda 176-177.

Aus den „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz übersetzt; vermehrt um das Supplement. Lp.

Ch. L. Dodgson. Abridged long division. Nature **57,** 269-271.

R. W. D. Christie. Abridged long division. Nature **57,** 390-391.

Der erste Aufsatz hat neben dem Haupttitel noch die Ueberschrift: A brief method of dividing a given number by a divisor of the form $h \cdot 10^n \pm k$, where at least one of the two numbers, h and k, is greater than 1. Damit ist die Richtung angegeben, nach welcher die Bemühungen des Verf. gehen: eine Erweiterung der von ihm in Nature **56,** 565 (F. d. M. **28,** 152, 1897) für 9 und 11, 99 und 101, 999 und 1001 etc. angegebenen Verfahrungsarten. Christie ersetzt das Dodgson'sche ziemlich verwickelte Verfahren, das sich nur in beschränktem Masse verwenden lässt, in bekannter Weise durch die Formel:

$$\frac{N}{ar^n \mp m} = \frac{N}{ar^n} \pm \frac{mN}{(ar^n)^2} + \frac{m^2N}{(ar^n)^3} \pm \cdots$$

und zeigt den Gebrauch an mehreren Beispielen. Lp

G. Lazzeri. La regola di Ruffini. Suppl. al Period. di Mat. **1,** 20-22.

Erläuterung und Beweis der Regel für das abgekürzte Schema der Division eines Polynoms in x durch $x-\alpha$. Lp.

F. Mariantoni. Caratteri di divisibilità. Periodico di Mat. **13,** 149-151.

B. Levi. Caratteri di divisibilità. Ebenda 191-192.

F. Mariantoni. Ancora sui caratteri di divisibilità. Ebenda 217-218.

A. Conti. Sulla divisibilità dei numeri. Ebenda 180-186, 207-209.

Conti leitet die Kriterien der Teilbarkeit in bekannter Manier aus den Resten von 10^n durch den Divisor ab; da sich dieses Verfahren in der Pascal'schen Schrift „De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis" (übersetzt ins Italienische: Suppl. al Periodico di Mat. **2,** 1-4, 1898) erklärt findet, will Conti es als „Pascal'sches Princip" benannt haben. Mariantoni giebt in der ersten Note besondere Regeln für die Teilbarkeit durch eine Primzahl p von der Form $10K+\alpha$, wo $\alpha=1, 3, 7, 9$. Levi dehnt diese Regeln auf Zahlensysteme mit beliebiger Basis aus; endlich giebt Mariantoni in der zweiten Note den Satz, auf dem seine Methode beruht, für eine beliebige Zahl p so an: Es sei $p=a\alpha+b$, wo $a\alpha$ oder b relativ prim zu p. Ist dann weiter $N=A\alpha_1+B$ $(N\gtreqless p)$, so ist $N\equiv 0 \pmod{p}$, wenn $Ab\alpha_1-Ba\alpha\equiv 0 \pmod{p}$. (Vergl. die folgenden Referate.) Lp.

Th. Lange. Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen. Hoppe Arch. (2) **16,** 220-223.

Ableitung der elementaren Teilerregeln bei solchen Divisoren m, die gegen 10 relativ prim sind. Hat der Dividend z in der Einerstelle die Ziffer z_1, so ist $z=10z_2+z_1$ mit ganzzahligem z_2. Bestimmt man a als absolut kleinste Zahl aus $10a\equiv 1 \pmod{m}$, so ist $z\equiv 10(z_2+az_1) \pmod{m}$; und also ist z stets nur durch m teilbar, wenn dies von z_2+az_1 gilt. Z. B. hat man $a=2$ für $m=19$. Somit ist z stets und nur dann teilbar durch 19, wenn die Addition des Doppelten der Einerzahl zu der vor letzterer stehenden Zahl z_2 eine durch 19 teilbare Summe liefert. Verf. stellt die entsprechenden Regeln für $m=3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29$ auf. Fr.

H. Züge. Allgemeine Regeln über die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Pr. (No. 338) Gymn. Wilhelmshaven. 28 S. 8°.

Es werden zwei Arten von Teilerregeln besprochen. Bei der ersten werden in der zu teilenden Zahl $(a_0+a_1 10+\cdots+a_n 10^n)$ sämtliche Potenzen der Zahl 10 zugleich bezüglich des Divisors auf ihre kleinsten positiven Reste reducirt. Die zweite Gattung von Regeln gründet sich

auf dieselbe Betrachtung, welche Th. Lange in seiner Notiz über Teilerregeln zu Grunde legt. Man vergl. das vorangehende Referat. Fr.

L. Th. Riess. Allgemeine Teilbarkeitsmerkmale für alle Primzahlen, so wie überhaupt alle ungeraden Zahlen (Multipla von 5 ausgenommen). X. Vers. Russ. Nat. 329-331 (Russisch).

Die Zahl $N = 10b + a$ $(a < 10)$ ist durch die ungerade Zahl p $(p \neq 5n')$ teilbar, wenn $b - xa$ durch p teilbar ist; hier ist $mp = 10x + a$ $(a < 10)$ und $m = 1, 7, 3, 9$, wenn p gleich $10t+1$, $10t+3$, $10t+7$, $10t+9$ resp. wird. Si.

E. Kullrich. Die abgekürzte Decimalbruchrechnung. Pr. (No. 136) Realsch. Schöneberg. 28 S. 4°.

Nach einer kritischen Besprechung der früheren denselben Gegenstand betreffenden Arbeiten leitet der Verf. Vorschriften für die abgekürzten vier Grundrechnungsarten mit Decimalzahlen ab, welche ein Resultat liefern, dessen maximaler Fehler 0,5 (in manchen Fällen 0,6) Einheiten der letzten Stelle beträgt. Berücksichtigt ist dabei besonders auch der Fehler, welcher bei der Abkürzung des vorläufigen Ergebnisses auf das endgültige entsteht. F.

G. Lazzeri. La generatrice di una frazione decimale periodica. Suppl. al Period. **1**, 17-19.

Ganz elementare Methoden zur Auffindung des Wertes periodischer Decimalbrüche, unter Vermeidung der Reihen und des Grenzbegriffes. Lp.

J. Sachs. Tafeln zum mathematischen Unterricht. Pr. (No. 632) Gymn. Baden-Baden. 78 S. 4°.

Die erste Tafel enthält die Decimalbruchentwickelung aller echten Brüche mit Nennern von 1-250 nebst Angaben über die zum Nenner zugehörigen Periodencykeln, die Stellenzahl eines jeden Periodencyklus etc.

Die zweite Tafel giebt die Decimalbruchentwickelung derselben Brüche nach der Grösse geordnet bis auf sieben Decimalstellen. Sie ist dazu bestimmt (eventuell unter Zuhülfenahme eines Interpolationsverfahrens), die Decimalzahlen in gewöhnliche Brüche zu verwandeln. F.

B. Reynolds. On the frequency of occurrence of the digits in the periods of pure circulates. Messenger (2) **27**, 177-187.

B. Reynolds. Note on pure circulates. On the length of the period of $1/N$, and on its divisibility by N, in various scales of notation. Messenger (2) **28**, 33-36.

B. Reynolds. Further notes on pure circulates in various scales of notation. Messenger (2) **28**, 88-91.

Diese drei Aufsätze betreffen die Perioden wiederkehrender Decimalen und die entsprechenden Perioden, wenn die Basis des Zahlensystems r statt 10 ist. Bei der ersten Arbeit geht der Verf. vornehmlich auf das Auftreten der verschiedenen Ziffern in den Perioden ein. In den beiden anderen betrachtet er die Werte der Basis r, für welche die Periode von $1/N$ durch N teilbar ist, und die Gesetze, welche die Basen von 1 bis $N-1$ mit den Periodenlängen von $1/N$ verbinden, ausgedrückt in den zugehörigen Zahlensystemen. Glr. (Lp.)

C. A. Laisant. Propriétés du nombre 12345679 et généralisation. Lisboa J. (2) **5**.

Der Verf. merkt an, dass $9.12345679 = 111111111$, und dehnt diese Bemerkung auf ein beliebiges Zahlsystem mit der Basis x aus. Tx. (Lp.)

Candido. Da una identità. Suppl. al Period. **2**, 34-35, 51-52.

Folgerungen aus $(\alpha^2+\beta^2)^2 = (\alpha^2-\beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2$. Lp.

P. L. Tchébychef. Sur les expressions approchées d'une racine carrée de la variable au moyen des fractions simples. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15**, 463-480.

Uebersetzung der schon in F. d. M. **21**, 279, 1889 angezeigten Abhandlung. R. M.

F. P. Paternò. Un teorema sull'approssimazione delle radici quadrate. Periodico di Mat. **13**, 9-10.

Man hat mit einem Fehler $<1/(2n+1)$, wenn n eine ganze Zahl und $0<k<2n+1$ ist:

$$\sqrt{n^2+k} = n + \frac{k}{2n+1},$$

$$\sqrt{n^2+2n-(k-1)} = n+1-\frac{k}{2n+1}.$$

z. B. sind die Wurzeln aus 5, 6, 7, 8 ($n=2$) angenähert $2\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$ mit einem Fehler $<\frac{1}{5}$. Lp.

G. Frattini. Intorno al calcolo approssimato delle radici quadrate. Periodico di Mat. **13**, 41-43.

Es sei ω ein angenäherter Wert von $\sqrt{D}$; man setze $(\omega+\sqrt{D})^m = P_m+Q_m\sqrt{D}$, wo P_m und Q_m rationale Zahlen sind; es folgt $(\omega-\sqrt{D})^m = P_m-Q_m\sqrt{D}$. Wird zur Abkürzung $z=(\omega-\sqrt{D})/(\omega+\sqrt{D})$ gesetzt, so ist

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}\,\frac{1+z^m}{1-z^m},$$

und da z ein echter Bruch ist, so nähert sich P_m/Q_m mit wachsendem m der Quadratwurzel aus D. Ist $\omega < \sqrt{D}$, so ist z negativ, und die auf einander folgenden Näherungswerte abwechselnd grösser und kleiner als $\sqrt{D}$. Durch fortgesetztes Quadriren von $(2+\sqrt{3})$ findet man z. B. $(2+\sqrt{3})^8 = 18817 + 10864\sqrt{3}$. Mithin ist 18817/10864 ein Näherungswert von $\sqrt{3}$, dessen Fehler (nach vorheriger Multiplication mit $1+\sqrt{3}$) sich kleiner als 1/10864.29681 ergiebt. Lp.

P. A. Dolguschin. Anwendung des Princips der linearen Interpolation zur Ausziehung der Wurzeln zweiten und dritten Grades. X. Vers. russ. Nat. 432-433 (Russisch); Pädag. Samml. No. 8, 100-114.

Für die Wurzelausziehung zweiten und dritten Grades ist die Regula falsi der Newton'schen Approximationsmethode vorzuziehen. Dieselbe ist beim Unterricht zur Erklärung der Logarithmentheorie von Nutzen. Si.

F. Hromadko. Bemerkung zum Ausziehen der Kubikwurzel. Časopis **27**, 275-276 (Böhmisch).

Mnemotechnisches Hülfsmittel zur Erleichterung des Ausziehens der dritten Wurzel aus vier- bis sechsstelligen Kuben durch Kopfrechnung. Sda.

W. P. Ermakow. Dreigliedrige unbestimmte Gleichungen. Mosk. Math. Samml. **20**, 293-298 (Russisch).

Aufgabe für junge Mathematiker: drei ganze rationale algebraische Functionen u, v, w einer Veränderlichen zu finden, welche eine Gleichung $u^m + v^n = w^k$ befriedigen (m, n, k drei ganze Zahlen, grösser als 1). Si.

Weitere Litteratur.

A. Accatino. L'aritmetica insegnata alla 4ª e 5ª classe ginnasiale. Parma: Fiaccadori. Vi.

G. Bellacchi. Lezioni ed esercizî di algebra complementare. Fascicolo I. Firenze: Barbèra. 159 S. 16^mo^.

C. Bergmans. Compléments d'arithmétique et d'algèbre. 2ᵉ édition. Gand. 294 S. 8⁰.

A. Boutin. Problème d'arithmétique. Mathesis (2) **8**, 23-25. Mn.

R. C. Buck. Manual of algebra. London. 166 S. 8⁰.

E. Chailan. Résumé d'algèbre élémentaire. 3ᵉ édition. Paris: Poussielgue. 72 S.

G. Chrystal. Introduction to algebra, for the use of secondary schools and technical colleges. London: Adam and Charles Black. XVIII + 412 + XXVI S. [Nature 58, 340-341.]

S. E. Coleman. An algebraic arithmetic, being an exposition of the theory and practice of advanced arithmetic, based on the algebraic equation. New York: Macmillan. XIII + 151 S. 12mo.

Ch. de Comberousse. Cours de mathématiques. Tome I. Partie 2: Algèbre élémentaire. 4e édition. Paris: Gauthier-Villars. S. 295-796.

Dränert. Sammlung arithmetischer Aufgaben für den Gebrauch an Realschulen, nach der Aufgabensammlung von Meier Hirsch bearbeitet. I. Cursus. 3. Aufl. Altenburg: H. A. Pierer. VIII + 88 S. 8°.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet. Ausgabe A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. I. Teil: Pensum der Unter-Tertia, Ober-Tertia und Unter-Secunda. 3. Aufl. Braunschweig: O. Salle. VIII + 258 S. 8°.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Ausgabe B. Vornehmlich für den Gebrauch in sechsklassigen höheren und mittleren Lehranstalten, sowie in Seminaren und gewerblichen Fachschulen. 2. Aufl. Braunschweig: O. Salle. VI + 222 S. 8°.

V. Giriodi. Applicazioni delle principali teoriche algebriche. Torino.

A. Goulard. Lemme d'arithmétique. Revue de math. spéc. 8, 541-542.

J. L. S. Hatton and G. Bool. Elementary mathematics. London: Whittaker and Co. VIII + 336 S.

Ein Leitfaden für gewisse elementare Prüfungen. Gbs.

H. Hartl. Aufgabensammlung aus der Arithmetik und Algebra. Wien: F. Deuticke. VI + 305 S. — Dazu: Rechenergebnisse. 122 S. 8°.

G. Höhnemann. Praktisches Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht. I. Algebra. Leipzig: A. Strauch. 94 S. 8°.

F. S. Holzinger. Lehrbuch der politischen Arithmetik. Zweite unveränderte Auflage. Braunschweig. IX u. 156 S. gr. 8°.

E. J. Houston and A. E. Kennelly. Algebra made easy. New York: American Technical Book Company. IV + 101 S. 12mo.

E. J. Houston and A. E. Kennelly. The interpretation of mathematical formulae. New York: American Technical Book Company. V + 225 S. 12mo.

F. Hromadko und A. Strnad. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra für die höheren Klassen der Mittelschulen. V. Aufl. Prag 1896. (Böhmisch.) Sda.

O. Huber. Sammlung von arithmetischen Aufgaben mit ausgeführten Beispielen für Fortbildungsschulen, höhere Bürgerschulen und ähnliche Lehranstalten, sowie auch für die Unterklassen von Mittelschulen. 2. Teil. München: R. Oldenbourg. III + 83 S. 8⁰.

V. Jamet. Sur la division des polynômes entiers. Marseille Ann. 11 S.

E. M. Langley. Some curiosities in division. Math. Gazette 1898, 205-208.

B. Lefebvre. Cours d'algèbre élémentaire. Namur. 448 S. 8⁰.

B. Lefebvre. Cours développé d'algèbre élémentaire. Deux volumes. Namur. 320, 544 S. 8⁰.

B. Lefebvre. Recueil de problèmes et d'exercices d'algèbre élémentaire. Namur. 168 S. 8⁰.

S. L. Loney. An arithmetic for schools. With answers. London: Macmillan and Co. 486 S. 8⁰ [Nature **67,** 560].

A. Macé de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique; à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de première-sciences se destinant aux mathématiques spéciales, et des jeunes filles visant à l'agrégation. 4e édition. Paris: Nony. 486 S. 8⁰.

A. Mach. Das Quadriren aus dem Kopfe. Časopis **27,** 272-274 (Böhmisch).

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

F. E. Nipher. An introduction to graphical algebra, for the use of high schools. New York: Holt and Co. IV + 61 S. 12mo.

M. Piroschkow. Arithmetik der irrationalen Zahlen. St. Petersburg. 144 S. 8⁰. (Russisch.) Si.

H. Schubert. Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 171 S. 12⁰. [Sammlung Göschen, No. 47.]

A. Sickenberger. Uebungsbuch zur Algebra. 2. Abteilung. 3. Stufe der Rechnungsarten, quadratische Gleichungen, Reihen. 2. Aufl. München: Th. Ackermann. III + 128 S. 8⁰.

A. Sterza. Algebra elementare per il corso liceale. Mantova. 330 S. 8⁰.

A. Sterza. Aritmetica razionale ed algebra elementare per il primo biennio degli istituti tecnici. Mantova. 420 S. 8⁰.

W. Thomson. Chambers's algebra for schools. London: W. and R. Chambers. 560 S. 8⁰. [Nature **57,** 388.]

G. Ulrich. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für den Selbstunterricht. Mit zahlreichen Uebungsaufgaben und dazu gehörigen Auflösungen. Berlin: Aug. Schultze. VII + 400 S. 8⁰.

T. Vacquant et A. Macé de Lépinay. Leçons d'algèbre élémentaire. 12e édition, revue, corrigée et suivie d'un complément sur les déterminants. Paris. 8⁰.

J. M. VEGA-VERDUGO. Algebra, escrita con sujecion al programma vigente para los examens de ingresso en la escuela naval flotante. Madrid. 288 S. 4°.

J. VERHELST. Cours d'algèbre élémentaire. 2e édition. Partie II: Calcul des radicaux, équations du second degré, progressions et logarithmes. Bruxelles. 200 S. 8°.

G. WENTWORTH. New school algebra. Boston: Ginn & Co. VI + 407 S.

E. WROBEL. Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und anderen höheren Lehranstalten bearbeitet. 1. Teil. Pensum der Tertia und Untersecunda. 3. Aufl. Rostock: W. Werther. XII + 320 S. 8°.

Kapitel 2.
Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

P. BACHMANN. Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Vierter Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Erste Abteilung. Leipzig: B. G. Teubner. XVI + 668 S. 8°.

Den ersten Teil der Bachmann'schen Zahlentheorie bildeten die „Elemente" (F. d. M. **24**, 160, 1892); den zweiten die „analytische Zahlentheorie" (F. d. M. **25**, 249, 1894); als dritten Teil sieht der Verf. seine „Kreisteilung" von 1872 an (F. d. M. **4**, 78, 1872).

Der vierte Teil ist den quadratischen Formen gewidmet; eine zweite Abteilung desselben soll die Theorie der Reduction dieser Formen behandeln nebst einer Reihe wichtiger Hülfsprincipien, wie Hermite's Einführung des Continuirlichen in die Zahlentheorie, die moderne Gittertheorie u. a.

Die vorliegende erste Abteilung zerfällt in zwei grosse Abschnitte, deren erster sich mit der Theorie der ternären quadratischen Formen beschäftigt, während der zweite das eigentliche Hauptziel verfolgt, die allgemeine Theorie der quadratischen Formen mit n Unbestimmten.

Um nicht zu viel Raum in Anspruch zu nehmen, werden wir uns hier im wesentlichen auf die Besprechung des ersten Abschnittes beschränken, da die meisten der grundlegenden Begriffe und Methoden in ihm bereits entwickelt werden und in einer concreteren Gestalt auftreten.

Das erste Kapitel entwickelt die algebraischen Grundlagen für die Aequivalenz zweier ternären quadratischen Formen, resp. für die automorphe Aequivalenz, d. i. die Aequivalenz einer solchen Form mit sich selbst.

Die Variabeln der Form $f = f_x^2 = f(x)$ seien mit x_1, x_2, x_3; die Coefficienten mit $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$ bezeichnet.

Nach Einführung der Unterscheidung zwischen „bestimmten" (definiten) und „unbestimmten" (indefiniten) Formen gemäss Gauss' Disquisitiones arithmeticae wird auf einfachem Wege die für Arithmetik und Geometrie gleich wichtige „Grundformel" abgeleitet, die, in bekannter symbolischer Schreibart, lautet: $f_x^2 f_y^2 - (f_{xy})^2 = DF_u^2$, wo D die Determinante von f und F_u^2 die zu f adjungirte Form bedeutet und die u die aus den x, y zu bildenden zweireihigen Determinanten sind.

Durch eine lineare, unimodulare Substitution gehe f in f_1 über; bei gegebenen f, f_1 giebt es solcher Substitutionen noch eine ∞^3-Schar; um sie zu erhalten, genügt es nach Hermite, eine solche mit der ∞^3-Schar aller bez. f automorphen Substitutionen zusammenzusetzen. Hierbei lässt sich nach dem Vorgange von G. Cantor, der die Aufgabe zuerst allgemeingültig löste, f in der Normalform $x_1 x_3 - x_2^2$ ansetzen. Eine zweite directere Herleitung ergiebt sich nach einiger Rechnung aus den Transformationsrelationen selbst.

Das zweite Kapitel bringt die ersten der grundlegenden arithmetischen Begriffe; die Variabeln und Coefficienten sind auf ganzzahlige Werte beschränkt. Der Einfachheit halber wird D als ungerade angenommen; man kann sich dann auf die „eigentlich primitiven" Formen f concentriren, für die $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$ den grössten gemeinsamen Teiler $\varrho = 1$ besitzen. Bezeichnet man die Coefficienten der adjungirten Form F mit A, A', A'', B, B', B'' und deren grössten gemeinsamen Teiler mit Ω, so zerfällt D in das Product aus dem Quadrate von Ω und einer ganzen Zahl Δ. Alle f der Determinante D, für die Ω, Δ dieselben Zahlwerte haben, fasst Eisenstein in eine „Ordnung" (Ω, Δ) zusammen; jedem quadratischen Teiler Ω von D entspricht auch wirklich eine Ordnung. Wirft man mit Gauss, wie bekannt, alle einander äquivalenten Formen f je in eine „Klasse", so ist die Anzahl der zu einer Ordnung (Ω, Δ) gehörigen Formenklassen eine endliche. Δ und Ω sind die beiden „arithmetischen" Invarianten von f, $D = \Omega^2 \Delta$ ihre „algebraische" Invariante. Eisenstein hat weiterhin den Begriff des „Geschlechtes" eingeführt. Es sei ω ein Primfactor von Ω und weder $f(x)$ noch $f(y)$ teilbar durch ω, so liefert die Grundformel unmittelbar das Ergebnis, dass $\left(\frac{f(x)}{\omega}\right) = \left(\frac{f(y)}{\omega}\right)$, unter der Klammer das Legendre'sche Symbol verstanden. Es besitzt somit f bez. ω einen bestimmten quadratischen „Charakter". Für $\mathfrak{F} = \frac{F}{\Omega}$ und δ als einen Primfactor von Δ kommt analog $\left(\frac{\mathfrak{F}(x)}{\delta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{F}(y)}{\delta}\right)$, so dass auch bez. δ der Form f ein bestimmter Charakter zukommt. Die Gesamtheit dieser Einzelcharaktere bildet den „Charakter" von f; alle f einer Ordnung (Ω, Δ), die den nämlichen Charakter aufweisen, bilden ein „Formengeschlecht". Danach ist die Anzahl aller möglichen Geschlechter der Ordnung (Ω, Δ) leicht abzuzählen.

Die Theorie der Geschlechter wird nach Minkowski, auf Grund

gewisser von Smith herrührender Congruenzen, noch auf einem zweiten Wege begründet.

Im dritten Kapitel wird das Problem der „Darstellung“ einer gegebenen binären quadratischen Form durch eine f behandelt, und damit auch das speciellere der Darstellung einer gegebenen Zahl durch eine f.

Man gelangt zu zwei Hauptfragestellungen: erstens, wie lässt sich über die Aequivalenz, resp. Nichtäquivalenz zweier f derselben Ordnung entscheiden? (Dies Problem wird mit Rücksicht auf die Theorie der Reduction der zweiten Abteilung des vierten Bandes vorbehalten.) Zweitens, wenn zwei f äquivalent sind, alle ganzzahligen Substitutionen anzugeben, die die eine Form in die andere, resp. die eine Form in sich überführen. Die zweite Frage lässt sich auf Grund der in Kap. I vorgeführten algebraischen Untersuchungen durchführen (Kap. IV). Die bestimmten Formen lassen nur eine endliche Anzahl ϑ automorpher Substitutionen zu, dagegen die unbestimmten eine unendliche Menge, die aus einer von ihnen bestimmt werden.

Der Verf. ist nunmehr genötigt (Kap. V), aus seiner „Analytischen Zahlentheorie“ den Kern der Geschlechtertheorie der binären quadratischen Formen zu recapituliren, insbesondere den Dirichlet'schen Nachweis, dass alle als möglich erkannten Geschlechter auch wirklich existiren, um ihn auf die Theorie der f zu übertragen. Indessen wird zur Ergänzung auch eine eigenartige Geschlechtsdefinition erläutert, die man Smith verdankt, und die auf der Verwendung unimodularer Substitutionen mit rationalen Coefficienten beruht.

In Kap. VI werden insbesondere die positiven Formen f einer Ordnung (Ω, Δ), bei denen also Ω positiv ist, in Betracht gezogen. Bei ihnen drängt sich alsbald der dritte Eisenstein'sche Begriff auf, der des „Masses“. Die oben erwähnte Zahl ϑ lässt sich auch so deuten: Unterwirft man eine f allen unimodularen (ganzzahligen) Substitutionen, so ergeben sich alle mit f äquivalenten Formen, und zwar jede ϑ-mal. Dabei ist ϑ — im Gegensatz zu der analogen Erscheinung bei den binären Formen, wo ϑ nur von der Determinante der Form abhängt — mit f selbst veränderlich.

Die Anzahl der Formen einer Klasse darf man proportional mit $\frac{1}{\vartheta}$ (Mass, Dichtigkeit der Klasse) setzen. Der Begriff des Masses überträgt sich ohne weiteres durch die Operation des Summirens auf eine Ordnung, resp. ein Geschlecht; Mass der Darstellung einer binären Form durch eine ternäre ist das Product beider Masse u. s. f.

Das findet eine erste Anwendung auf die Ordnung (1, 1), die durch die eine Klasse $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ repräsentirt wird. Als Folgerungen erscheinen die berühmten Sätze über Darstellungen von Zahlen als Summen von drei und vier Quadraten u. a.

Die nächste Hauptaufgabe (Kap. VII) ist die Ermittelung des Masses eines Geschlechtes, resp. einer Ordnung für positive f. Hier greift der

ebenfalls von Eisenstein herrührende Begriff der „reducirten" Substitutionen ein, der sich so fassen lässt, dass es in jeder Klasse äquivalenter Substitutionen — d. i. aller derer, die aus einer von ihnen durch Zusammensetzung mit allen unimodularen Substitutionen hervorgehen — stets nur eine einzige reducirte Substitution giebt. Es kommt nun darauf an, alle reducirten Substitutionen zu ermitteln, die eine f mit $D = 1$ in das D-fache einer f_1 mit beliebig gewählter Determinante D überführen; die fragliche Anzahl ist die Summe aller Teiler von D. Hieraus lässt sich die viel genannte Eisenstein'sche Formel für das Mass eines Geschlechtes gewinnen. Smith und Minkowski haben dieses Resultat verallgemeinert, indem sie nach dem Vorbild von Dirichlet das Mass eines gewissen Systems von Darstellungen nach zwei verschiedenen Methoden abzählten.

In den beiden letzten Kapiteln des ersten Abschnitts werden einzelne Untersuchungen über unbestimmte f vorgeführt. Das Hauptinteresse beansprucht einmal die ganzzahlige Auflösung der Gleichung $f = 0$, resp. die rationale Auflösung der in zwei nicht homogenen Unbekannten x, y geschriebenen Gleichung; andererseits die Bestimmung der Klassenanzahl eines Geschlechtes von unbestimmten f, wobei auf die Untersuchungen von Arn. Meyer besondere Rücksicht genommen wird.

Die Theorie der allgemeinen quadratischen Formen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist wesentlich von Smith und Minkowski in ihren bekannten Preisarbeiten begründet worden. Der Verf. beschränkt sich auf f mit ungerader Determinante D. Als Grundlage wird die Theorie der linearen Formen vorausgeschickt, wie sie von Smith und vor allem von Frobenius ausgebildet ist. Hierher gehören auch die Begriffe der „Elementarteiler" und des „Ranges" von Zahlensystemen, von „adjungirten" Zahlensystemen u. a.

Ein beliebiges System linearer Gleichungen lässt sich auf den Fall unabhängiger Gleichungen zurückführen, und es werden dann aus einer ersten „Fundamentallösung" die übrigen hergeleitet.

Diese Untersuchungen gipfeln wieder in der Frage, wie über die Aequivalenz zweier Systeme von gleich viel Linearformen entschieden werden kann: die Antwort lautet, dass sie das nämliche „reducirte" System besitzen müssen. Vielfach analoge Eigenschaften zeigen die linearen Congruenzen.

Der arithmetischen Theorie der f geht wiederum eine algebraische Einleitung vorauf, in der die Aequivalenz bilinearer Scharen, die automorphe Substitution einer f, das Trägheitsgesetz der f u. a. zur Darstellung kommen.

Nunmehr werden die einfacheren Sätze über die arithmetischen Begriffe der Klassen, Ordnungen und Geschlechter der f hergeleitet.

Der Form wird eine Anzahl von „Begleitformen" zugeordnet: im Verein mit f selbst liefern sie vermöge Bildung von grössten gemeinsamen Teilern, von Elementarteilern und Trägheitsindices den Bestand der arithmetischen Invarianten einer quadratischen Form. Es existirt eine endliche Anzahl von Ordnungen, deren jede eine endliche

Anzahl von Klassen enthält. Die „Grundformel" führt zu den Geschlechtscharakteren. Nach einer weiteren Definition heissen zwei Klassen gleichen Geschlechts, wenn sie nach jedem Modul congruent sind. Die Darstellung einer f von $v < n$ Variabeln durch eine f von n Variabeln führt zum Beweise des Hauptsatzes, dass die möglichen Geschlechter in der That existiren. Das Schlusskapitel enthält die Erweiterung der früher für das Mass gegebenen Grundlagen; man gelangt auf diesem Wege u. a. zur Darstellung von Zahlen als Summen von vier bis acht Quadraten. Den Mittelpunkt der Theorie bezeichnet der Minkowski'sche Ausdruck für das Mass eines Geschlechtes.

Das Buch lässt sich selbst jüngeren Studenten empfehlen, die mit einer gewissen Breite der Darlegungen nicht unzufrieden sein werden. Für eine neue Auflage würde der Referent eine grössere Vollständigkeit der litterarhistorischen Citate wünschen. My.

J. L. Lagrange's Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Uebersetzt von A. J. von Oettingen, herausgegeben von H. Weber. (Ostwald's Klassiker der exact. Wissensch. No. 103.) Leipzig: W. Engelmann. 170 S. 12°.

Die französische Ausgabe von Euler's „Vollständige Anleitung zur Algebra" hat bekanntlich eine schöne Bereicherung durch die „Additions" von Lagrange gefunden. Diese in deutscher Uebersetzung hier vorliegenden Zusätze behandeln die sogenannte diophantische Analysis, ein Gebiet, welches gerade Lagrange zahlreiche Fortschritte verdankt. Der grosse Wert dieser Arbeit beruht, wie der Herausgeber bemerkt, nicht sowohl in den besonderen Problemen, die im Anschluss an Euler's Algebra behandelt sind, als vielmehr in den darin angebahnten vollständig neuen Untersuchungen, an die später Dirichlet angeknüpft hat, und die in neuester Zeit in der Theorie der algebraischen Zahlen ihre Stelle gefunden haben. F.

O. Moreau. Sur quelques théorèmes d'arithmétique. Nouv. Ann. (3) **17**, 293-307.

Es werden einige einfachste zahlentheoretische Sätze über Teilbarkeit, relative Primzahlen, Congruenzen u. dergl. auseinandergesetzt. Die Absicht, welche der Verf. damit gehabt hat, dass er einige dem ersten Kapitel jedes zahlentheoretischen Lehrbuchs angehörende Sätze hier nochmals in einer Zeitschrift erörtert, ist nicht ausgesprochen. Fr.

D. Biddle. Question 13728. Ed. Times **69**, 86-88.

Während jede Primzahl über 3 von der Form $6n \pm 1$ ist, braucht eine Zahl $6n \pm 1$ nicht Primzahl zu sein. Die Bedingungen dafür, dass $6n \pm 1$ keine Primzahl ist, werden näher untersucht. Zur Frage äussern sich auch J. Cullen und R. W. D. Christie. Lp.

D. Biddle. On factorization. A few methods of factorizing composite numbers of unknown form. Messenger (2) **28**, 116-149.

Die Abhandlung enthält einen systematischen Bericht über verschiedene Methoden zur Zerlegung grosser Zahlen in Factoren, veröffentlicht in den Bänden **69** und **70** der Reprints from the Educational Times. Mehrere Tabellen zur Erleichterung beim Gebrauche derselben werden gegeben. Die Methoden beruhen auf der Thatsache, dass eine gegebene Zahl N die Differenz zwischen zwei Quadraten ist, deren mögliche Endziffern aufgezählt und dadurch beschränkt werden; dass die Summen der Ziffern von N und seinen Factoren in ähnlicher Weise aufgestellt und beschränkt werden; ferner auf anderen Principien, die auf die Auffindung der Factoren in manchen Fällen anwendbar sind. Die Haupttabelle giebt die dreiziffrigen Endzahlen von Paaren von Quadraten, deren Differenz N ist für jedes dreiziffrige Ende von N, und nimmt zehn Seiten ein. Eine Berichtigung zum Aufsatze wird auf S. 192 desselben Bandes gegeben (vergl. das folgende Referat).

Glr. (Lp.)

D. Biddle. Question 13756. Ed. Times **69**, 111-114.

Die Aufgabe verlangt nähere Untersuchung der in dem letzten Jahrzehnt häufig mit Erfolg angewandten Methode der Darstellung einer Zahl als Differenz zweier Quadrate, ein Verfahren, das nach einer Bemerkung Wertheim's schon bei Fermat vorkommt (F. d. M. **27**, 138, 1896). Nach einer kurzen Mitteilung von A. Cunningham, der auf die Schriften hinweist, wo jüngst eine Erörterung des Gegenstandes stattgefunden hat, zeigt Biddle in einer längeren „Redactionsnote" (S. 112-114), auf welche Weise das Verfahren zu vervollkommnen sei, um flinker zu einem Endergebnisse zu führen. Lp.

R. W. D. Christie. Note on the factorization of integers of form $10n+2r-1$. Ed. Times **69**, 99-104.

Darlegung einer Reihe von Kunstgriffen zur Auffindung von Factoren einer Zahl $10n+k$, wo $k = 7, 3, 1, 9$; danach folgen einzelne Winke, die bei der Factorenzerlegung einer Zahl sich als nützlich erweisen, nebst Tafeln, die zur Abkürzung brauchbar sind. Lp.

A. Cunningham. Question 13687. Ed. Times **69**, 118.

A. Cunningham. Question 13701. Ebenda, 117-118.

A. Cunningham. Question 13729. Ebenda, 73.

R. F. Davis. Question 13707. Ebenda, 61-62.

Alle diese Aufgaben verlangen die Zerlegung einzelner sehr grosser Zahlen in ihre Primfactoren. Ausser den Urhebern der Fragen beteiligen sich an der Beantwortung Blater und Bickmore. Bezeichnet $(z)_m$,

dass die Ziffer z m-mal zu wiederholen ist, so sind es die Zahlen $1(0)_{16}27$, $27(0)_{16}1$, $64(0)_9 729$, $729(0)_{10}64$, $3224(9)_{10}$, $31(9)_{15}$, 382^4+1, die in Factoren zerlegt werden. Lp.

K. S. Putnam. Question 4329. Ed. Times **68**, 26-27.

Die von W. B. Davis gestellte Frage verlangte Proben für die Richtigkeit des von Shanks angegebenen Zahlwertes für 2^{721}. Der Verf. giebt 2^{1024} und dividirt diese Zahl durch 2^{303}. Da er die Shanks'schen Tafeln nicht kennt, so fragt er an, ob seine Zahl mit der seines Vorgängers stimmt. Dies wird auf S. 111 desselben Bandes von A. Cunningham bestätigt, der ebenda noch allgemeine Bemerkungen über die Tragweite anderer Proben macht und unter anderem $2^{720}-1$ in Factoren zerlegt. Ebenso liefert H. J. Woodall auf S. 27 und 112 Beiträge zur Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen. Endlich giebt Biddle auf S. 51-52 eine Note über eine Methode zur Auffindung hoher Potenzen von 2. Lp.

A. Cunningham. On aurifeuillians. Lond. M. S. Proc. **29**, 381-438.

Es sei n eine natürliche, durch kein Quadrat ausser 1 teilbare Zahl und $n = n_1 . n_2 . n_3 \dots n_\nu$ die Primfactorenzerlegung von n. U und V seien Variabeln, und unter $\varphi(n)$ werde $(U^n \pm V^n)$ verstanden. Der Reducibilität der Kreisteilungsgleichung folgend, bildet der Verfasser den Ausdruck:

$$\mathfrak{F}\varphi(n) = \frac{\varphi(n) \cdot \varphi\left(\frac{n}{n_1 n_2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n}{n_{\nu-1} n_\nu}\right) \cdots}{\varphi\left(\frac{n}{n_1}\right) \varphi\left(\frac{n}{n_2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n}{n_\nu}\right) \varphi\left(\frac{n}{n_1 n_2 n_3}\right) \cdots},$$

den er den „algebraischen Primfactor" von $\varphi(n)$ nennt. Die Werte von U und V werden so gewählt, dass man zu folgenden vier Ansätzen gelangt:

$$\begin{aligned}
\varphi(2n) &= (x^2)^{2n} + (2ny^2)^{2n},\\
\varphi(2n) &= (n_1\, x^2)^{2n} + (2n_2 y^2)^{2n},\\
\varphi(n) &= (x^2)^n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} (ny^2)^n,\\
\varphi(n) &= (n_1 x^2)^n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} (n_2 y^2)^n.
\end{aligned}$$

Hierbei sollen x, y unbestimmte ganze Zahlen sein, n ist eine ungerade Zahl und $n = n_1 . n_2$ eine Zerlegung derselben. Die zugehörigen Ausdrücke $\mathfrak{F}\varphi(2n)$ und $\mathfrak{F}\varphi(n)$ nennt der Verf. „Aurifeuillians" der Ordnung $2n$, bez. n und benutzt in den niederen Fällen $n = 2, 3, \dots$ auch die Bezeichnungen „Binaurifeuillians", „Trinaurifeuillians" etc.

Der Verf. giebt eine Reihe von Entwickelungen über diese Gebilde, speciell für die Ordnungen $n = 2$ und 3. Diese Entwickelungen sollen

namentlich dem Zwecke dienen, grosse Zahlen in ihre Primfactoren zu zerlegen. Fr.

G. Speckmann. **Facultätencongruenzen.** Hoppe Arch. (2) **16**, 223-224.

Der Verf. macht die von einer erstaunlichen Naivität zeugende Bemerkung, dass $k!+(m-k)(k-1)!$ für alle Werte $k = 2, 3, \ldots, m-1$ durch m teilbar sei, und führt zur Bekräftigung seiner Behauptung das Beispiel $m = 11$ aus. Fr.

G. Speckmann. **Ueber Primzahlen.** Hoppe Arch. (2) **16**, 335-336.

I. Der Verf. rechnet sich einige specielle quadratische Formen ax^2+bx+p für $x = 1, 2, 3, \ldots$ bei primzahligem p aus und meint, dabei kämen viele Primzahlen heraus.

II. Die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze $(n.2^2)^2$ ist nach Speckmann $2n(n+3)-2$. Die von $n = 8$ an auftretenden Abweichungen erklärt Verf. für „regelmässig". Fr.

G. Speckmann. **1. Ueber die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer bestimmten Grenze. 2. Ueber Primzahlmengen. 3. Formeln für Primzahlen.** Hoppe Arch. (2) **16**, 447-448.

Die Anzahl der Primzahlen, welche $< G$ sind, wird nach Speckmann annähernd durch $\frac{G}{8}+6\sqrt{\frac{G}{16}}-2$ dargestellt. Diese unrichtige Angabe hält der Verf. für so bedeutend, dass er sie in der Notiz 2 nochmals ausspricht. Die Notiz 3 enthält wertlose Angaben über Darstellung von Primzahlen. Fr.

F. J. Studnička. **Ein neuer Lehrsatz der Zahlentheorie.** Vestnik **7**, No. 3, 165-167 (Böhmisch).

Aufstellung und Beweis des Satzes, dass das Product

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})$$

teilbar ist durch $1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!$. Sda.

T. Pepin. **Étude sur les nombres parfaits.** Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **13**, 345-420.

Die ganze positive Zahl N gebe, in ihre Primfactoren zerlegt, $N = m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \ldots$. Die Summe aller Teiler von N heisse $\Phi(N)$; es gilt:

$$\Phi(N) = (1+m+m^2+\cdots+m^\alpha)(1+n+n^2+\cdots+n^\beta)\ldots,$$

$$\Phi(N) = \frac{m^{\alpha+1}-1}{m-1}\cdot\frac{n^{\beta+1}-1}{n-1}\cdot\frac{p^{\gamma+1}-1}{p-1}\ldots.$$

N heisst eine „vollkommene" Zahl, wenn sie doppelt so gross wie ihre

Teilersumme ist:

$$\frac{m^{\alpha+1}-1}{m-1}\cdot\frac{n^{\beta+1}-1}{n-1}\cdot\frac{p^{\gamma+1}-1}{p-1}\cdots = 2m^{\alpha}n^{\beta}p^{\gamma}\ldots$$

Eine gerade vollkommene Zahl hat bekanntlich die Gestalt $2^{n-1}(2^n-1)$, wo 2^n-1 eine Primzahl sein muss; zugleich ist jede solche Zahl vollkommen. Die vorliegende Untersuchung ist den in etwa vorkommenden ungeraden vollkommenen Zahlen enthaltenen Primfactoren gewidmet; die Frage der Existenz solcher Zahlen bleibt aber unentschieden. Durch Abschätzung der linken Seite der letzten Gleichung ergeben sich für eine etwaige ungerade vollkommene Zahl die Ungleichungen:

$$\frac{m}{m-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{p-1}\cdots > 2 > \frac{m+1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{p+1}{p}\cdots.$$

Auf diese gründet der Verf. in elementar zahlentheoretischer Methode höchst ausgedehnte Betrachtungen. Seine Hauptergebnisse bestehen in folgenden Sätzen:

1. Eine etwaige ungerade vollkommene Zahl, die prim gegen 3.5.7 ist, muss mindestens 19 verschiedene Primfactoren enthalten.

2. Ist dieselbe prim gegen 3.5, so muss sie mindestens 14 verschiedene Primfactoren enthalten.

3. Ist sie prim gegen 3.7, so muss sie mindestens 11 verschiedene Primfactoren enthalten.

4. Eine ungerade vollkommene Zahl ist notwendig $\equiv 1$ oder 3 modulo 6.

5. Eine gegen 6 prime vollkommene Zahl hat die Gestalt M^2p^{4l+1}, wo p eine Primzahl, l eine nicht-negative ganze Zahl ist und M eine nicht durch p teilbare Zahl bedeutet. Fr.

D. Gambioli. Nota sopra un'applicazione del teorema di Wilson e sulla formula di Stirling. Periodico di Mat. **13,** 209-212.

Das Wilson'sche Theorem ist praktisch unbrauchbar zur Entscheidung, ob eine gegebene Zahl Primzahl ist oder nicht. Lp.

G. Wertheim. Fermat's Observatio zum Satze des Nikomachus. Schlömilch Z. **43,** 41-42. Hl. A.

Der angeblich von Nikomachus herrührende Satz von der Zerfällung der Kubikzahlen:

$$1^3 = 1, \qquad 2^3 = 3+5, \qquad 3^3 = 7+9+11, \ldots$$

ist von Fermat verallgemeinert worden, worüber zunächst berichtet wird. Der in Fermat's Verallgemeinerung auftretende Begriff „columna“ wird von Tannery dahin erklärt, dass die n^{te} columna das Product von n in die n^{te} Polygonalzahl ist. Verf. bemerkt (entgegen Tannery), dass die Bezeichnung „columna“ im gedachten Sinne auch sonst vorkommt.

Fr.

R. Lipschitz. Solution complète d'une question proposée par Fermat. Darboux Bull. (2) **22,** 123-128.

Fermat hat in einem Briefe vom 18. October 1640 den berühmten nach ihm benannten zahlentheoretischen Satz im wesentlichen folgendermassen ausgesprochen: Ist a irgend eine ganze positive Zahl und p eine Primzahl, so giebt es unter den um 1 verminderten Gliedern der Progression $a, a^2, a^3, \dots$ sicher eines, für welches die Differenz $a^\nu - 1$ durch p teilbar ist. Der niederste dem entsprechende Exponent ν ist ein Teiler von $p-1$. Fermat setzt sogleich hinzu, dass aber keineswegs unter den Summen $a+1, a^2+1, a^3+1, \dots$ notwendig eine durch p teilbare enthalten sei. Eine solche findet sich immer dann nicht, wenn der eben gemeinte niederste Exponent ν eine ungerade Zahl ist. Für diesen Fall eines ungeraden ν giebt Fermat folgende inductiv gewonnenen Beispiele an. Bei der Progression $2, 2^2, 2^3, \dots$ haben ungerades ν diejenigen Primzahlen der Gestalt $4h-1$, welche in dem Reste einer um 2 oder um 8 oder um 32 u. s. w. verminderten Quadratzahl aufgehen. Bei der Progression $3, 3^2, 3^3, \dots$ haben ungerades ν diejenigen Primzahlen der Gestalt $4h-1$, welche in dem Reste einer um 3 oder um 27 oder um 243 u. s. w. verminderten Quadratzahl aufgehen. Auch für die weiter folgenden Progressionen gelten nach Fermat entsprechende Sätze. Der Verf. macht diese Fermat'schen Angaben auf Grundlage der Theorie der Potenzreste und speciell der Primitivwurzeln bezüglich ungerader Primzahlen zum Gegenstand der Untersuchung und entwickelt die Mittel zur allgemeinen Auflösung der Fermat'schen Ansätze. Fr.

J. H. Jeans. The converse of Fermat's theorem. Messenger (2) **27,** 174.

Die Aufgabe besteht darin, n (nicht Primzahl) so zu bestimmen, dass $2^{n-1}-1$ ein Vielfaches von n ist. Der Verf. ermittelt nur zwei Lösungen unter 1000, nämlich $n = 341$ und $n = 645$; die letztere Zahl ist schon von Kossett angegeben. Die Congruenz $2^{n-1}-1 \equiv 0 \pmod{n}$ scheint schon den Chinesen bekannt gewesen zu sein; dieselben behaupteten, dass sie unmöglich sei, wenn n keine Primzahl wäre. Dies war vermutlich empirisch gefunden, und sie würden auch schwerlich auf einen Ausnahmefall gestossen sein, da der Wert von $2^{n-1}-1$, der zu dem niedrigsten Werte $n = 341$ gehört, mit 103 Ziffern geschrieben wird. Andere vom Verf. berechneten Zahlen n sind: 1387, 4369, 4681, 10261. Glr. (Lp.)

G. Wertheim. Berichtigungen zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln der Primzahlen unter 5000. (Bd. **17,** S. 315 und **20,** S. 153 dieser Zeitschrift.) Acta Math. **22,** 200.

Es werden sechs fehlerhafte Angaben richtig gestellt, welche der Verf. in seiner in der Ueberschrift genannten Tabelle aufgefunden hat.

Fr.

J. J. Plamenevsky. Eine Anwendung der Theorie der Indices. X. Vers. Russ. Nat., 107.

Die Tafeln der Indices für zusammengesetzte Moduln ermöglichen es, die Operationen der Multiplication, Division, Potenzirung, Wurzelausziehung durch einfachere zu ersetzen. Der Verf. hat zur Erläuterung zwei Tafeln: I. mod. 10000 zur Basis = 3 und II. mod. 91 zur Basis = 2 ausgerechnet. Si.

M. Bauer. Elementar-zahlentheoretische Sätze. Ungar. Ber. **15**, 41-46.

Abzählung der gegen den Modul m relativ primen Zahlen, welche in der Linearform $(kx+l)$ enthalten sind. Von den vier hierüber bewiesenen Sätzen sind drei Specialfälle des letzten, welcher so lautet: Es seien d_1 und d_2 die grössten gemeinsamen Teiler von k und m, bez. l und m, und es durchlaufe x nur die zu m relativ primen Zahlen. In der Linearform $(kx+l)$ sind dann insgesamt

$$\frac{\psi(m)}{\psi(d_1\, d_2)}\cdot\frac{\varphi(d_1\, d_2)}{\varphi(m)}\cdot\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right)$$

modulo m incongruente und gegen m relativ prime Zahlen enthalten. Hier ist $\varphi(m)$ die bekannte zahlentheoretische Function, und $\psi(m)$ ist erklärt durch

$$\psi(m)=\varphi(m)\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right),$$

wobei sich das Product auf alle s unterschiedenen Primfactoren $p_1, p_2, \ldots, p_s$ von m bezieht. Fr.

J. W. L. Glaisher. On the residue of a binomial-theorem coefficient with respect to a prime modulus.

J. W. L. Glaisher. On the residue with respect to p^{n+1} of a binomial-theorem coefficient divisible by p^n.

J. W. L. Glaisher. A congruence theorem relating to sums of binomial-theorem coefficients. Quart. J. **30**, 150-156, 349-360, 361-383.

Unter $(n)_r$ wird der r^{te} Binomialcoefficient der n^{ten} Potenz verstanden, wobei $r<n$ vorausgesetzt wird; p bedeutet eine Primzahl. Man entwickele die Zahlen n und r nach Potenzen von p:

$$\begin{aligned} n &= q+q_1\,p+q_2\,p^2+\cdots+q_i p^i+\cdots+q_l p^l,\\ r &= s+s_1\,p+s_2\,p^2+\cdots+s_i p^i, \end{aligned}$$

wo die q und s Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-1$ sind. Der erste Aufsatz gilt dem Beweise der Congruenz:

$$(n)_r \equiv (q)_s\cdot(q_1)_{s_1}\cdot(q_2)_{s_2}\cdots(q_i)_{s_i} \qquad (\text{mod. } p).$$

Im zweiten Aufsatze werden entsprechende Entwicklungen für den Fall durchgeführt, dass man an Stelle der Primzahl p eine beliebige Potenz derselben treten lässt.

Der dritte Aufsatz ist der folgenden Congruenz gewidmet:

$$\sum_r (n)_r \equiv (j)_k \qquad (\text{mod. } p).$$

Hier bezieht sich die Summe auf alle Werte r des Intervalls $0 < r \leqq n$, welche der Congruenz $r \equiv k$ (mod. $p-1$) genügen, unter k irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ verstanden; j ist diejenige unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$, welche mit n modulo $(p-1)$ congruent ist. Die fragliche Congruenz gestattet eine Anwendung auf die Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. Der letzte Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit der Auswertung der Summe $\Sigma(n)_r/p$, falls r ein Multiplum von $(p-1)$ ist. Fr.

E. Busche. Ueber eine allgemeine Anzahlbeziehung und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie. Hamb. Mitt. **3,** 333-346.

Es sei eine endliche Anzahl von Systemen je endlich vieler Grössen vorgelegt: $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$; $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$; $\ldots$; $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$. Diese Systeme seien unter einander gemischt, und alsdann seien sämtliche $\alpha+\beta+\cdots+\nu$ Grössen in eine beliebige Anordnung gebracht. Alsdann wird die Anzahl der Grössen b, die vor a_k stehen, mit $a_k(b)$ bezeichnet, und in entsprechendem Sinne werden die Bezeichnungen $a_k(c), \ldots, b_k(a), \ldots$ gebraucht. Der Verf. stellt die Relation auf:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i(b)\, a_i(c) \ldots a_i(n) + \sum_{k=1}^{\beta} b_k(a)\, b_k(c) \ldots b_k(n) + \cdots$$
$$+ \sum_{l=1}^{\nu} n_l(a)\, n_l(b) \ldots n_l(m) = \alpha.\beta.\gamma \ldots \nu.$$

Der Beweis wird in zwei Weisen geführt, einmal dadurch, dass die Invarianz der linken Seite der Gleichung bei Vertauschung zweier benachbarten Grössen der gewählten Anordnung gezeigt wird, sodann durch den Schluss der vollständigen Induction, indem nämlich die Relation bei Zusatz einer Grösse $a_{\alpha+1}$ an irgend einer Stelle der Anordnung erhalten bleibt. Aus der genannten Gleichung leitet der Verf. Relationen zwischen Legendre'schen Zeichen ab, desgl. Relationen zwischen Teilersummen und Teileranzahlen u. a. Fr.

R. v. Sterneck. Ueber die Verteilung quadratischer Reste und Nichtreste einer Primzahl. Mosk. Math. Samml. **20,** 267-284. (Russisch.)

Die Mitteilung schliesst sich eng an die Arbeit von N. Aladow (Mosk. Math. Samml. **18,** 61-75; im Jahrbuch nicht erwähnt). „Für alle Primzahlen p ($p = 2, 3, 5, 7, 11$ u. 17 ausgenommen) giebt es immer in der Folge $1, 2, \ldots, p-1$ wenigstens eine Gruppe aus vier auf einander folgenden Zahlen von gleichem quadratischen Charakter modulo p.“ Daher: „Für jede Primzahl p von der Form $p = 4n+3$ ($p = 3, 7, 11$ ausgenommen) giebt es in der Folge $1, 2, \ldots, p-1$ vier auf einander folgende quadratische Reste und vier auf einander

folgende quadratische Nichtreste modulo p." Weiter: „Für alle Primzahlen ($p = 2, 3, 11$ ausgenommen) giebt es in der Folge $1, 2, \ldots, p-1$ wenigstens ein Paar isolirter quadratischer Reste oder Nichtreste; für die Primzahlen $p = 4n+3$ aber ($p = 3$ u. 11 ausgenommen) giebt es in der Reihe $1, 2, \ldots, p-1$ ein Paar isolirter quadratischer Reste und ein Paar isolirter quadratischer Nichtreste." Si.

Th. Pepin. Dissertation sur deux démonstrations du théorème de réciprocité de Legendre. Rom. Acc. P. d. N. L. **51**, 123-144.

Legendre's eigene Betrachtungen zum Reciprocitätsgesetze der quadratischen Reste enthalten keinen einwurfsfreien Beweis dieses Gesetzes. Indessen lässt sich die Lücke im Legendre'schen Beweise durch folgendes von Gauss bewiesene Theorem ausfüllen: Ist a eine Primzahl der Form $(8n+1)$, so existirt unterhalb $(2\sqrt{a}+1)$ sicher eine Primzahl, von welcher a Nichtrest ist. Der Verf. führt im ersten Teile seines Aufsatzes aus, wie sich der Legendre'sche Beweis auf Grund dieses Theorems gestaltet. Im zweiten Teile giebt der Verf. eine Bearbeitung des fünften Gauss'schen Beweises vom Reciprocitätsgesetz, auf welchen er solchergestalt erneut die Aufmerksamkeit zu lenken beabsichtigt. Dieser Beweis beruht auf demselben bekannten Lemma, welches auch dem dritten Beweise zu Grunde liegt. Gauss selbst hat seinen fünften Beweis für nicht minder wichtig gehalten als den dritten, während in den späteren Darstellungen neuerer Arithmetiker meist nur der dritte Beweis Berücksichtigung findet. Fr.

J. König. Das Reciprocitätsgesetz in der Theorie der quadratischen Reste. Acta Math. **22**, 181-192.

Dieser Beweis des Reciprocitätsgesetzes stützt sich einzig auf diejenigen Eigenschaften des Legendre'schen, bez. Jacobi'schen Zeichens, welche unmittelbar aus der Definition desselben entspringen. Die Entwicklung beruht auf folgenden drei Hülfssätzen: I. Sind q und r ungerade Primzahlen und ist $q < r$, so folgt aus $\left(\frac{\varepsilon_q q}{r}\right) = 1$ stets auch $\left(\frac{r}{q}\right) = 1$. II. Unter denselben Voraussetzungen folgt aus $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$ stets auch $\left(\frac{\varepsilon_q r}{q}\right) = 1$. III. Wieder unter den gleichen Voraussetzungen ergiebt sich aus $\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = 1$ stets auch $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$. Hierbei ist ε_n als Abkürzung für $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ gesetzt. Diese Sätze werden durch den Schluss der vollständigen Induction bewiesen. Der Reciprocitätssatz selbst entspringt leicht aus den Sätzen II und III. Die Combination

derselben ergiebt zunächst $\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)$. Diese Gleichung liefert aber auf Grund der Multiplicationsregel der Legendre'schen Zeichen:

$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{\varepsilon_r}{q}\right)=\left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{r-1}{2}}=(-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{r-1}{2}},$$

wenn man den bereits von Euler auf elementarem Wege bewiesenen Satz $\left(\frac{-1}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}$ benutzt. In der letzten Formel liegt aber das Reciprocitätsgesetz vor. Fr.

X. Stouff. Sur les lois de réciprocité. C. R. **126**, 812-814.

Die Notiz schliesst sich an eine frühere Arbeit desselben Verf. an (s. F. d. M. **27**, 143, 1896). Es handelt sich um die Reciprocitätsgesetze für die aus den Einheitswurzeln des Grades $m=2p+1$ zu bildenden ganzen complexen Zahlen. Es sei α eine primitive Einheitswurzel dieses Grades und $f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots$ eine jener ganzen Zahlen. Verf. macht a. a. O. Angaben über das bei den Reciprocitätsgesetzen auftretende Symbol $\left[\frac{m}{f(\alpha)}\right]$, und er gründet seine Beweise auf die Betrachtung der Gruppe aller Substitutionen $Z'=\alpha^n Z+n(\alpha)f(\alpha)$, unter Z eine variable Zahl $x_0+x_1\alpha+\cdots$ verstanden, eine Gruppe, welche im R_{m-1} einen endlichen Discontinuitätsbereich hat. Verf. bemerkt jetzt, dass es noch einfacher ist, die Untergruppe aller Substitutionen $Z'=\alpha^n Z+m.n(\alpha)f(\alpha)$ zu benutzen. Die Betrachtung derselben liefert einige neue Ergebnisse, so z. B. den Satz: Sind die Coefficienten der beiden ganzen Zahlen $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ mod. m^3 congruent, so ist $\left[\frac{m}{f(\alpha)}\right]=\left[\frac{m}{\varphi(\alpha)}\right]$.
Fr.

G. M. Testi. Sulla risoluzione in numeri interi della equazione $ax+by+cz=k$. Periodico di Mat. **13**, 177-180.

Aufstellung von Formeln, welche die Lösungen der im Titel angegebenen diophantischen Gleichung durch zwei unbestimmte Zahlen ausdrücken, und zwar jede Lösung nur einmal. Lp.

F. Giudice. Sull'analisi indeterminata di primo grado. Batt. G. **36**, 225-232.

Die diophantische Gleichung: $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=a$ mit ganzzahligen $a_1,\ldots,a_n$, a werde befriedigt durch die speciellen ganzen Zahlen $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, $\ldots$, $x_n=\alpha_n$. Man hat dann auch in

$$x_1=\alpha_1+a_2\theta_2+a_3\theta_3+\cdots+a_n\theta_n,$$
$$x_2=\alpha_2-a_1\theta_2,\ x_3=\alpha_3-a_1\theta_3,\ \ldots,\ x_n=\alpha_n-a_1\theta_n,$$

(unter $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ irgend welche ganze Zahlen verstanden) ein ganzzahliges Lösungssystem. Wendet man die hier auf α_1 und $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ausgeübte Transformation zugleich noch auf α_2 und $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$, sodann auf α_3 und $\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n$ u. s. w. an, so gelangt man zum allgemeinsten ganzzahligen Lösungssystem der vorgelegten Gleichung. Der Verf. zeigt dies direct für $n = 3$, weiterhin vermöge des Schlusses der vollständigen Induction. Fr.

G. Th. Woronoj. Ueber die Anzahl der Wurzeln der Congruenz dritten Grades von einfachem Modul. X. Vers. Russ. Nat., 329. (Russisch.)

Es wird ein neuer Beweis des Satzes mitgeteilt: „Damit die Congruenz dritten Grades von einfachem Modul eine Wurzel besitze, ist es notwendig und hinreichend, dass die Discriminante der Congruenz quadratischer Nichtrest des Moduls ist. Ist aber die Discriminante quadratischer Rest des Moduls, so hat die Congruenz drei Wurzeln oder keine“.

Ohne Beweis wird der Satz ausgesprochen: „Für alle einfachen Moduln, welche durch eine quadratische binäre Form darstellbar sind, deren Determinante der Discriminante der Congruenz dritten Grades gleich ist, hat diese Congruenz dieselbe Anzahl der Wurzeln“. Si.

U. Ceretti. Triangoli rettangoli a lati commensurabili tra loro. Suppl. al Period. **2**, 17-19.

Zusammenstellung der bekanntesten Eigenschaften ganzzahliger Lösungen der Gleichung $x^2+y^2 = z^2$. Lp.

K. Schwering. Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen. Pr. (No. 458) Gymn. Düren. 15 S. 4°.

Die im ersten Teile dieser Programmarbeit behandelten geometrischen Aufgaben mit rationalen Lösungen erheben sich nicht über das Gebiet der Elementarmathematik. Der zweite Teil handelt von rechtwinkligen Tetraedern mit ausschliesslich ganzzahligen Kantenlängen. Der Begriff des rechtwinkligen Tetraeders wird dahin gefasst, dass die drei an eine der Ecken heranragenden Winkel sämtlich rechte sein sollen. Sind die drei zugehörigen Kantenlängen x, y, z, während a, b, c die drei anderen Kanten sind, so gilt

$$x^2+y^2 = c^2, \quad y^2+z^2 = a^2, \quad z^2+x^2 = b^2.$$

Es handelt sich also um Auflösungen dieser drei Gleichungen in sechs ganzen Zahlen x, y, z, a, b, c. Da das Quadrat des rationalen Bruches x/y, um 1 vergrössert, wieder ein rationales Quadrat darstellt, so setzt der Verf.

$$\frac{x}{y} = \tfrac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) \text{ und entsprechend } \frac{y}{z} = \tfrac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right),$$

$$\frac{x}{z} = \tfrac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right),$$

wo λ, μ, ν als rationale Grössen angenommen werden. Dann gilt:

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right),$$

und man berechnet ohne Mühe:

$$\tfrac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)=\frac{\lambda^2-1}{\mu^2-1}\cdot\frac{\mu}{\lambda},\qquad \tfrac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)=\frac{\sqrt{\lambda^4+\lambda^2\varrho+1}}{\lambda\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)},$$

wobei $\varrho=\mu^2+\mu^{-2}-4$ zu nehmen ist. Es gilt, λ und μ, bez. λ und ϱ derart rational zu wählen, dass die in der letzten Formel auftretende Quadratwurzel auch rational wird. Da hier die Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten Grades von λ auftritt, so entspringt ein Zusammenhang mit den elliptischen Functionen, wobei μ, bez. ϱ den Modul und λ die Variable des zugehörigen Integrals abgiebt. Der Verf. arbeitet diesen Zusammenhang näher heraus, wobei namentlich die Additionsformeln und das Abel'sche Theorem zur Geltung kommen.

Fr.

S. Tebay. Question 12437. Ed. Times **68**, 103-104.

Vier Quadratzahlen x^2, y^2, z^2, u^2 zu finden, so dass die Summe von je dreien unter ihnen eine Quadratzahl ist. — Für diese Aufgabe wird folgende Lösung gegeben:

$$x=(s^2-1)(s^2-9)(s^2+3),\qquad y=4s(s-1)(s+3)(s^2+3),$$
$$z=4s(s+1)(s-3)(s^2+3),\qquad u=2s(s^2-1)(s^2-9),$$

z. B. für $s=5$ nach Fortlassung gemeinsamer Factoren $x=168$, $y=280$, $z=105$, $u=60$. Als Question 3549 ist dieselbe Aufgabe in Ed. Times **16**, 108-110 von Evans gestellt und gelöst (F. d. M. **4**, 80, 1872).

Lp.

A. Martin and R. Davis. Solution of problem 143. Math. Magazine **2**, 254-255.

Es sollen drei positive ganze Zahlen x, y, z angegeben werden, welche in $x^2+y^2+z^2$ das Quadrat, in $x^3+y^3+z^3$ den Kubus einer ganzen Zahl liefern. Durch geeignete Entwickelung dieser Bedingungen finden die Verf. als Beispiel die drei Zahlen

$x=11868013975030087$, $y=16269106368215226$,
$z=8883722681490989 4$.

Fr.

A. Martin. About fifth-power numbers whose sum is a fifth power.

A. Martin. Notes about square numbers whose sum is either a square or the sum of other squares.

A. Martin. Formulas for the sides of rational plane triangles. Math. Magazine **2**, 200-208, 209-220, 221-236.

1. Mit Zusätzen versehener Wiederabdruck einer in den Chicago Congress Papers veröffentlichten Abhandlung des Verfassers (siehe F. d. M. **28**, 175, 1897).

2. Der zweite Aufsatz schliesst sich an einige frühere Notizen des Verf. über den gleichen Gegenstand, siehe F. d. M. **27**, 147, 1896 und die vorangehenden Jahrgänge. Es wird erstlich die Aufgabe behandelt, Quadratzahlen anzugeben, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist. Das macht der Verf. so, dass er einfach die Identität:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2+b^2)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2-b^2)^2 +(2a_1b)^2+\cdots+(2a_{n-1}b)^2$$

für einige specielle Systeme ganzer Zahlen a, b ausrechnet. Von einigen weiteren Aufgaben, die behandelt werden, sei die folgende genannt: Es sollen drei derartige Quadratzahlen genannt werden, dass die Summe von je zweien wieder ein Quadrat darstellt. Auch bei der Behandlung dieser und weiterer analoger Fragen erhebt sich der Verf. nicht über das Gebiet der Elementarmathematik.

3. Unter einem rationalen Dreieck wird ein solches mit rationalen Seiten und Höhen verstanden. Bei der Auffindung solcher Dreiecke arbeitet der Verf. wieder mit einfachen algebraischen Identitäten, z. B. für das rechtwinklige Dreieck mit $(p^2+q^2)^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2$. So bekommt man Beispiele, gewinnt aber niemals Einblick in die Gesamtheit der Dreiecke der gerade betrachteten Art. Fr.

C. Pietrocola. Sulla risoluzione per numeri interi dell'equazione $x^4+4hx^2y^2+(2h-1)^2y^4=z^2$, ove $4h-1$ e $2h-1$ sono numeri primi. Batt. G. **36**, 77-80.

Der Verf. gründet seine Erörterungen auf den Umstand, dass man aus jeder „eigentlichen" Lösung der vorgelegten Gleichung in ganzen Zahlen x_0, y_0, z_0 vermöge des Ansatzes:

$$x=x_0^4-(2h-1)^2y_0^4,\quad y=2x_0y_0z_0,\quad z=z_0^4-4(4h-1)x_0^4y_0^4$$

eine ebensolche Lösung x, y, z mit ungeradem x ableiten kann. Der Hauptinhalt der Notiz ist der Beweis der Umkehrbarkeit dieses Processes. Es wird aus einer eigentlichen Lösung x, y, z umgekehrt eine solche x_0, y_0, z_0 hergestellt, vorausgesetzt dass x ungerade ist. Dieser Process kann dann so lange fortgesetzt werden, bis ein Zahlentripel mit gerader erster Zahl sich einstellt. Dieses Tripel giebt die „Anfangslösung" der Reihe von Lösungen, die durch die soeben angegebenen Gleichungen zusammenhängen. Fr.

T. Pepin. Solution de l'équation $x^4-8x^2y^2+8y^4=z^2$. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **14**, 71-85.

Die Lösung der in der Ueberschrift angegebenen Gleichung in ganzen Zahlen wird hier nach einer „méthode de descente" von Fermat angebahnt. Das Wesen dieser Methode besteht darin, dass das einzelne

Lösungssystem x, y, z (man kann sich leicht ersichtlich auf Zahlen x, y, z beschränken, von denen keine zwei einen Factor gemeinsam haben) durch einen einfachen Algorithmus aus drei kleineren Zahlen t, u, a hergestellt werden, welche wieder derselben Gleichung wie x, y, z genügen. Freilich ist diese Reduction direct nur möglich, falls y gerade ist; in diesem Falle gilt:

$$t^4-8t^2u^2+8u^4=a^2,$$

$$\pm x=t^4-8u^4, \qquad y=2atu, \qquad z=a^4-32t^4u^4.$$

Man kann jetzt, wenn auch u gerade ist, den gleichen Reductionsprocess nochmals und unter der entsprechenden Bedingung wiederholt anwenden. Aber man wird so notwendig nach endlich vielen Schritten zu einem Zahlentripel kommen, in welchem die zweite Zahl ungerade ist. Die Methode schliesst also nicht vollständig ab.

Hat man nun ein solches Tripel mit ungerader zweiter Zahl gewonnen, oder ist gleich anfangs y ungerade, so reducirt der Verf. die zu lösende Aufgabe auf die ganzzahlige Auflösung der Gleichungen:

$$pq=rs, \qquad p^2-4q^2+4pq+8s^2-r^2=0.$$

Der Verf. zeigt, dass bei der Behandlung dieser Gleichungen die Fermat'sche Methode ohne Ausnahme anwendbar ist. Es folgt bei der numerischen Durchführung, dass im ganzen sechs Lösungen x, y, z in nicht-verschwindenden Zahlen existiren, welche $y<10^{10}$ befriedigen.

Fr.

E. Maillet. Sur l'équation indéterminée $ax^{\lambda^t}+by^{\lambda^t}=cz^{\lambda^t}$.
Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 156-168.

Nach einer kurzen Uebersicht über die Litteratur der Frage für den Fall $t=1$ geht der Verf. zum Beweise mehrerer Lehrsätze über: I. Damit die unbestimmte Gleichung $ax^{\lambda^t}+by^{\lambda^t}=cz^{\lambda^t}$ [in der λ eine Primzahl bedeutet, ferner x, y, z paarweise relativ prim sind zu einander und auch zu λ; ebenso a, b, c] ein System von Lösungen zulasse, ist es notwendig, dass die Congruenz $a+b\eta_0^{\lambda^t}\equiv c(\alpha+\beta\eta_0)^{\lambda^t}$ (mod. λ^{t+1}) [in der α, β diejenigen unter λ liegenden Zahlen sind, welche den Congruenzen genügen: $a\equiv c\alpha$, $b\equiv c\beta$ (mod. λ)] eine Lösung $\eta_0>0, <\lambda$ zulasse, für welche $\alpha+\beta\eta_0$ nicht congruent 0 (mod. λ) ist. — Insbesondere wenn $t=1$ und $a\equiv b\equiv c\equiv 1$ (mod. λ^2), so ist die Gleichung unmöglich für λ gleich 3, 5, 11, 17, 23 und 29. Ebenso ist die Gleichung $ax^{2\lambda}+by^{2\lambda}=cz^{2\lambda}$, wo $a\equiv b\equiv c\equiv 1$ (mod. λ^2), wenn a, b, c, x, y, z den Bedingungen des Satzes I genügen, unmöglich für λ gleich 7, 19 und 31. Endlich findet die Unmöglichkeit von $x^\lambda+y^\lambda=z^\lambda$, wo λ eine Primzahl ist und x, y, z den Bedingungen des Satzes I genügen, für $\lambda<223$ statt, während Sophie Germain und Legendre dieselbe für $\lambda<197$ erwiesen haben. II. Die unbestimmte Gleichung $x^{\lambda^t}+y^{\lambda^t}=z^{\lambda^t}$, in der λ eine Primzahl bedeutet, ist in ganzen complexen, aus den λ^{ten} Einheitswurzeln gebildeten Zahlen, die

aber paarweise unter einander und zu λ relativ prim sind, für einen Wert von t unmöglich, der nach oben als Function von λ begrenzt ist, wenn $\lambda > 3$. Eine Anzahl von Tabellen macht den Beschluss.

Lp.

C. Störmer. Sur une équation indéterminée. C. R. **127,** 752-754.

Der Verf. hat früher (F. d. M. **28,** 192, 1897) folgenden Satz bewiesen: Ist $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ ganzzahlig lösbar, und ist x_1, y_1 die kleinste positive Lösung, so hat höchstens diese kleinste Zahl y_1 die Eigenschaft, dass jeder ihrer Primteiler auch D teilt, während keine Zahl y der übrigen ganzzahligen Lösungen dieselbe Eigenschaft besitzt. Auf dieses Theorem gründet sich die Lösung der Gleichung:

$$AM_1^{x_1}M_2^{x_2}\dots M_m^{x_m} - BN_1^{y_1}N_2^{y_2}\dots N_n^{y_n} = C$$

in ganzen Zahlen x, y, wobei A, B, M_1, M_2, ..., N_1, ... positive ganze Zahlen sind und $C = \pm 1$ oder ± 2 zu setzen ist. Es wird gezeigt, dass, wenn überhaupt ganzzahlige Lösungen $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ existiren, solche jedenfalls nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Die Auflösung der vorgelegten Gleichung wird nämlich in folgender Weise auf die Lösung endlich vieler Pell'scher Gleichungen basirt. Es wird:

$$BN_1^{y_1}N_2^{y_2}\dots N_n^{y_n} = z$$

gesetzt, was zur Folge hat:

$$AM_1^{x_1}M_2^{x_2}\dots M_m^{x_m} = z + C,$$

$$z(z+C) = ABM_1^{x_1}\dots M_m^{x_m}N_1^{y_1}\dots N_n^{y_n}.$$

Die linke Seite $z(z+C)$ ist, je nachdem $C = \pm 1$ oder ± 2 ist, mit $\frac{1}{4}[(2z\pm 1)^2 - 1]$ oder $(z\pm 1)^2 - 1$ identisch. Man wird so in jedem Falle zur Auflösung einer Gleichung:

$$x^2 - 1 = KA_1^{z_1}A_2^{z_2}\dots A_\varrho^{z_\varrho}$$

geführt. Setzt man jetzt $z_1 = \varepsilon_1 + 2t_1$, ..., $z_\varrho = \varepsilon_\varrho + 2t_\varrho$ (unter den ε entweder 1 oder 2 verstanden) und benutzt die Abkürzungen:

$$KA_1^{\varepsilon_1}A_2^{\varepsilon_2}\dots A_\varrho^{\varepsilon_\varrho} = D \quad \text{und} \quad A_1^{t_1}A_2^{t_2}\dots A_\varrho^{t_\varrho} = Q,$$

so ist $x^2 - DQ^2 = 1$, und alle Primteiler von Q teilen auch D. Da die ε auf 1 und 2 beschränkt sind, so hat man nur endlich viele D; und da nach dem vorausgeschickten Hülfssatze immer nur die kleinste Lösung der einzelnen Pell'schen Gleichung in Betracht kommen kann, so ist die Anzahl der gesuchten Lösungen sicher nicht grösser als die Anzahl der eben genannten Zahlen D.

Am Schlusse der Notiz werden noch einige verwandte Probleme genannt.

Fr.

G. Volle. Sulla totalità dei numeri primi compresi fra due limiti dati. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **14,** 143-161.

Kurzes Referat über Gauss', Encke's, Legendre's Näherungsformeln und Riemann's Primzahlarbeit; ausführliches Referat über Meissel's bekannte Reductionsmethode zur Primzahlabzählung. Einige eigene Entwicklungen des Verf. schliessen sich an. Insbesondere wird folgender Satz bewiesen: Es seien $p_1, p_2, \dots, p_r$ die ersten r ungeraden Primzahlen und p deren Product; ist zwischen $p-p_r^2$ und $p+p_r^2$ die Potenz 2^n der Zahl 2 gelegen, so ist $p-2^n$ eine positive oder negative Primzahl. Fr.

H. von Schaper. Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Diss. Göttingen. IX + 68 S. 8°.

Diese auf Veranlassung Hilbert's ausgearbeitete Dissertation behandelt die neuesten tiefgehenden Errungenschaften der Theorie der analytischen Functionen, welche man Hadamard verdankt. Weierstrass' Ansatz, die Theorie der analytischen Functionen auf den Begriff der Potenzreihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ zu gründen, hat durch Hadamard eine neue und aussichtsreiche Fortentwicklung gefunden. Es handelt sich dabei namentlich um die Theorie der ganzen transcendenten Functionen, speciell um einen Zusammenhang zwischen den Entwicklungscoefficienten a_m einerseits und der Lage der Nullpunkte sowie einer als „Geschlecht" oder „Höhe" der Function bezeichneten ganzen Zahl andrerseits.

Da Hadamard's eigene Entwicklungen in ihrer Allgemeinheit vielfach schwierig sind, so ist es ein nützliches Unternehmen, die gedachten Entwicklungen an einer speciellen Functionengattung zur Durchführung zu bringen. Indem der Verf. dies für die nach Hilbert so benannten „Hadamard'schen Functionen" ausführt, gelingt es ihm, eine Reihe von Vereinfachungen in den Beweisen anzubringen.

In letzterer Hinsicht ist erstlich der Satz vom „Polproduct" zu nennen. Derselbe bezieht sich auf eine Function, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, und die in der Umgebung des Nullpunktes durch die convergente Reihe $\sum a_m z^m$ darstellbar ist. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ die nach der Grösse geordneten absoluten Beträge der Pole von $f(z)$, so gilt der merkwürdige Satz, dass für jede Zahl p der reciproke Wert des Productes $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{p+1}$ als Grenzwert einer in den Coefficienten a_m höchst einfach gebauten $(p+1)$-gliedrigen Determinante darstellbar ist.

Die Begriffsbestimmung der Hadamard'schen Functionen ist die folgende: Nach dem Satze vom wahren Convergenzradius muss für eine ganze transcendente Function $\sum a_m z^m$ die Grenze der m^{ten} Wurzel $\sqrt[m]{a_m}$ für $\lim m = \infty$ gleich Null sein. Man formulire diesen Umstand durch die Bedingung $|a_m| \leq \dfrac{1}{(\varphi(m))^m}$, wo $\varphi(m)$ eine mit m selbst unendlich wachsende, übrigens von Hadamard ausführlich studirte

Function ist. Man trifft nun auf ganze Functionen, wenn man $(\varphi(m))^m = (m!)^\alpha$ setzt, unter α eine positive, von m unabhängige Zahl verstanden. Lässt sich aber eine solche, und zwar möglichst klein gewählte Zahl $\alpha > 0$ angeben, so dass für hinreichend grosse Werte von m dauernd die Ungleichung $|a_m| < \frac{1}{(m!)^\alpha}$ gilt, so wird die durch $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ dargestellte Function als eine Hadamard'sche bezeichnet, und α heisst die „Ordnung" derselben. Die Hadamard'schen Functionen stellen eine specielle Gattung ganzer transcendenter Functionen dar, welche sich auf Grund des vollzogenen Vergleichs ihrer Reihe mit der Exponentialreihe als Functionen nicht-verschwindender (positiver) Ordnung charakterisiren. Die übrigen ganzen transcendenten Functionen, sowie alle Functionen, welche im Endlichen nicht überall regulär sind, bekommen in entsprechender Definitionsweise die Ordnung Null. Es liegt nahe und wird bewiesen, dass die Ordnung einer ganzen Function unabhängig von der besonderen Stelle ist, für welche man die Potenzreihenentwicklung vornimmt.

Die nächsten Untersuchungen gelten dem Wachsen der Hadamard'schen Functionen bei wachsenden Beträgen $|z| = r$. Giebt es für irgend eine ganze transcendente Function $f(z)$ eine bestimmte kleinste Zahl λ, so dass für hinreichend grosse $|z| = r$ der Bedingung $|f(z)| \leqq e^{r^\lambda}$ stets genügt wird, so heisst $f(z)$ vom „Typus" e^{r^λ}. Es wird das Theorem bewiesen, dass die Hadamard'schen Functionen identisch sind mit den Functionen des Typus e^{r^λ}, wo λ der reciproke Wert der Ordnung α ist.

Es soll übrigens bemerkt werden, dass die Definitionen vom Verf. meist ausführlicher und schärfer gegeben werden. Die umständliche Wiedergabe verbietet sich hier aus Raummangel.

Die von Laguerre im Anschluss an Weierstrass' Productentwickelung eingeführte Bezeichnung „Geschlecht" einer ganzen transcendenten Function wird hier, um Verwechselungen mit anderen Bedeutungen dieser Benennung zu vermeiden, durch „Höhe" ersetzt. Hat der Exponentialfactor der Productentwickelung $f(z) = e^{g(z)}\Pi(z)$ einen ganzen rationalen Exponenten $g(z)$ hinreichend geringen Grades, so ist bekanntlich die Höhe die kleinste positive ganze Zahl E, für welche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{E+1}}$ convergirt, unter $r_1, r_2, \ldots$ die absoluten Beträge der Nullstellen von $f(z)$ verstanden. Als ganze Zahl giebt E die Verteilung der Nullstellen von $f(z)$ noch nicht hinreichend scharf. Borel ist in dieser Hinsicht noch einen Schritt weiter gegangen, indem er eine Zahl ϱ als „wirkliche Ordnung" von $f(z)$ definirt, falls für jede beliebig kleine positive Zahl ε die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\varrho+\varepsilon}}$ convergirt, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\varrho-\varepsilon}}$ dagegen divergirt. Der Verf. bezeichnet ϱ als „Convergenzexponenten".

Es werden nun die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen für die Hadamard'schen Functionen solchergestalt definirten charakteristischen Zahlen untersucht. Für eine Function, deren Productentwickelung von einem Exponentialfactor frei ist, hat man z. B. den Satz, dass der Convergenzexponent ϱ reciprok zur Ordnung α ist u. s. w.

Zu bemerken ist noch, dass die Hadamard'sche Formel für das Product der absoluten Beträge der Nullstellen durch Heranziehung eines Satzes von Schou (s. F. d. M. **28,** 361, 1897) wesentlich kürzer bewiesen wird als bei Hadamard selbst.

Die wichtigste bisherige Anwendung der Hadamard'schen Schöpfungen ist die auf die weitere Ausgestaltung und Begründung von Riemann's Primzahlarbeit. Dabei steht der Satz im Mittelpunkte, dass die bei Riemann auftretende ganze transcendente Function $\xi(z)$ in Abhängigkeit von z^2 die Höhe Null besitzt. Auch hier gelingt es dem Verf., den ursprünglichen Hadamard'schen Beweis dieses Theorems zu kürzen.

Fr.

H. von Mangoldt. Ueber eine Anwendung der Riemann'schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. J. für Math. **119,** 65-71.

Die Arbeit behandelt den schon seit mehr als 50 Jahren erkannten Zusammenhang der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze x mit dem Integrallogarithmus, d. i. mit der Function:

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon=0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dy}{\log y}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dy}{\log y}\right).$$

Der Verf. gelangt auf Grund eigener früherer Untersuchungen (s. F. d. M. **25,** 263, 1894), sowie mit Benutzung von Ergebnissen Hadamard's (s. F. d. M. **27,** 154, 1896) und de la Vallée Poussin's (s. F. d. M. **28,** 178, 1897) zu folgendem Theorem, welches den gedachten Zusammenhang mit einer früher nicht erkannten Genauigkeit darstellt: Die Anzahl aller Primzahlen unterhalb x wird für grosse x durch $Li(x)$ näherungsweise dargestellt, und zwar soweit genau, dass der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Fehler durch die darzustellende Zahl selbst dividirt, bei unbegrenzt wachsendem x die Null zur Grenze hat.

Fr.

H. von Mangoldt. Démonstration de l'équation $\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}=0$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15,** 431-454.

Aus Berl. Ber. 1897, 835-852 übersetzt; s. F. d. M. **28,** 180, 1897.

P. Mansion. Rapport sur la quatrième partie des recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. Brux. S. sc. **22** A, 1-3. Mn.

P. Mansion. Rapport sur un Mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin intitulé: Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Belg. Bull. (3) **35,** 10-21.

Bericht über diese wichtige Arbeit. Mn.

Ch. de la Vallée Poussin. Sur la théorie des nombres premiers. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 194-195.

Kurze Uebersicht über die vom Verf. erreichten Resultate (s. F. d. M. **28,** 178-180, 1897). Lp.

Ch.-J. de la Vallée Poussin. Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques. Brux. S. sc. **22** A, 84-90.

Es ist
$$T(1, b)+T(2, b)+\cdots+T(n, b)$$
$$=\frac{n}{a}\left\{\log\frac{n}{a}+C-1-\frac{\Gamma'(b/a)}{\Gamma(b/a)}\right\}+O(\sqrt{n}),$$
wo $T(n, b)$ die Anzahl der Divisoren von n bezeichnet, die von einer gegebenen linearen Form $ax+b$ sind, C die Euler-Mascheroni'sche Constante ist und $O(\sqrt{n})$ ein Glied, dessen Verhältnis zu $\sqrt{n}$ endlich bleibt. — Folgerungen. Mn. (Lp.)

H. Laurent. Sur la théorie des nombres premiers. C. R. **126,** 809-810.

Ist z eine Primzahl, so ist $\Gamma(z)+1$ nach dem Wilson'schen Satze teilbar durch z. Ist z zusammengesetzt und >4, so ist $\Gamma(z)$ durch z teilbar. Hiernach ist:
$$\frac{e^{2\pi i\frac{\Gamma(z)}{z}}-1}{e^{-\frac{2\pi i}{z}}-1}=\omega(z)$$
mit 0 oder 1 identisch, je nachdem z zusammengesetzt oder Primzahl ist. Bedeutet also $f(z)$ eine Function, welche für alle ganzen Zahlen $z>4$ endlich ist, so gilt
$$\sum_5^n \omega(n)f(n)=\Sigma f(p_i),$$
wo sich die Summe links auf alle ganzen Zahlen von 5 bis n erstreckt, diejenige rechts auf die Primzahlen p_i dieses Intervalls. Indem Verf. auf die links stehende Summe Dirichlet's Summationsformel einer Fourier'schen Reihe anwendet, gelangt er zur Gleichung:
$$\Sigma f(p_i)=\sum_{x=1}^{\infty}\int_a^b \omega(\xi)f(\xi)e^{2x\pi i(\xi-a)}\,d\xi;$$

die links stehende Summe bezieht sich auf alle Primzahlen p_i zwischen den Grenzen a und b, welche letzteren Zahlen zusammengesetzt sein sollen. Die Entwickelung lässt sich verallgemeinern auf Primzahlen p'_i, die einer arithmetischen Reihe angehören, und gestattet einen Beweis des auf die letzteren Primzahlen bezüglichen Dirichlet'schen Theorems.
Fr.

A. P. Minin. Entwickelung der Function $\theta(n)$ nach $[n+1-x]$. Moskau Physik. Sect. **9**, No. 2, S. 22. 4°. (Russisch.)

Die Function $\theta(n)$ (Anzahl der Primzahlen, welche n nicht übersteigen) giebt entwickelt:

$$\theta(n) = [(n+1)-2]+[(n+1)-5]+[(n+1)-7]+\cdots \\ -\Sigma_x\,\psi(x-1)\,[(n+1)-x],$$

wo die Summe sich auf alle zusammengesetzten Zahlen x bezieht, und $\psi(x-1) = 0$, wenn $x-1$ eine zusammengesetzte Zahl ist, und $\psi(x-1) = 1$, wenn $x-1$ eine Primzahl ist. Si.

J. P. Gram. Note sur le problème des nombres premiers. Kjöb. Overs. 1897, 235-251.

Diese Note besteht aus zwei verschiedenen Teilen. Im ersten Teile versucht der Verf. in sehr eigentümlicher Weise eine Grenze der Anzahl der Primzahlen zu finden, die kleiner als 2^n sind. Dieses geschieht, indem er die natürliche Zahlenreihe mit zwei anderen so vergleicht, dass er einmal jede Zahl durch die unmittelbar vorangehende Potenz von 2 ersetzt und zweitens durch die unmittelbar folgende. Hierdurch gelangt er, indem er analoge Formeln zu der bekannten Formel $(1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots)(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\cdots = 1$ bildet, zuletzt zu dem Beweise dafür, dass, wenn

$$\vartheta(2^n) = \theta(2^n)+\tfrac{1}{2}\theta(2^{\frac{n}{2}})+\tfrac{1}{3}\theta(2^{\frac{n}{3}})+\cdots,$$

wo $\theta(m)$ die Menge der Primzahlen bis zu m angiebt,

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n} > \vartheta(2^n) > \frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{n-1}\,.$$

Im zweiten Teil versucht der Verf. das Verfahren von Tschebyscheff auf die Berechnung der Function $\psi(n)$ zu erweitern und zu modificiren. $\psi(n)$ bedeutet die Function

$$\Sigma\log p+\tfrac{1}{2}\,\Sigma\log p^2+\tfrac{1}{3}\,\Sigma\log p^3+\cdots,$$

wo die Summationen über alle Primzahlen, die niedriger als n sind, ausgedehnt werden. Das Verfahren des Verf. ist auch hier sehr eigentümlich. Das endliche Resultat ist:

$$1{,}07745\,n > \psi(n) > 0{,}93447\,n,$$

während Tschebyscheff gefunden hat:

$$1{,}10555\,n > \psi(n) > 0{,}92129\,n.$$

V.

J. Pervouchine. Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'après le numéro de ces nombres. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 166-167.

Der Verf. hat aus Tabellen für Primzahlsummen, die er seit 1891 berechnete, eine Reihe empirischer Gesetze abgelesen, von denen folgende die fundamentalen sind:

$$\frac{\Sigma P}{\Sigma N} = \log N + \log(\log N) - 1{,}5 - \frac{1}{12 \log N},$$

$$\frac{P}{N} = \log N + \log(\log N) - 1 + \frac{5}{12 \log N} + \frac{1}{24 (\log N)^2},$$

$$\Delta P = \log N + \log(\log N) + \frac{17}{12 \log N} - \frac{3}{8 (\log N)^2} - \frac{1}{12 (\log N)^3},$$

$$d = 0{,}5 + \frac{1}{2 \log N} + \frac{1}{24 (\log N)^2}.$$

Hierbei ist $\Sigma P = 1+2+3+5+7+11+\cdots+P$ die Summe der N ersten Primzahlen, und ΣN ist gleich $1+2+3+4+\cdots+N$; ferner ist ΔP die Differenz der N^{ten} Primzahl P und der voraufgehenden, und endlich bedeutet d die folgende Differenz:

$$d = \frac{P}{N} - \frac{\Sigma P}{\Sigma N}.$$

Fr.

J. W. L. Glaisher. Table of the values of $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{x-1}{x}$, the denominators being the series of prime numbers. Messenger (2) **28,** 1-17.

Bezeichnet man das im Titel stehende Product, in dem 2, 3, 5, 7, ..., x die Folge der Primzahlen ist, mit $f(x)$, so giebt die Tabelle die Werte von $f(x)$ und von $\log_{10} f(x)$ auf sieben Decimalstellen für alle Primzahlen x unterhalb 10000. Die Tabelle kann als eine Ausdehnung einer anderen angesehen werden, die von Legendre in seiner Théorie des nombres gegeben ist und die Werte von $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{x-1}{x}$, also von $2f(x)$ enthält, und zwar für Primzahlen von $x = 3$ bis $x = 1229$ auf sechs Decimalen.

Glr. (Lp.)

K. Th. Vahlen. Ueber Linearformen, welche unendlich viele Primzahlen enthalten. Königsb. Physik.-ökon. Ges. 1897, 1 S.

Mit Hülfsmitteln, die der Theorie der Kreisteilung entnommen sind, wird der Specialfall des Dirichlet'schen Satzes bewiesen, dass in der arithmetischen Reihe 1, $1+m$, $1+2m$, $1+3m$, ... unendlich viele Primzahlen enthalten sind.

Fr.

R. Daublebsky von Sterneck. **Bemerkung über die Summirung einiger zahlentheoretischen Functionen.** Monatsh. f. Math. **9**, 43-45.

Unter $\vartheta(k)$ wird eine beliebige zahlentheoretische Function verstanden, die jedoch nnr die Werte 0, $+1$, -1 annehmen soll; $[n/k]$ ist die grösste in n/k enthaltene ganze Zahl. Verf. setzt:

$$\vartheta(1)\cdot\left[\frac{n}{1}\right]+\vartheta(2)\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\vartheta(n)\cdot\left[\frac{n}{n}\right]=F(n)$$

und nimmt an, dass $F(n)$ für alle Argumente $n=1, 2, 3, \ldots$ bekannt sei. Für die absoluten Beträge der aus $\vartheta(k)$ zu bildenden Summen wird alsdann gezeigt:

$$\sum_{k=1}^{n}\vartheta(k)<\left|F(n)-F\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)-F\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)-F\left(\left[\frac{n}{6}\right]\right)\right|+\frac{n}{9}+6.$$

Anwendungen werden gemacht auf die bekannte Function $\vartheta(n)=\mu(n)$, sowie auf $\vartheta(n)=(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$, falls $n=p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ die Primfactorenzerlegung von n ist. Fr.

J. Franel. **Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques.** Math. Ann. **51**, 369-387.

Die Abhandlung ist der Bestimmung der asymptotischen Werte gewisser Summenausdrücke gewidmet, und zwar wird als eine solche Summe gleich anfangs $\sum_{xy\leqq n}[n/xy]$ genannt, wobei unter $[A]$ die grösste ganze, in A enthaltene Zahl gemeint ist und sich die Summe auf alle positiven ganzen Zahlen x, y bezieht; natürlich braucht man nur die mit $xy\leqq n$ übereinstimmenden Zahlenpaare zuzulassen. Der Verf. berechnet als asymptotischen Wert dieser Summe für wachsendes n:

$$\tfrac{1}{2}n[(\log n+3C-1)^2-3C^2+6C_1+1]+R(n^{\frac{2}{3}}\log n).$$

Hierbei ist C die Euler'sche Constante und $C_1=0{,}07281584548\ldots$; ferner bedeutet $R(n^{\frac{2}{3}}\log n)$ einen Ausdruck, der, durch $n^{\frac{2}{3}}\log n$ dividirt, bei wachsendem n unterhalb einer von n unabhängigen bestimmten Zahl bleibt.

Die Untersuchung basirt auf dem Gebrauch einer Function $\vartheta(n)=\sum_{xy=n}f(x)g(y)$, wo f und g beliebige Functionen sind und die Summe sich auf alle Zerlegungen $n=x\,.\,y$ der Zahl n in ganzzahlige Factoren x, y bezieht. Die in der Ueberschrift der Abhandlung gemeinte Formel betrifft diese Function $\vartheta(n)$ und lautet:

$$\sum_{s=1}^{n}\vartheta(n)=\sum_{r=1}^{\nu}f(r)\,G\left[\frac{n}{r}\right]+\sum_{r=1}^{\nu}g(r)\,F\left[\frac{n}{r}\right]-F(\nu)\,G(\nu).$$

Hier ist $\nu=[\sqrt{n}]$, und F, G sind in der Bedeutung

$$F(n)=\sum_{s=1}^{n}f(s),\quad G(n)=\sum_{s=1}^{n}g(s)$$

gebraucht.

Eine ganz entsprechende Untersuchung wird für die nächst allgemeinere Function $\vartheta(n) = \sum_{xyz=n} f(x)g(y)h(z)$ durchgeführt. Der Verf. bedient sich bei der Verificirung dieser Formeln einer geometrischen Denkweise, bei welcher x, y, bez. x, y, z rechtwinklige Coordinaten sind.

Den Uebergang zu der am Anfang genannten asymptotischen Darstellung gewinnt Verf., indem er die drei Functionen f, g, h mit 1 identisch annimmt. Fr.

HADAMARD. Sur les séries de Dirichlet. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 41-45.

„Zwischen zwei Dirichlet'schen Reihen $L(s)$ und $L'(1-s)$, wo L' die zu L conjugirte bedeutet und $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(l)}{l^s}$ ist, besteht eine wichtige Relation, die in ihrer ganzen Allgemeinheit zuerst von Lipschitz aufgestellt ist. Um jedoch zu dem Resultate zu gelangen, benutzt dieser Mathematiker einen Kunstgriff, der mir unnütz zu sein scheint. Ich werde zeigen, dass dieser Kunstgriff sich vermeiden lässt."

Lp.

A. HURWITZ. Sur les formes arithmétiques linéaires à coefficients réels quelconques. Traduit par L. Laugel. Nouv. Ann. (3) **17**, 64-74.

Aus Gött. Nachr. 1897, 139-145; s. F. d. M. **28**, 183, 1897.

M. LERCH. Ueber die Gauss'schen Summen. Časopis **28**, 1-24 (Böhmisch).

Die Abhandlung ist eine Bearbeitung der bekannten Abhandlung Kronecker's (Berl. Monatsber. 1880; F. d. M. **12**, 123, 1880); sie giebt zunächst eine strenge Begründung gewisser von Kronecker nur angedeuteten Grenzübergänge und führt die Auswertung der allgemeinen Gauss'schen Summen zu Ende, indem sie sich auf die Identität

$$\sqrt{\frac{n}{n_1 i}} = (-1)^{\frac{1+\operatorname{sgn} n}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn} n_1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_1}\sqrt{i}}$$

stützt. Lh.

A. BERGER. Undersökningar öfver några aritmetiska funktioner. Stockh. Öfv. 1898, No. 9, 579-619. Hmg.

K. TH. VAHLEN. Ueber complexe Zahlen in mehr Dimensionen. Königsb. Physik.-ökon. Ges. 1897, 7 S.

Es handelt sich um Zahlsysteme, die aus $(p+1)$ Einheiten $1, i_1, i_2, \ldots, i_p$ entstehen, und die sich für $p = 1$ auf die gewöhnlichen complexen Zahlen reduciren, für $p = 3$ aber die Quaternionen

als Specialfall enthalten. Für die Multiplication gilt zwar das distributive, aber nicht das commutative Gesetz. Im speciellen gilt für die Einheiten $i_\alpha^2 = -1$, $i_\alpha i_\beta = -i_\beta i_\alpha$. Werden weitere Relationen nicht vorausgesetzt, so führt die Multiplication auf das Gebiet der 2^p-gliedrigen Zahlen:

$$A = a + i_1 a_1 + \cdots + i_p a_p + i_1 i_2 a_{12} + \cdots + i_{p-1} i_p a_{p-1,p} + \cdots + i_1 i_2 \ldots i_p a_{12\ldots p},$$

während die Division eine neue Erweiterung nicht erfordert.

Ist $A^{-1} = x + i_1 x_1 + \cdots + i_1 i_2 \cdots i_p x_{12\ldots p}$ die zu A reciproke Zahl, welche also $A \,.\, A^{-1} = 1$ liefert, so bestimmen sich die reellen Coefficienten $x_1, \ldots, x_{12\ldots p}$ derselben aus den 2^p linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\,x - a_1\,x_1 - a_2\,x_2 - \cdots &= 1, \\ a_1 x + a x_1 \quad - a_{12} x_2 + \cdots &= 0, \\ a_2 x + a_{12} x_1 + a x_2 \quad + \cdots &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &. \end{aligned}$$

Für die Determinante dieses Systems:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a, & -a_1, & -a_2, & \ldots \\ a_1, & a, & -a_{12}, & \ldots \\ a_2, & a_{12}, & a, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

gilt der bekannte wichtige Satz, dass $\varDelta$, sofern es sich nicht um die gewöhnlichen complexen Zahlen oder die Quaternionen handelt, für specielle Zahlen A verschwinden kann. Diese Zahlen A sind die „Teiler der Null“, sie besitzen keine reciproke Zahlen A^{-1}.

Als „Orthogonalzahlen“ bezeichnet Verf. diejenigen A, bei denen $\varDelta$ ein orthogonales System darstellt. Unter den Orthogonalzahlen befinden sich keine Teiler der Null, und insbesondere gilt der Satz, dass sich die Orthogonalzahlen gegenüber der Multiplication reproduciren. Der weitere Ausbau der Abhandlung gilt insbesondere der Theorie dieser Orthogonalzahlen. Fr.

J. A. Gmeiner. Die Einheiten im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln. Monatsh. f. Math. **9,** 184-206.

Dieser Aufsatz stellt nur eine Uebungsarbeit dar, in welcher die Dirichlet'sche Einheitentheorie für den Körper der aus den fünften Einheitswurzeln zu bildenden algebraischen Zahlen specialisirt wird. Verf. wird manches noch kürzer darstellen können, falls er erst eine etwas sicherere Kenntnis der Theorie der algebraischen Zahlen besitzt. Fr.

D. Hilbert. Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. **51,** 1-127.

Die Probleme in der Theorie der quadratischen binären Formen, die den Hauptgegenstand von Gauss' disquisitiones arithmeticae bilden, werden hier in weitgehender Weise verallgemeinert.

Liegt ein algebraischer Zahlkörper k zu Grunde, so gehören zu ihm, falls m den Grad von k bezeichnet, $m-1$ conjugirte Körper $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$. Ist μ eine (nicht selbst quadratische) ganze Zahl in k, so bestimmt $\sqrt{\mu}$ mit den Zahlen von k einen „relativquadratischen" Zahlkörper $K(\sqrt{\mu}) = K$ vom Grade $2m$.

Eines der wesentlichsten Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung ist die Aufstellung eines allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste, welches das gewöhnliche Reciprocitätsgesetz zwischen rationalen Primzahlen nur als vereinzeltes Glied einer Kette merkwürdiger Zahlbeziehungen erscheinen lässt.

Der Beweis dieses allgemeinen Gesetzes lässt sich auf die Kummer'sche Theorie der l^{ten} Potenzreste im Körper der l^{ten} Einheitswurzeln übertragen und ergiebt so einen neuen, wesentlich einfacheren Beweis des Kummer'schen Reciprocitätsgesetzes für l^{te} Potenzreste.

Es mögen einige der grundlegenden Begriffe angeführt werden. Wenn $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal von k ist, und α irgend eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k, dann heisst α in k „quadratischer Rest" nach $\mathfrak{p}$, wenn der Congruenz $\xi^2 \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$ durch eine ganze Zahl ξ in k genügt wird, sonst „quadratischer Nichtrest" nach $\mathfrak{p}$; je nachdem wird dem Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ der Wert ± 1 beigelegt. Sind α, β ganz und prim zu $\mathfrak{p}$, so ist stets $\left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)$.

Jede Zahl A des Körpers $K = K(\sqrt{\mu})$ ist von der Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{\mu}$ (α, β ganze oder gebrochene Zahlen in k); durch die Substitution $S = (\sqrt{\mu} : -\sqrt{\mu})$ geht A über in die in K zu A „relativ conjugirte" Zahl SA. Die Differenz $A - SA$ heisst die „Relativdifferente" von A in K. Der grösste gemeinsame Teiler der Relativdifferenten aller ganzen Zahlen Ω in K ist ein Ideal ϑ, die „Relativdifferente" von K bez. k. Das Product $N(A)$ aus A und SA heisst die „Relativnorm" von A. Ist J ein Ideal in K und wendet man auf alle ganzen Zahlen von J die Substitution S an, so entsteht das zu J „relativ conjugirte" Ideal SJ; das Product $N(J)$ aus J und SJ heisst die Relativnorm von J. Das Quadrat der Relativdifferente von K: $\mathfrak{d} = \vartheta^2$ heisst die „Relativdiscriminante" von K. Ist $S\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{A}$ ein Ideal von K, so wird $\mathfrak{A}$ zu einem „ambigen" Ideal von K; liegt überdies $\mathfrak{A}$ nicht zugleich in K, so wird es zu einem „ambigen Primideal".

Gestützt auf diese Begriffe, ermittelt der Verf. zunächst (§ 4) die Primfactoren von $\mathfrak{d}$; sodann erledigt er (§ 5) die Frage, wie die Primideale von K durch Zerlegung aus den Primidealen von k entstehen.

Nunmehr wird (§ 6) das oben eingeführte Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ erweitert. Ist $\mathfrak{w}$ ein Primideal in k, so wird $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ oder -1 oder $= 0$

gesetzt, je nachdem $\mathfrak{w}$ in K in zwei verschiedene Primideale zerlegbar oder nicht, oder gleich dem Quadrat eines Primideals wird. Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Ideal in k, und ist $\mathfrak{a}$ in Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{w}$ zerlegt, so ist unter $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$, wenn μ eine ganze Zahl in k ist, das Product der Symbole $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right), \left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right), \ldots, \left(\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ zu verstehen.

Weitere wichtige Definitionen werden in § 7 eingeführt. Sind $\mathfrak{w}$ ein Primideal, ν und μ ganze Zahlen in k; ist dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl von K congruent, und existirt auch für jede höhere Potenz $\mathfrak{w}^r$ stets eine ganze Zahl A in K, dass $\nu \equiv N(A)$ mod. $\mathfrak{w}^r$ wird, so heisst ν ein „Normenrest" von K nach $\mathfrak{w}$, sonst „Normennichtrest": je nachdem hat das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ den Wert ± 1.

Es wird (§ 8, 9) das neue Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ näher untersucht zunächst für den Fall, dass $\mathfrak{w} = \mathfrak{p}$ ein (nicht in 2 aufgehendes) Primideal ist. Es ergiebt sich der Fundamentalsatz (§ 10), dass, wenn $\mathfrak{p}$ nicht in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, jede zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl ν Normenrest von K nach $\mathfrak{p}$ ist.

Der Verf. wendet sich (§ 11) zu den Einheiten von k; ist ε eine solche Einheit, so nennt er das System von Einheiten $\varepsilon\xi^2$, wo ξ alle Einheiten von k durchläuft, einen „Einheitenverband" V von k, für $\varepsilon = 1$ den „Hauptverband" 1. Sind V, V' zwei Einheitenverbände, so bilden die Producte der Einheiten von V, V' einen neuen Verband, das „Product" VV' der Verbände V, V'. Liegt ein System von Verbänden (excl. 1) vor, deren keiner durch Multiplication aus den andern erhalten werden kann, so heissen die Verbände „unabhängig".

Sodann werden (§ 12) die Begriffe des Relativconjugirten und Ambigen auf die Idealklassen C in K übertragen. Das System aller Klassen cC, wo C eine bestimmte Klasse ist, c alle Klassen von k durchläuft, heisst ein „Complex" von K, für $C = 1$ der „Hauptcomplex" 1. — Daraufhin ist der Verf. in der Lage (§ 13), zu entscheiden, ob es stets in k Primideale giebt, nach denen irgend welche gegebene Zahlen vorgeschriebene quadratische Charaktere besitzen.

Von da an tritt die Beschränkung ein, dass k nebst allen Conjugirten imaginär, und die Anzahl h der Idealklassen in k ungerade ist.

Es wird (§ 16) die Anzahl aller ambigen Complexe in K bestimmt; es werden in Analogie zu den elementaren Definitionen die Begriffe des Charakterensystems und des Geschlechtes von Idealklassen in K festgelegt. Für die Anzahl der Geschlechter in K ergiebt sich (§ 19) eine obere Grenze. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in k, nach dem jede Einheit in k quadratischer Rest ist, heisst ein „primäres Primideal", andernfalls ein nicht-primäres, (§ 20). Es kommt vor allem darauf an, die Natur der primären Primideale zu ergründen, was besonders durch Weiterbildung Dirichlet'scher Reihenprincipien (§ 22) gelingt. Nunmehr greift die Erweiterung auf „primäre

Ideale“ $\mathfrak{a}$ in k Platz (§ 26f.), in Bezug auf die für jede Einheit ξ in k $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right)$ $= +1$ ausfällt. Damit gelingt es, (§ 29), den bekannten Dirichlet'schen Hauptsatz über die Anzahl der Geschlechter in einem quadratischen Körper auf relativquadratische zu übertragen, und vor allem die in der Einleitung angedeuteten neuen allgemeinen Reciprocitätsgesetze (nebst den Ergänzungssätzen) für quadratische Reste in k aufzustellen und zu beweisen.

Der Ref. glaubt, sich mit dieser — im Hinblick auf die Reichhaltigkeit der fundamentalen Abhandlung — dürftigen Skizze begnügen zu sollen. Vgl. den Bericht des Verf. über algebraische Zahlkörper, Deutsche Math. Ver. **4** (F. d. M. **28**, 157, 1897). My.

D. Hilbert. Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper. Gött. Nachr. 1898, 370-399.

In der grossen Abhandlung über den relativquadratischen Zahlkörper (s. das betreffende vorangehende Referat) hat der Verf. die Theorie der quadratischen Reste innerhalb eines algebraischen Körpers k entwickelt, falls k nebst seinen conjugirten Körpern imaginär ist und eine ungerade Klassenanzahl besitzt. Besonders treten hierbei hervor das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste in k und der Satz, dass in einem relativquadratischen Körper bez. k stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten ist. Die volle Bedeutung dieser Sätze zeigt sich jedoch erst bei der Ausdehnung auf beliebige algebraische Körper k.

Die Beweise der oben genannten Abhandlung haben nur gewisse Abänderungen zu erfahren, wenn man für den Körper k die dort gemachten beschränkenden Ausnahmen beseitigen will. My.

H. Weber. Ueber die Genera in algebraischen Zahlkörpern. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 113-122.

Der Verf. giebt, mit Unterdrückung der Beweise, eine sehr lesenswerte Uebersicht über die algebraischen Untersuchungen, die er in den Bänden **48**, **49**, und **50** der Math. Annalen niedergelegt hat. Der Ref. kann sich hier, um Wiederholungen zu vermeiden, darauf beschränken, auf das betreffende Referat (F. d. M. **28**, 83, 1897) hinzuweisen. My.

L. Stickelberger. Ueber eine neue Eigenschaft der Discriminanten algebraischer Zahlkörper. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 182-193.

Aus Anlass des Beweises eines Satzes von Dedekind (F. d. M. **14**, 59, 1882) über die Primfactoren der Grundzahl D (Discriminante) eines algebraischen Zahlkörpers Ω wird der Verf. zu einer neuen Eigenschaft von D geführt, nämlich zu einem Zusammenhang zwischen ihrem quadratischen Restcharakter in Bezug auf irgend eine ungerade Primzahl p und der Zerlegung von p in Primideale von Ω. Wir müssen uns

begnügen, das Hauptergebnis anzuführen: D ist durch p nicht teilbar, wenn p ein Product von lauter verschiedenen Primidealen in Ω ist; zugleich ist D, wenn p ungerade, quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem die Anzahl der in p aufgehenden Primideale von geradem Grade eine gerade oder ungerade ist, oder je nachdem die Anzahl aller Primfactoren von p dem Grade von Ω congruent ist nach dem Modul 2 oder nicht.

Der Beweis des „Ergänzungssatzes" bezüglich der Primzahl 2 erfordert noch besondere Hülfsmittel. My.

B. Theorie der Formen.

E. de Jonquières. Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes. C. R. **126,** 863-871.

Verf. untersucht nach den Methoden der Disquis. arithmeticae die kleinsten positiven Lösungen für die fünf zu positiven Determinanten D gehörenden Gleichungen $(a+1)x^2-ay^2=1$, $(ma^2+1)x^2-my^2=1$, $(ma^2-1)x^2-my^2=-1$, $(ma^2+4)x^2-my^2=1$, $(ma^2-4)x^2-my^2=1$; in den beiden letzten Gleichungen sollen a und m ungerade Zahlen sein. Da a und m im übrigen beliebige ganze Zahlen sind, so hat man in jedem Falle unendlich viele Gleichungen. Aber es ist bemerkenswert, dass sich die unendlich vielen Gleichungen des einzelnen Systems nach Gauss' Methoden in eins behandeln lassen. So hat z. B. bei der letzten Gleichung die Periode reducirter Formen 16 Glieder, und man findet als die gesuchten Werte x, y die folgenden:

$$x=\tfrac{1}{2}\,[m^2a^4(m^2a^4-7\,ma^2+15)-10\,ma^2+1],$$
$$y=\tfrac{1}{2}\,[m^2a^4(m^2a^5-9\,ma^3+27\,a)-30\,ma^3+9\,a].$$

Fr.

E. de Jonquières. Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques. C. R. **126,** 991-997.

Verf. giebt Erläuterungen zu seinen Untersuchungen über quadratische Formen, über welche im vorangehenden Referate berichtet ist. Er hat sich nicht ganz genau der Gauss'schen Methoden bedient, insofern er bei den Perioden reducirter Formen positiver Determinante (im Gegensatz zu Gauss und im Anschluss an Lagrange) auch Formen mit verschwindenden mittleren Coefficienten (ambige Formen) zulässt. In langer Darlegung wird erörtert, dass die vom Verf. benutzte Methode bei Berechnung der kleinsten Lösung der Pell'schen Gleichung und dergleichen Untersuchungen vorteilhafter sein kann. Fr.

E. de Jonquières. Addition à une précédente communication, concernant la théorie des formes quadratiques. C. R. **126,** 1077-1081.

Erläuterung der Methode, die Perioden reducirter Formen positiver Determinante aufzustellen (vergl. die vorangehenden Referate) am Beispiele der Auflösung der Pell'schen Gleichung $(ma^2+4)x^2-my^2=1$.
Fr.

E. de Jonquières. Formules générales donnant des valeurs de D, pour lesquelles l'équation $t^2-Du^2=-1$ est résoluble en nombres entiers. C. R. **126**, 1837-1843.

Das Problem der Angabe aller Determinanten D, für welche $t^2-Du^2=-1$ in ganzen Zahlen t, u lösbar ist, scheint sehr schwierig zu sein. Verf. giebt einige Determinanten an, für welche Lösungen existiren; erstlich nämlich für $D=4n^2+4n+5$ mit $n=0, 1, 2, \ldots$, sodann für $D=a^2(n^2+1)$, unter a ein beliebiges Glied x_{2k+1} der folgenden recurrirenden Reihe verstanden:

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2n,\quad x_3=2nx_2+x_1=4n^2+1,$$
$$x_4=2nx_3+x_2=8n^3+4n,\quad x_5=2nx_4+x_3,\ \ldots.$$

Fr.

E. de Jonquières. Extension du No. 162 des „Disquisitiones arithmeticae" de Gauss. C. R. **127**, 596-601.

Ist die quadratische Form (A, B, C) positiver Determinante D äquivalent sowohl mit der reducirten Form $f=(a, b, c)$, als mit der zu f „inversen" Form $f'=(-a, b, -c)$, so giebt es eine ganzzahlige Lösung von $t^2-Du^2=-1$. Verf. leitet diese Lösung im Anschluss an No. 162 der Disq. arithm. ab. Fr.

E. de Jonquières. Rapprochements entre les procédés de Lagrange et de Gauss pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. C. R. **127**, 694-700.

Lagrange's Methode der Kettenbruchentwickelung einer reellen quadratischen Irrationalität wird mit der entsprechenden Gauss'schen Reductionstheorie der binären quadratischen Formen positiver Determinanten verglichen. Fr.

M. Lerch. Ueber die Anzahl der Klassen quadratischer Formen negativer Discriminante. Rozpravy **7**, No. 4, 16 S. (Böhmisch.)

Mit Hülfe von elementaren Betrachtungen werden die Summen $\Sigma F(4k)$ und $\Sigma F(4k-1)$, in welchen $F(\Delta)$ die Anzahl der Klassen quadratischer Formen der negativen Discriminante $b^2-4ac=-\Delta$ bezeichnet, auf Summation von gewissen grössten Ganzen zurückgeführt. Aehnliche Resultate hat vor Jahren Hermite aus der Theorie der elliptischen Functionen (J. für Math. **100**) abgeleitet; dieselben beziehen sich auf Formen mit geradem mittleren Coefficienten und sind etwas einfacher als diejenigen des vorliegenden Aufsatzes. Lh.

M. Lerch. Arithmetische Ableitung der zur Klassenanzahlbestimmung dienenden Lejeune-Dirichlet'schen Fundamentalformeln. Rozpravy 7, No. 5, 51 S. (Böhmisch.)

M. Lerch. Ueber einen Zusammenhang des Legendre'schen Zeichens mit den Moebius'schen Zahlen. Rozpravy 7, No. 6, 12 S. (Böhmisch.)

M. Lerch. Ueber die Summe der grössten Ganzen in einer gebrochenen arithmetischen Progression zweiter Ordnung und ihren Zusammenhang mit der Klassenanzahl quadratischer Formen negativer Discriminante. Rozpravy 7, No. 7, 8 S. (Böhmisch.)

Die erste Abhandlung verfolgt bloss didaktische Zwecke, und zwar vor allen Dingen eine möglichst einfache Begründung der klassischen Reihe von Dirichlet $\Sigma\left(\frac{D}{h}\right)h^{-1}$, die zur Klassenanzahlbestimmung dient. Dieselbe wurde nur deswegen gedruckt, um spätere Arbeiten des Verf. verständlich zu machen.

Die zweite Arbeit leistet die Auswertung der unendlichen Reihe

$$\Sigma\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

vermittelst der Klassenanzahl und von grössten Ganzen gewisser Grössen, und zwar für eine beliebige negative Discriminante $-\Delta$. Durch geeignete Verknüpfung der sich hier darbietenden Formeln gelangt man nach einigen Transformationen zu den Beziehungen

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)d_a = -\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\varphi(\Delta),$$

$$\sum_{r=1}^{m-1}\left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r+1}{m^2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon_m,$$

in welchen d_a den grössten gemeinsamen Teiler von $n+a$ und Δ, n eine positive ganze Zahl und $-\Delta$ eine negative Fundamentaldiscriminante bedeutet, und in der zweiten Formel ε_m die bekannten Moebius'schen Zahlen sind, welche in vielen Fragen der analytischen Zahlentheorie auftreten, ferner m eine positive ungerade ganze Zahl ohne quadratische Teiler bedeutet.

Der Inhalt der dritten Abhandlung wird am besten durch die Formel charakterisirt:

$$\sum_{a=1}^{n-1}\left\{\frac{a^2 m}{n} - E\left(\frac{a^2 m}{n}\right)\right\} = \frac{n-q}{2} - \sum_{n:d}\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d),$$

in welcher m, n zwei teilerfremde positive ganze Zahlen sind, die zweite ausserdem ungerade und q^2 ihr grösster Quadratteiler; die Summation auf der rechten Seite bezieht sich auf alle negativen Teiler $-d$ von n, welche die Discriminantenform haben. Lh.

M. Lerch. Résumé de trois notes d'arithmétique. Bull. de l'Ac. d. Sciences de Bohême 1898. 6 S.

Die erste Note giebt einen rein arithmetischen Beweis der Formel:

$$\left(\frac{Q^2}{l}\right)\sum_{(a,b,c)} N(l;a,b,c) = \tau \sum_{\lambda\lambda'=l}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\left(\frac{Q^2}{\lambda'}\right),$$

welche nur eine andere Gestalt einer bekannten Formel Dirichlet's vorstellt. Die Summe linker Hand bezieht sich auf die Klassen primitiver positiver Formen der negativen Determinante $-\Delta = b^2 - 4ac$, und es ist $\Delta = \Delta_0 Q^2$, wo Δ_0 die zugehörige Fundamentaldiscriminante ist. $N(l; a, b, c)$ bedeutet die Anzahl aller Lösungen von $am^2 + bmn + cn^2 = l$ in ganzen Zahlen m, n. Die Summe rechts ist auf die Factorenzerlegungen $l = \lambda\lambda'$ von l zu erstrecken; endlich ist $\tau = 2$ für $\Delta > 4$, während $\tau = 4$ und 6 für $\Delta = 4$, bez. 3 zu nehmen ist. Der Verf. beweist hier die fragliche Formel nicht, sondern berichtet über einige Anwendungen derselben, welche sich auf Gauss'sche Summen, Klassenanzahlen bei positiver Determinante und sogenannte Pell'sche Zahlen beziehen.

Die zweite Note betrifft die sogenannten Möbius'schen Zahlen ε_n, welche die Werte der sonst gewöhnlich durch $\mu(n)$ bezeichneten zahlentheoretischen Function darstellen (vergl. z. B. F. d. M. **28**, 177, 1897). Verf. beweist einen Zusammenhang dieser Zahlen mit dem Legendre'schen Zeichen, wie derselbe gegeben ist durch:

$$\sum_{r=1}^{m-1}\left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r+1}{m^2}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon_m.$$

Die dritte Note handelt von Summen der Gestalt:

$$\sum_{a=1}^{n-1}\left\{\frac{a^2 m}{n} - E\left(\frac{a^2 m}{n}\right)\right\},$$

wo m und n relativ prime ganze Zahlen sind. Es wird ein Zusammenhang zwischen solchen Summen und Klassenanzahlen aufgestellt. (Vergl. das vorangehende Referat.) Fr.

P. W. Preobraschensky. Uebertragung der Theorie der quadratischen Formen auf complexe Veränderliche. X. Vers. Russ. Nat. 331. (Russisch.)

Die vom Verf. 1890 angegebene Methode für die Untersuchung der quadratischen Formen (F. d. M. **22**, 215, 1890) ist auf complexe Veränderliche anwendbar. Der Unterschied zwischen den Formen von positiver und negativer Determinante verschwindet. Im Falle negativer Determinante werden imaginäre Perioden aufgedeckt. Die Pell'sche Gleichung kann durch ein Additionstheorem ersetzt werden. Si.

G. Rados. Zur Theorie der adjungirten quadratischen Formen. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 163-165.

Betrachtet man die Coefficienten c_{ik} einer quadratischen Form $f=\Sigma\Sigma c_{ik}x_ix_k$ als Elemente einer Matrix $c=|c_{ik}|$ und bezeichnet die aus dieser Matrix gebildeten Subdeterminanten m^{ten} Grades mit $c_{ik}^{(m)}$, so wird die neue quadratische Form $f_m=\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta}^{(m)}x_\alpha x_\beta$ die m^{te} adjungirte Form von f genannt. Dann gelten Beziehungen, wie die folgenden: „Ist f_1 eine definite positive Form, so sind auch alle adjungirten Formen positiv; ist hingegen f_1 definit und negativ, so ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, f_m definit und positiv, oder definit und negativ."

Zu dem Behuf wird f_1 mittels reeller orthogonaler Transformation als Quadratsumme dargestellt.

Ferner: „Ist f indefinit, so sind es auch die adjungirten; ist f_1 semidefinit, so sind es auch alle adjungirten."

Man vergl. das Referat in F. d. M. **28**, 112, 1897. My.

A. Hurwitz. Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln. Gött. Nachr. 1898, 309-316.

Besteht zwischen drei quadratischen Formen $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\chi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ von je n Variabeln die Relation $\varphi\cdot\psi=\chi$ identisch, falls die z gewisse bilineare Functionen der x und y sind, so sagt man, die Form χ entstehe durch Composition der Formen φ und ψ. Da man eine quadratische Form vermöge einer linearen Substitution mit complexen Coefficienten auf eine Summe von Quadraten transformiren kann, so kann man bei der Frage nach der Möglichkeit der Composition die Gleichung $\varphi\cdot\psi=\chi$ sogleich durch die folgende ersetzen:

$$(1)\quad (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2.$$

Der Verf. beweist den wichtigen Satz, dass die Möglichkeit der Composition an die Variabelnanzahlen $n=2, 4$ oder 8 geknüpft ist. Es ist hierdurch die Frage, ob die für die eben genannten Anzahlen n bereits bekannten Productformeln (1) auch für $n>8$ verallgemeinert werden können, im verneinenden Sinne beantwortet.

Das Verfahren, vermöge dessen der Verf. das genannte Theorem beweist, erscheint auch an sich sehr bemerkenswert. Es beruht auf einer „Rechnung mit linearen Transformationen", welche wohl zuerst von Cayley angewandt wurde. Die einzelne bilineare Transformation wird durch

$$(2)\qquad z_i=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n\qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

angesetzt, wo die a lineare Functionen der $x_1, \ldots, x_n$ sind. Symbolisch wird die Transformation (2) durch

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}\end{vmatrix}$$

bezeichnet; und es gestattet A die Anordnung nach den x:

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n,$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Transformationen mit constanten Coefficienten sind. Für letztere entspringt aus (1) eine Reihe von Beziehungen, aus denen unter anderem eine Reduction der $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf $(n-1)$ Transformationen $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ folgt: Der Nerv des Beweises ist, dass zwischen den letzteren Transformationen solche Relationen bestehen, dass durch ihre Combination mindestens 2^{n-2} linear-unabhängige Transformationen hergestellt werden können. Da aber die einzelne in Rede stehende Transformation n^2 constante Coefficienten hat, so ist $2^{n-2} \leqq n^2$, woraus $n < 10$ folgt. Fr.

X. Stouff. Sur les lois de réciprocité. Paris: Hermann. 31 S. 8⁰.

Kapitel 3.
Kettenbrüche.

A. Pringsheim. Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Münch. Ber. **28**, 1898, 295-324.

Es handelt sich um Kettenbrüche mit beliebigen reellen oder complexen Gliedern, über deren Convergenz wir bis jetzt noch keine allgemeinen Kriterien besitzen. Verf. bildet die Näherungswerte $A_n:B_n$ zunächst rein formal und stellt einleitungsweise die Bedingungen des eventuellen Vorkommens von sinnlosen Näherungsbrüchen (mit dem Nenner 0) fest. Convergent heisst der Kettenbruch, wenn $\lim_{n=\infty} A_n:B_n$ eine bestimmte Zahl K ist. Nun weiss man aber, dass (im Gegensatz zu den unendlichen Reihen) die Fortlassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern einen convergenten Kettenbruch in einen divergenten verwandeln kann. Unbedingt convergent sollen daher diejenigen Kettenbrüche heissen, bei welchen die Convergenz erhalten bleibt, wo man auch beginne; bedingt convergent ist der Kettenbruch, wenn man durch späteren Anfang mindestens einen divergenten Bruch herstellen kann. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Convergenz besteht darin, dass der Grenzwert K des unendlichen Bruches nicht schon vorher durch einen Näherungswert $A_m:B_m = K$ erreicht wird, d. h. mit andern Worten, ein bedingt convergenter Kettenbruch kann stets durch eine gewisse endliche Länge desselben ersetzt werden, die späteren Glieder verlieren den Charakter analytischer Notwendigkeit und sind in hohem Grade willkürlich.

Der zweite Teil der vorliegenden Abhandlung beschäftigt sich mit der Aufstellung elementarer Convergenz-Kriterien. Man findet zunächst, dass ein von Seidel und Stern in besonderen Fällen erkannter Satz allgemein gilt, dass nämlich der Kettenbruch, dessen Teilbrüche $a_\nu:b_\nu$ aus beliebigen Zahlen gebildet sind, unbedingt convergirt, wenn

$|b_\nu|-|a_\nu| \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. [Die Abhandlung enthält an dieser wichtigen Stelle einen durch mehrere Seiten gehenden Druckfehler.]

Die Anwendung auf die beiden wichtigsten Typen mit den Teilbrüchen $\pm 1:b_\nu$, resp. $a_\nu:1$ liefert vermittelst Transformation in äquivalente Kettenbrüche die Bedingungen:

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1, \text{ resp. } |a_2| < \tfrac{1}{2}, \; |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leqq \tfrac{1}{2},$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

woraus endlich noch wieder für die allgemeine Form $a_\nu:b_\nu$ folgt:

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \; \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

R. M.

R. Hargreaves. On the errors of principal and subsidiary convergents to a continued fraction. Messenger (2) **27**, 152-158.

Die für den Fehler eines Näherungswertes eines Kettenbruches gebräuchlichen Grenzbestimmungen stützen sich nur auf die Kenntnis des nächstfolgenden Teilquotienten, und diese Grenzen sind für die anfänglichen Näherungsbrüche ziemlich weit. Der Verf. giebt eine Methode zur Auffindung des Fehlers eines einzelnen Näherungsbruches, entweder genau, wenn der Kettenbruch endlich ist, oder mit der Genauigkeit eines bestimmten höheren Näherungsbruches, wenn er unendlich ist. Dasselbe Verfahren ist auch anwendbar auf eingeschobene Näherungsbrüche. Ferner wird eine Regel gegeben, nach welcher sich entscheiden lässt, ob ein eingeschobener Näherungsbruch, der einem Hauptnäherungsbruche folgt, ihm an Genauigkeit überlegen ist oder nachsteht.

Glr. (Lp.)

G. Cordone. Sopra un problema fondamentale della teoria delle frazioni continue algebriche generalizzate. Palermo Rend. **12**, 240-257.

Der Verf. knüpft unmittelbar an die F. d. M. **25**, 325 u. 681, 1893/94 besprochenen Arbeiten von Hermite und Padé an, und zwar beschäftigt er sich mit dem von Hermite als sehr schwierig bezeichneten und nur in speciellen Fällen gefundenen Algorithmus für Potenzreihen, die nach negativen Potenzen fortschreiten; er gewinnt eine Uebersicht aller überhaupt möglichen Algorithmen, indem er sie durch das Fortschreiten des Grades der zu bestimmenden Polynome charakterisirt.

R. M.

Fr. Meyer. Ueber kettenbruchähnliche Algorithmen. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 168-181.

Die Abhandlung setzt sich die Vereinfachung und Weiterführung der Jacobi'schen Ausdehnung des euklidischen Teileralgorithmus auf Systeme von mehr als zwei Zahlen (J. für Math. **69**) zum Gegenstande

und sucht dieselbe insbesondere durch Bestimmung des Annäherungsgrades zu ergänzen. Sind $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_d$ $d+1$ positive Zahlen, welche eine abnehmende Reihe bilden, so gelangt man durch Verallgemeinerung des Teileralgorithmus zu einer Reihe weiterer abnehmender Zahlen $r_{d+1}, r_{d+2}, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass zwischen irgend $d+2$ auf einander folgenden Zahlen Gleichungen der Form

$$(1) \qquad r_n + v_{n+1,1}\, r_{n+1} + v_{n+2,2}\, r_{n+2} + \cdots + v_{n+d,d}\, r_{n+d} = r_{n+d+1}$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

stattfinden, worin die v negative ganze Zahlen bedeuten. Sind die Zahlen $r_0, r_1, \ldots, r_d$ ganz, so bricht das Verfahren ab und führt zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers der $(d+1)$ Zahlen und zur vollständigen Auflösung der diophantischen Gleichung

$$r_0\xi_0 + r_1\xi_1 + \cdots + r_d\xi_d = 0.$$

Ist von den Verhältnissen $r_0 : r_1 : \ldots : r_d$ wenigstens eines irrational, so geht der Algorithmus ins Unendliche fort; er heisst alsdann periodisch, sobald für hinreichend grosse n und bestimmtes p die Proportionen:

$$r_n : r_{n+1} : \ldots : r_{n+d} = r_{n+p} : r_{n+p+1} : \ldots : r_{n+p+d}$$

bestehen, und es gilt der Satz: Ist der Algorithmus (1) periodisch, so sind die Zahlenverhältnisse $r_0 : r_1 : \ldots : r_d$ Zahlen eines durch eine Irrationale $(d+1)^{\text{ten}}$ Grades bestimmten Körpers.

Bildet man im Falle des ins Unendliche fortlaufenden Algorithmus die Gleichungen

$$r_n = r_0 P_{0n} + r_1 P_{1n} + \cdots + r_d P_{dn},$$

in welchen die P ganze Zahlen bedeuten, und bezeichnet man in der Determinante

$$|\, P_{iu},\ P_{i,u+1} \ldots P_{i,u+d} \,| \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ d)$$

die Adjuncten von $P_{0u}, \ldots, P_{du}$ mit $\Pi_{0u}, \ldots, \Pi_{du}$, so sind die Verhältnisse $\Pi_{0u} : \Pi_{1u} : \ldots : \Pi_{du}$ Näherungswerte für die Verhältnisse $r_0 : r_1 : \ldots : r_d$, und der Näherungsgrad wird durch den Satz bestimmt: Die Absolutwerte der Π_{iu} sind mit u wachsende Zahlen und ihr Vorzeichen ist $(-1)^{du}$. Deutet man die Verhältnisse $\Pi_{0u} : \Pi_{1u} : \ldots : \Pi_{du}$ als Punkte des d-dimensionalen Raumes, so liegt der $(u+d)^{\text{te}}$ Näherungspunkt im Inneren des von $(d+1)$ voraufgehenden Näherungspunkten gebildeten $(d+1)$-eders. Die Entfernungen auf einander folgender Näherungspunkte lassen sich ebenfalls durch die Π_{iu} bestimmen und in Grenzen einschliessen.

Lsg.

M. R. Candioti. Fracciones continuas. Anales Soc. Cient. Argentina **46,** 149-158.

L. Crelier. Sur la loi de périodicité du développement des racines carrées en fractions continues. Arch. sc. phys. (4) **6,** 366-370.

Vierter Abschnitt.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

E. Netto. Combinatorik. Encykl. d. math. Wiss. 1, 28-46.

In der für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften angenommenen knappen Form, wobei aber ausserordentlich zahlreiche Litteraturnachweise gegeben werden, behandelt der Verf. die Combinatorik in 35 Artikeln. Der Standpunkt des Verfs. ergiebt sich aus folgenden Sätzen: „Die Combinatorik hat sich weder in ihren elementaren noch in ihren höheren analytischen Gebieten so entwickelt, wie dies zu Beginn des Jahrhunderts von den Vertretern der combinatorischen Schule erhofft wurde. — Die Grundzüge der elementaren Teile sind in jedes Lehrbuch übergegangen; die analytischen Anwendungen treten sehr zurück. So stammen die umfassenderen Monographien sämtlich aus früherer Zeit, und tiefer eindringende Abhandlungen sind nur in geringer Zahl vorhanden.“ Von den Anwendungen wird nur die Lehre von den Determinanten behandelt, die weit über die Hälfte der Abhandlung in Anspruch nimmt. Bö.

N. Traverso. Su una formola d'analisi combinatoria. Periodico di Mat. 13, 43-47.

Gegeben sind vier positive ganze Zahlen n, m, h, k ($h \leqq n$, $k \leqq m$) und ein schachbrettartig geteiltes Δ von den Dimensionen n horizontal und m vertical. Einen Ausdruck für die Anzahl der Arten zu finden, nach denen man Gruppen von Feldern in Δ so auswählen kann, dass jede Zeile von Δ aus jeder Gruppe h derselben enthält, jede Colonne k. Gelegentlich ergiebt sich dabei eine merkwürdige Eigenschaft der ganzen positiven Potenzen der Zahlen $\binom{m}{k}$. Lp.

J. W. Butters. Elementary notes. Edinb. M. S. Proc. **16**, 78-81.

S. N. Chokrobarthy. Converse theory of binomial theorem. Edinb. M. S. Proc. **16**, 77.

R. F. Muirhead. Permutations: Alternative proofs of elementary formulas. Edinb. M. S. Proc. **16**, 68, 69.

Die erste Note giebt Beispiele für die Zerlegung einer Function von n Variabeln in Factoren für gewisse Fälle eines Typus, der beim elementaren Unterricht vorkommt. Die zweite handelt von der Wurzelausziehung. Die dritte giebt elementare Beweise für gewisse Permutationszahlen von n Elementen. Gbs. (Lp.)

G. Brunel. Sur les duades formées avec un nombre pair d'éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 32-35.

Aus $2p$ verschiedenen Elementen lassen sich Syntheme von Zweiern bilden, d. h. Zusammenstellungen aller Elemente in Gruppen zu je zweien, wie (ab, cd), (ac, bd), (ad, bc) bei vier Elementen, so dass in jedem Synthem die p vorkommenden Zweier alle $2p$ Elemente enthalten. Die Anzahl dieser Syntheme (Ausdruck von Sylvester in Phil. Mag. **24**, 285-296, 1844) ist $1.\ 3.\ 5 \ldots (2p-1)$. Der Verf. definirt auf eigentümliche Weise die Summe solcher Syntheme und die Potenzen dieser Summen und gelangt dadurch zu einem Mathieu'schen Satze aus der Gruppentheorie. Lp.

G. Brunel. Systèmes de n-ades formées avec n^2 éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 56-60.

Der Verf. zeigt, auf welche Weise man, wenn n eine Primzahl ist, ein System von je n Elementen aus n^2 Elementen bilden kann, in der Gesamtanzahl von $n(n+1)$, und wie sich dieselben in $n+1$ Gruppen so verteilen lassen, dass jede Gruppe genau n von ihnen enthält. Das Beispiel $n=11$ wird vollständig durchgeführt. Lp.

G. Brunel. Remarque sur l'ensemble des duades que l'on peut former avec N éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 6-11.

Den N Elementen, die man durch die Symbole $0, 1, 2, \ldots, N-1$ darstellt, kann man einzeln N Punkte der Ebene oder des Raumes entsprechen lassen. Der Gesamtheit aller Zweier dieser Elemente entspricht dann die Configuration der $\frac{1}{2}N(N-1)$ Verbindungslinien der darstellenden Punkte. Die in der vorliegenden Note behandelte Frage ist die nach der Existenz der Systeme von je ν Elementen, die in ihrer Gesamtheit alle Zweier der N Elemente erschöpfen, oder mit anderen Worten: kann die einfachste regelmässige Figur des Raumes von $N-1$ Dimensionen angesehen werden als entstanden aus der nicht wiederholten

Ueberlagerung der Strecken eines passend gewählten Inbegriffes einfachster regelmässiger Figuren eines Raumes von $N'-1$ Dimensionen?

Lp.

De Lagrandval. Un problème d'arithmétique. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 22-24.

Auf einem Tische liegt eine gewisse Anzahl von Dingen, die folgendermassen unter n Personen zu verteilen sind. Die erste Person teilt die Dinge in n gleiche Teile; es soll ein Ding übrig bleiben, das bei Seite geschoben wird; nun nimmt diese Person ihren n^{ten} Teil und geht. Die zweite Person teilt alle verbleibenden Dinge in n gleiche Teile; es soll ein Ding übrig bleiben, das bei Seite geschoben wird; die zweite Person nimmt den n^{ten} Teil und geht. Dies wiederholt sich bis zur n^{ten} Person. Wie viel Dinge befanden sich auf dem Tische und welches ist der Anteil einer jeden Person? Ist k der Anteil der letzten Person, so ist die Anzahl aller Dinge:

$$\frac{n^n(k+1)}{(n-1)^{n-1}}+n+1,$$

weshalb $k+1$ ein Vielfaches von $(n-1)^{n-1}$ sein muss. Lp.

G. Brunel. Sur les triades formées avec $6n-1$ et $6n-2$ éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 40-43.

Wenn man die höchste Anzahl von Dreiern, die man aus x Elementen so bilden kann, dass keine Wiederholung der Zweier in ihnen stattfindet, mit Q_x bezeichnet, so wird nach Kirkman (Cambr. and Dubl. Math. J. **2**, 191-204, 1847) Q_x durch den Ausdruck gegeben: $3Q_x=\frac{1}{2}x(x-1)-V_x$, wo $V_x=6k+4$ für $x=6n-1$, $V_x=\frac{1}{2}x+3k+1$ für $x=6n-2$, $V_x=0$ für $x=6n+1$ und $6n+3$, $V_x=\frac{1}{2}x$ für $x=6n$ und $6n+2$, falls man $n=2^m(2k+1)$ setzt. Wie der Verf. nachweist, sind die beiden ersten Angaben nicht richtig. Es muss vielmehr heissen $V_x=4$ für $x=6n-1$ und $V_x=\frac{1}{2}x+1$ für $x=6n-2$. Der ausführliche Beweis soll anderswo erscheinen.

Lp.

G. Brunel. Sur la construction des systèmes de quadricycles de $8n+1$ éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 58-62.

Als verallgemeinertes System der Tripelsysteme wird zunächst dasjenige bezeichnet, für passend gewählte Werte von N Systeme von Vierern, Fünfern, Sechsern, ... zu bestimmen, die alle Zweier von N Elementen enthalten und jeden nur einmal. Quadricykel wird in der Figur, welche aus den die N Elemente darstellenden Punkten und ihren Verbindungslinien gebildet ist, bei vier Punkten a, b, c, d das Viereck der vier Zweier ab, bc, cd, da genannt. Der Verf. beweist die Existenz der Systeme von Quadricykeln, die alle Zweier aus N Elementen ent-

halten, und jeden Zweier ein einziges Mal, für passend gewählte einfache Werte der Zahl N. Lp.

G. Brunel. Sur un problème combinatoire de Steiner. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 37-41.

Die von Steiner im Journ. für Math. **45**, 181, 1852 (Werke **2**, 37: „Combinatorische Aufgabe") verlangte Bildung der Systeme von Dreiern, Vierern, Fünfern, ..., welche beziehungsweise alle Zweier, Dreier, Vierer, ... derselben N Elemente nur je einmal enthalten, wird an einzelnen Zahlenwerten von N wirklich durchgeführt; hierdurch ist die Existenz solcher Systeme bewiesen. Lp.

G. Brunel. Construction d'un réseau donné à l'aide d'un nombre déterminé de traits. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 62-65.

Es sei ein Netz gegeben, gebildet aus einer Anzahl Ecken E und aus Kanten, die diese Ecken verbinden, in der Anzahl K. Wenn die von einer Ecke ausgehenden Kanten in gerader Anzahl vorhanden sind, so wird die Ecke eine paare Ecke genannt; im anderen Falle eine unpaare. Es sollen alle möglichen continuirlichen Umläufe construirt werden, die aus einer beliebigen Anzahl in sich zurücklaufender Züge gebildet werden und alle Kanten des Netzes enthalten. Wenn das Netz s_2 paare Ecken besitzt, von denen 2 Kanten ausgehen, ..., s_{2p} Ecken, von denen $2p$ Kanten ausgehen, so ist die Anzahl der verschiedenen Arten, das Netz zu beschreiben:

$$\Pi_k \left[\frac{(2k)!}{2^k \,.\, k!}\right]^{s_{2k}}.$$

Verschiedene Bemerkungen über besondere Fälle. Lp.

G. Brunel. Sur les duades formées avec $2p$ éléments. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 104-105.

Geometrische Veranschaulichung des schon von Kirkman gegebenen Resultates. Lp.

A. F. H. Mertelsmann. Das Problem der 15 Pensionatsdamen. Schlömilch Z. **43**, 329-343.

Obwohl die 15 Schulmädchen des bekannten Problems bei dem Verf. bereits zu Pensionatsdamen herangewachsen sind, hat er doch nichts Wesentliches zur Lösung der Aufgabe beigetragen. Er bildet zunächst ein Tripelsystem von 15 Elementen und verteilt dann die 35 Tripel des Systems zu je fünf auf die sieben Wochentage und zwar auf 12 verschiedene Arten. Die Zahl 12 multiplicirt er dann mit 15!, der Anzahl der Permutationen für 15 Elemente, und glaubt nun mehr als 15 Billionen verschiedene Lösungen gefunden zu haben. Natürlich wird niemand, der mit den Elementen der Substitutionentheorie vertraut

ist, zwei Lösungen, die durch eine Permutation der Elemente aus einander hervorgehen, als verschieden ansehen. Aber selbst wenn man dies thut, so ist damit durchaus noch nicht die vom Verf. gegebene Zahl 12.15! gerechtfertigt. Dazu hätte er erst nachweisen müssen, dass seine Anordnungen bei Anwendung der Permutationen weder in sich noch in einander übergehen. Dies ist aber keineswegs der Fall; denn die Anordnung A_1 geht z. B., wenn man die vier fehlerhaften Tripel corrigirt hat, durch die Permutation $\begin{pmatrix} abcde \\ adebc \end{pmatrix}$ bei unveränderten Indices in sich über. Die angegebene Anzahl ist also zu gross, und zwar sicher um die Hälfte. Bö.

H. Delannoy. Sur la probabilité des événements composés. S. M. F. Bull. **26,** 64-70.

In Assoc. Franç. Tunis **25,** 1-6 (F. d. M. **28,** 198, 1897) hatte T. C. Simmons die Moivre'sche Definition für unabhängige Ereignisse und das Laplace'sche Princip, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens unabhängiger Ereignisse gleich dem Product ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist, einer Kritik unterworfen. Er versuchte an drei Beispielen, von denen das erste, im Grunde genommen, mit dem bekannten Bertrand'schen Beispiele der drei Kasten übereinstimmt, zu zeigen, dass unter Annahme der Moivre'schen Definition das Laplace'sche Princip zu schweren Fehlern führen könne. Der Verf. weist diesen Vorwurf für die drei Beispiele zurück, da, genau betrachtet, die als unabhängig angenommenen Ereignisse es in Wirklichkeit nicht seien. Jedoch könne man mit Simmons die Moivre'sche Definition besser in folgender Form fassen:

„Zwei Ereignisse sind unabhängig, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des anderen weder vermehrt noch vermindert." Bö.

Barozzini. Risoluzione e generalizzazione delle questioni 393, 394 del sig. Eugenio Strocchi. Periodico di Mat. **13,** 77-79.

Behandlung der oft gestellten und gelösten Rencontre-Aufgabe: Aus einer Urne mit n Kugeln, die mit den Ziffern 1, 2, 3, ..., n bezeichnet sind, werden die Kugeln einzeln nach einander genommen. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass mindestens eine Kugel bei dem ihrer Nummer entsprechenden Zuge herauskommt. Die Verallgemeinerung betrifft einige bezügliche Formeln der Combinatorik. (Vergl. Czuber, „Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie" in Deutsche Math.-Ver. **7,** 44 ff.) Lp.

W. A. Whitworth. Questions 13571, 13763, 13719. Ed. Times **68,** 99-100; **69,** 105-106; 109-111.

13571. Ein achtzehn Zoll langer Stock wird nach Willkür in drei Stücke zerbrochen. A erhält das längste Stück, B das mittlere,

C das kleinste. Ihre Erwartungen zu bestimmen. (Lösungen von T. Roach, T. C. Simmons). — 13763. Es werden n gleiche Stücke Zucker gegeben. Jedes Stück wird in zwei zerbrochen, wobei alle Lagen der Bruchstelle gleich wahrscheinlich sind. Von den $2n$ so gebildeten Stücken soll ein Kind das grösste wählen. Zu zeigen, dass die Erwartung $(2n+1)/2(n+1)$ eines der gegebenen Stücke beträgt. — 13719. Eine neun Fuss lange Stange wird in drei Teile zerbrochen, von denen A den grössten, B den mittleren, C den kleinsten haben soll. Wenn die beiden Bruchstellen willkürlich sind, so betragen die Erwartungen von A, B, C bezw. 66, 30, 12 Zoll. Wird aber der erste Bruch willkürlich gemacht und dann das grössere Bruchstück willkürlich zerlegt, so sind die Erwartungen 64, 31, 13 Zoll. Die von Crofton hierfür gegebene Lösung verweist wegen des ersten Teiles der Aufgabe auf Williamson, Int. Calc. 351 und auf Encycl. Brit., Artikel Probability; der zweite Teil wird ausführlich behandelt. Lp.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte von W. S. B. Woolhouse (4757), C. B. S. Cavallin (4884), W. A. Whitworth (13536), W. J. C. Miller (13582), R. Chartres (13623) befinden sich in Ed. Times **68**, 117, 116, 47, 80, 92; ferner von Wolstenholme (2044), A. Martin (3798), W. A. Whitworth (13732) in Ed. Times **69**, 39, 36, 80. Lp.

P. Leikfeld. Mathematische Formel für die Wahrscheinlichkeit der Hypothesen in ihrer Anwendung auf die wissenschaftlichen Constructionen. Charkow Univ. No. 4, 65-72. (Russisch.)

Einige Betrachtungen über die bekannte Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Si.

Sidonio B. C. da Silva Paes. Introducção á theoria dos errors das observações. Coimbra.

Ein didaktisches Werk, in welchem der Verf. das Wesentlichste aus der Theorie der Beobachtungsfehler behandelt. Von den vier Kapiteln des Buches behandelt das erste die Vorbegriffe zur Theorie der Beobachtungsfehler. Im zweiten wird das Gauss'sche Postulat betrachtet, sowie die Beweise, welche Encke, Schiaparelli, Stone, Ferrero, u. s. w. dafür gegeben haben. Im dritten Kapitel wird die Formel für den gesamten Fehler gegeben, wenn man das Gesetz der elementaren Fehler als bekannt annimmt. Das letzte Kapitel endlich ist der Methode der kleinsten Quadrate gewidmet. Tx. (Lp.)

W. Gosiewski. Ueber das Fehlergesetz. Prace mat.-fiz. **9**, 117-130 (Polnisch).

Der Verf. unterzieht das schon mehrmals von ihm behandelte Thema

(vgl. F. d. M. **20**, 227, 1888; **22**, 235, 1890; **24**, 206, 1892) einer neuen Untersuchung und zwar auf Grund der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\varDelta x_i = x - x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ bei den Beobachtungen der Grösse x eine im allgemeinen discontinuirliche Function $\varphi(x, \varDelta x_i)$ der zwei Grössen x und $\varDelta x_i$ sei. Es handelt sich hier also um die zweckmässige Wahl einer continuirlichen Function derselben Grössen, welche sich der oben genannten discontinuirlichen Function in entsprechenden Punkten am innigsten anschmiegt. Die Lösung dieser Aufgabe wird durch die Ermittelung der Bedingungen für das Maximum des Productes $\Pi_1^n \varphi(x, \varDelta x_i)$ erledigt, welches die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der n Fehler $x - x_i$ ausdrückt. Dn.

P. A. Nekrassow. Allgemeine Eigenschaften der unabhängigen Massenerscheinungen im Zusammenhange mit angenäherter Berechnung der Functionen von sehr grossen Zahlen. Mosk. Math. Samml. **20**, 431-442 (Russisch).

Vorläufiger Bericht [vorgetragen auf der X. Versammlung russischer Naturforscher in Kiew] über die Untersuchungen des Verf., die Gesetze der Massenerscheinungen betreffend.

Ohne Beweis werden sieben Sätze gegeben, deren erster und vierter hier als die wichtigsten angeführt werden mögen.

1. Es sei m eine grosse Zahl und v eine willkürliche Grösse, welche die Ungleichungen $\frac{1}{3} < v < \frac{1}{2}$ befriedigt. Ist n irgend ein Wert der Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ von m unabhängigen Grössen, welcher die Ungleichungen befriedigt:

$$-\frac{1}{m^v}\sqrt{\frac{\Sigma(b-a^2)}{m}} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} - \frac{\Sigma a}{m} \leqq + \frac{1}{m^v}\sqrt{\frac{\Sigma(b-a^2)}{m}}$$

(b_k = math. Hoffnung von x_k^2, a_k = math. Hoffnung von x_k, Summenzeichen auf sämtliche m Grössen x_k ausgedehnt), so wird die Wahrscheinlichkeit P_n, dass $x_1 + \dots + x_m$ diesen Wert n annimmt, gleich

$$(1) \qquad P_n = \frac{he^\delta}{\sqrt{2\pi\Sigma(b-a^2)}} e^{-\frac{(n-\Sigma a)}{2\Sigma(b-a^2)}},$$

wo δ eine kleine Grösse bedeutet, welche für unendlich wachsendes m sich der Grenze 0 nähert, und h die Differenz zwischen n und dem n zunächst liegenden Werte der Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_m$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit P_n wird noch in der Weise ausgedrückt:

$$(2) \qquad P_n = \frac{h[\psi(r)]^{m+\frac{1}{2}}}{r\sqrt{2m\pi\psi''(r)}}(1+\delta),$$

wo δ eine kleine Grösse von einer nicht kleineren Ordnung als der ersten in Bezug auf $\frac{1}{m}$ ist, h dieselbe Zahl wie in (1),

$$\psi(r) = [\varphi_1(r)\varphi_2(r) \dots \varphi_m(r) \,.\, r^{-n}]^{\frac{1}{m}}$$

und $\varphi_k(r) = \Sigma p_k r^{x_k}$ (die Summe ist auf alle möglichen Werte von x auszudehnen); p_k ist die betreffende Wahrscheinlichkeit; r in (2) ist Wurzel der Gleichung $\psi'(r) = 0$. Si.

A. A. Markow. Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$. Petersb. Bull. (5) **9**, 435-446.

A. A. Markow. Gesetz der grossen Zahlen und die Methode der kleinsten Quadrate. Auszug aus einem Briefwechsel mit Prof. A. Wassilief. Kasan Ges. (2) **8**, 110-128. (Russisch.)

Kritik des Beweises des Satzes von Tschebyscheff aus: Ueber zwei Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Petersb. Abh. **55** (russisch, cfr. F. d. M. **19**, 208, 1887) und in Acta Math. **14** (französisch, cfr. F. d. M. **23**, 232, 1891). Ein neuer Beweis dieses Satzes wird in der ersten Abhandlung gegeben, gestützt auf die Untersuchung der Wurzeln der Gleichung $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$. Eine Bedingung ist ausdrücklich hinzugefügt: dass die mathematische Hoffnung der Quadrate nicht unendlich klein wird, wenn der Index der betreffenden Grösse unendlich wird. Diese Bedingung ist, wie in der zweiten Abhandlung an Beispielen gezeigt wird, durchaus notwendig zur Begründung des Satzes von Tschebyscheff (man kann wohl sagen, dass der Ausdruck von Tschebyscheff: „die mathematischen Hoffnungen der Potenzen der Grössen $u_1, \ldots, u_k$ müssen in gewissen endlichen Grenzen enthalten sein", schon die Forderung des „Nicht-unendlich-klein-seins" in sich begreift, da die mathematischen Hoffnungen der Grössen u_i selbst gleich Null sind, was besonders ausgesagt wird). Den Schluss der zweiten Abhandlung bilden kritische Bemerkungen über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. Die einzig richtige sei die zweite Methode von Gauss (Theoria combinationis), bei welcher die Willkürlichkeit der Hauptannahme klar hervortritt. Wenn diese Auffassung den wahrscheinlichen Fehler nicht angiebt, so ist diese zweifelhafte Grösse durchaus nicht nötig. Si.

L. von Bortkewitsch. Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig: B. G. Teubner. VII + 52 S. 8°.

Diese Abhandlung stellt den ersten Versuch dar, statistischen Reihen, welche aus kleinen absoluten Zahlen bestehen (wie z. B. die Zahlen der Selbstmord- und Unfallstatistik), vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher zu treten. Solche Reihen sind aber von der wissenschaftlichen Statistik bisher nicht behandelt worden, weil bei so kleinen Zahlen die Wirkung der zufälligen Ursachen zu sehr hervortrete, so dass sie an sich wertlos seien. Dies ist richtig, soweit es sich um die Ergründung desjenigen Teils der Erscheinungen handelt, welcher von den Wirkungen der zufälligen Ursachen gewissermassen als unabhängig gedacht ist, nicht aber, wenn es darum zu thun ist, gerade die Gesetze

des Zufalls an den statistischen Daten zu untersuchen. Auf Grund dieses Gedankens hat der Verf. im ersten Kapitel einige Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet unter der Voraussetzung einer unendlich-grossen Zahl von Versuchen und einer unendlich-kleinen Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses. Zur Darstellung der Fehlerverteilung wird hierbei aber nicht das Gauss'sche Fehlergesetz, sondern die von Poisson angegebene Exponentialformel

$$w_x = \frac{m^x e^{-m}}{1.2 \ldots x}$$

benutzt, wofür am Schluss auch ein Täfelchen gegeben ist.

Im zweiten Kapitel werden die entwickelten Formeln auf einige Daten der Selbstmord- und Unfallstatistik, die sich als Reihen kleiner Zahlen darstellen, angewandt. Es ergab sich, dass die bei den untersuchten Reihen gefundenen Schwankungen den Voraussagungen der Theorie fast vollständig entsprechen. Dieses Verhalten nennt nun eben der Verf., indem er wohl einen viel zu weit gehenden Ausdruck gebraucht, das Gesetz der kleinen Zahlen. Es galt nun, dieses günstige Resultat mit dem anderen, scheinbar ungünstigen in Einklang zu bringen, dass die aus grossen Ereigniszahlen abgeleiteten Verhältniszahlen der Statistik, seltenere Fälle ausgenommen, der Unterwerfung unter die Formeln des Poisson'schen Gesetzes der grossen Zahlen notorisch Trotz bieten. Hierzu dient dem Verf. die von Lexis begründete Theorie des Fehlerexcedenten, der das dritte Kapitel gewidmet ist. Bö.

H. Bruns. Zur Collectiv-Masslehre. Wundt Philos. Studien **14**, 339-375.

„Fechner hat in seinem nachgelassenen Werke „Collectiv-Masslehre“ (F. d. M. **28**, 208, 1897) ein Verfahren zur Untersuchung der von ihm als „Collectiv-Gegenstände“ bezeichneten Vielheiten entwickelt, das nach der rechnerischen Seite hin der Verbesserung fähig ist, sobald man über gewisse dabei nötige Hülfstafeln verfügt. Diese Tafeln, die ich schon vor etwa Jahresfrist habe berechnen lassen, sollen am Schlusse des vorliegenden Aufsatzes mitgeteilt werden; Zweck der nachstehenden Zeilen ist, ihre Einrichtung und ihren Gebrauch auseinander zu setzen.“

Das Wesentliche des mathematischen Inhaltes ist in der Arbeit des Verf. „Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen“ enthalten (F. d. M. **28**, 836, 1897). Es handelt sich nämlich hauptsächlich auch in der vorliegenden Abhandlung um eine schärfere Darstellung der Gesetze bei den asymmetrischen Häufigkeitscurven. Lp.

Ad. Blümcke. Zur Jordan'schen Theorie des Maximalfehlers. Jordan Z. f. V. **27**, 313-321.

Schon im Jahrgang **26** (1897) der Zeitschrift für Vermessungswesen hatte es der Verf. in mehreren Abhandlungen versucht, den Ausdruck für die Fehlerfunction, den Jordan unter gewissen Ein-

schränkungen und Voraussetzungen, insbesondere unter der Annahme eines Maximalfehlers M, abgeleitet hatte, auch noch auf anderen Wegen als Jordan zu begründen (vergl. F. d. M. **28**, 205-206, 1897). Er erhielt zwar, auch wieder unter mannigfachen Voraussetzungen, eine formale Uebereinstimmung; jedoch bedeutete bei ihm eine Zahl n etwas anderes als bei Jordan, wobei er noch unbegründeter Weise annehmen musste, dass sein n eine ganze positive Zahl sei. In der vorliegenden Abhandlung macht sich der Verf. von der letzten Annahme frei. Während der Jordan'sche Ausdruck für die Fehlerfunction lautet:

$$(1)\qquad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3.\,5\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.\,4\ldots 2n(2n+2)}\cdot\frac{1}{M}\left(1-\frac{x^2}{M^2}\right)^{n+1},$$

findet der Verf. nunmehr, bei beliebigem n:

$$(2)\qquad \varphi(x) = \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{M\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+2)}\left(1-\frac{x^2}{M^2}\right)^{n+1},$$

was, wenn n eine ganze positive Zahl ist, mit (1) übereinstimmt.

Diese Function stellt ein System stetig auf einander folgender Curven dar, von denen nach des Verf's. Ansicht alle, die den Werten von n zwischen -1 und $+\infty$ entsprechen, brauchbare Fehlerfunctionen liefern; für $n=\infty$ ergiebt sich hierbei das Gauss'sche Fehlergesetz. Das Verhältnis des mittleren Wertes $\nu^{2\lambda}$ der $(2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen aller x zu $M^{2\lambda}$ nimmt dann für (1) und (2) die Form

$$\frac{\nu^{2\lambda}}{M^{2\lambda}} = \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots 5.\,3.\,1}{(2n+2\lambda+3)(2n+2\lambda+1)\ldots(2n+7)(2n+5)}$$

an, wo also (für $\lambda=1$) ν^2 das mittlere Fehlerquadrat bedeutet und

$$\frac{\nu^2}{M^2} = \frac{1}{2n+5}\ \text{wird.}$$

Für die Werte: $n=-1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1, +2$ werden die Fehlercurven noch besonders untersucht und dargestellt. Bö.

F. Ludwig. Die Variabilität der Lebewesen und das Gauss'sche Fehlergesetz. Schlömilch Z. **43**, 230-242.

Der Botaniker kann heutzutage der Variationsstatistik und der Variationscurven ebenso wenig entraten, wie der Anthropologe und Zoologe. Der Verf. berichtet über dieses Grenzgebiet zwischen Mathematik und den biologischen Naturwissenschaften, in erster Linie der Botanik, indem er die Reihenfolge, in welcher er selbst mit den einzelnen Abschnitten dieses Wissensgebietes bekannt wurde, innehält. Nach schon ziemlich weit ausgedehnten, rein empirischen variationsstatistischen Studien wurde er durch die Arbeiten von H. de Vries und Verschaffelt auf einfache Variationscurven (ohne secundäre Gipfel) und auf die Arbeiten von Quetelet und Galton u. s. w. aufmerksam und hiernach auch auf die Erfolge, die die Anwendung des Gauss'schen Fehlergesetzes und seiner Consequenzen zur Ermittelung

der Variationsverhältnisse gestatten. Nach dieser Richtung besonders hat dann der Verf. auch selbständig weitergearbeitet. Zum Schluss giebt er ein Litteraturverzeichnis, das in 71 Nummern die wichtigsten bisherigen Abhandlungen über Variationsstatistik aufführt. Bö.

W. F. Sheppard. On the calculation of the most probable values of frequency-constants for data arranged according to equidistant divisions of a scale. Lond. M. S. Proc. **29,** 353-380.

Für die mathematische Behandlung statistischer Probleme wird eine zur Rechnung geeignete Formel gesucht, um das Integral $\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ näherungsweise zu bestimmen, wenn $\varphi(x)$ eine bekannte, eindeutige, endliche und stetige Function ist, $f(x)$ der Form nach unbekannt, jedoch ebenfalls eindeutig, endlich und stetig, ferner von $x = x_0$ bis $x = x_p$ positiv ist; ausserdem sollen entweder die einzelnen Werte von $f(x)$ für die äquidistanten Argumente $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p$ oder die Werte $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ldots, \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)\,dx$ bekannt sein. Beide Probleme werden auf dieselbe Form gebracht. Sodann wird dafür eine Reihenentwickelung gegeben. Eingehender ist der Fall behandelt, wo $f(x)$ für $x = x_0$ und $x = x_p$ eine Berührung höherer Ordnung mit der x-Axe hat; es verschwindet alsdann eine Reihe von Differentialquotienten, wodurch eine wesentliche Vereinfachung eintritt. Die Reihe wird dann noch in der Art umgeformt, dass nach $\xi_r = \frac{1}{2}(x_{r-1}+x_r)$ entwickelt wird. Zum Schlusse sind einige Beispiele gegeben.

Bö.

W. F. Sheppard. On the geometrical treatment of the „normal curve“ of statistics, with especial reference to correlation and to the theory of error. Abstract. Lond. R. S. Proc. **62,** 170-173.

Der Zweck dieser Notiz besteht in erster Stelle darin, die Behandlung der normalen Correlation, wie dieselbe von F. Galton und K. Pearson auseinandergesetzt ist, zu vereinfachen und auszudehnen; in zweiter darin, allgemeine Formeln in der Fehlertheorie zu erhalten und sie auf Fragen anzuwenden, die betreffs normaler Verteilungen und normaler Correlation entstehen. Die Methode ist durchweg elementar, indem der Gebrauch der Differential- und Integral-Rechnung vermieden ist, obgleich unendlich kleine geometrische Grössen bis zu einem gewissen Grade angewandt werden. Lp.

K. Pearson. Cloudiness. Note on a novel case of frequency. Lond. R. S. Proc. **62,** 287-290.

Als ein lange gesuchtes Beispiel U-förmiger Verteilungen der Häufigkeit bezeichnet der Verf. die Bewölkung in Breslau für 1876/85 nach Hugo Meyer's Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen für die Klimatologie (Berlin, 1891). Nach der Theorie des Verf. berechnet, ergiebt dieses Beispiel Zahlen, die unter Berücksichtigung des subjectiven Charakters der Beurteilung der Bewölkung eine befriedigende Uebereinstimmung mit der Beobachtung erkennen lassen. Lp.

K. Pearson and L. N. G. Filon. Mathematical contributions to the theory of evolution. IV. On the probable errors of frequency constants and on the influence of random selection on variation and correlation. Lond. Phil. Trans. A **191**, 229-311; Abstract: Lond. R. S. Proc. **62**, 173-176.

Die Abhandlung geht von einem allgemeinen Theorem aus, durch welches die bei der Berechnung der Constanten irgend einer Frequenz-Verteilung gemachten wahrscheinlichen Fehler bestimmt werden können. Diese wahrscheinlichen Fehler bilden nämlich ein correlates System, das annähernd dem normalen Frequenzgesetz folgt, welches auch die Natur der ursprünglichen Frequenzverteilung sein mag, d. h. mag es schief (skew) oder normal sein. Auf die Wichtigkeit dieses Ergebnisses für die Theorie der Evolution wird dann die Aufmerksamkeit gelenkt. Jede Auswahl nach Grösse, Variation oder Correlation wird hiernach eine Modification nicht nur der Grösse, sondern der Variation und Correlation des ganzen Inbegriffs correlater Organe nach sich ziehen. Das Thema einer bewussten Auswahl, von welchem diese willkürliche Auswahl nur ein besonderer Fall ist, wird für eine andere nahezu vollendete Abhandlung vorbehalten.

Die normale Correlation wird zuerst abgehandelt. Es wird gezeigt, dass, wenn $\lambda = 0{,}67449$ und n die Anzahl der Beobachtungen ist, der wahrscheinliche Fehler eines Coefficienten r_{12} der Correlation den Wert $\lambda(1-r_{12}^2)/\sqrt{n}$ hat; der wahrscheinliche Fehler von r_{12} für Variationen mit bestimmten Werten: $\lambda(1-r_{12}^2)/\sqrt{n(1+r_{12}^2)}$; die Correlation von Fehlern in einer gesetzmässigen (standard) Abweichung und einem Correlationscoefficienten: $r_{12}/\sqrt{2}$. Wahrscheinlicher Fehler eines Regressionscoefficienten für zwei Organe: $\lambda\sigma_1\sqrt{1-r_{12}^2}/\sigma_2\sqrt{n}$, wo σ_1 und σ_2 die beiden gesetzmässigen Abweichungen sind. Wahrscheinlicher Fehler eines Regressionscoefficienten für drei Organe:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\sqrt{1-r_{23}^2-r_{13}^2-r_{12}^2+2r_{12}r_{23}r_{13}}}{1-r_{23}^2}.$$

Correlation zwischen den Fehlern in zwei Correlations-Coefficienten wie r_{12} und r_{13}:

$$r_{23} - \frac{r_{12}r_{13}(1-r_{23}^2-r_{13}^2-r_{12}^2+2r_{12}r_{13}r_{23})}{2(1-r_{13}^2)(1-r_{12}^2)}.$$

Correlation zwischen den Fehlern in zwei Correlations-Coefficienten wie r_{12} und r_{34}: $S/2(1-r_{12}^2)(1-r_{34}^2)$, wo

$$S = (r_{13}-r_{12}r_{23})(r_{24}-r_{23}r_{34})+(r_{14}-r_{34}r_{13})(r_{23}-r_{12}r_{13}) \\ +(r_{13}-r_{14}r_{34})(r_{24}-r_{12}r_{14})+(r_{14}-r_{12}r_{24})(r_{23}-r_{24}r_{34}).$$

Hierauf wird die schiefe Variation behandelt. Zuerst werden die wahrscheinlichen Fehler und Correlationen der Fehler bei den Constanten der Curve $y = y_1\,\{1+\gamma x/(p+1)\}^p e^{-\gamma x}$ berechnet. Die erhaltenen Formeln sind citirt und benutzt von K. Pearson und A. Lee in der Abhandlung „On the distribution of frequency (variation and correlation) of the barometric height at divers stations (F. d. M. **28**, 840, 1897). Wir unterlassen hier ihre Wiedergabe.

Analoge Ergebnisse werden dann erhalten für die Curven schiefer Frequenz:

$$y = y_1\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{m_2},\quad y = y_1\,\frac{e^{-\nu\,\mathrm{arctg}\,(x/a)}}{\{1+(x/a)^2\}^m}.$$

In diesen Fällen sind die durchschnittliche Grösse, Variation, modale Frequenz und Schiefe im allgemeinen derartig, dass ihre Fehler correlat sind. Daher modificirt jede Auswahl der Grösse sowohl die Variation als auch die Schiefe der Verteilung. Dies ist von beträchtlicher Bedeutung für die Theorie der Evolution, da in den meisten Fällen zoologischer Frequenz die Verteilung vom Typus der zweiten oder Tangenten-Curve ist. Daher führt die willkürliche Auswahl der Grösse zur Modification nicht nur der Variation, sondern auch der Schiefe der Verteilung. Die Resultate sind zu lang, um hier angeführt zu werden.

Schluss. „Diese Studie über die wahrscheinlichen Fehler und Fehler-Correlationen zeigt uns, dass diese Grössen für das verwickelte System von Organen in dem Falle normaler Correlation bestimmt werden können, und zwar mit ziemlicher Leichtigkeit in dem Falle sowohl normaler als auch schiefer Variation. Nur in dem Falle schiefer Variation wird die Rechenarbeit etwas mühsam. Aber Zahlenbeispiele genügen zum Nachweise, dass die hier gemachten Fehler von derselben Ordnung sind wie in dem Falle normaler Variation, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf die charakteristischen Merkmale der Frequenz beschränken, z. B. die mittlere oder modale Frequenz, die gesetzmässige Abweichung, die Schiefe u. s. w. Gewisse Constanten der algebraischen Form der Frequenzcurven haben grosse wahrscheinliche Fehler; aber diese Fehler sind in so hohem Masse correlat, dass ihr Bestehen nicht genügt, sei es die Gestalt der Curven wesentlich abzuwandeln, oder die „physischen“ Charakteristiken der aus solchen Werten berechneten Verteilung. — Für die Theorie der Evolution ergeben sich manche sehr wichtige Principien neben dem blossen Vorzuge der Kenntnis der bei der Messung von Rassen- (racial) oder Organ- (organic) Charakteren gemachten Fehler. Vor allem merken wir die Wichtigkeit einer willkürlichen Auswahl bei der systematischen Aenderung aller Rassen-Constanten an.

In den meisten Fällen kann selbst die Grösse nicht geändert werden ohne Aenderung der Grösse, der Variation und Correlation aller correlaten Organe. Dieses Princip wird in grösserer Länge in einer nahezu vollendeten Abhandlung über den Einfluss der geleiteten Auswahl entwickelt werden". Lp.

K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. V. On the reconstruction of the stature of prehistoric races. Abstract: Lond. R. S. **63**, 417-420.

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist der, die allgemeine Theorie zu beleuchten, nach welcher wir aus der Kenntnis eines Organs bei einer fossilen oder prähistorischen Rasse die Dimensionen anderer Organe reconstruiren können, wenn die Correlation zwischen Organen bei vorhandenen Rassen derselben Gattung sichergestellt ist. Die besondere hierzu gewählte Erläuterung betrifft die Reconstruction der wahrscheinlichen Statur aus den Abmessungen der langen Knochen. „Die modernen Bevölkerungen, welche dieselben Districte Europas bewohnen wie der paläolithische und neolithische Mensch, scheinen grösser zu sein; doch hat dem Anscheine nach sowohl in dem Falle Süddeutschlands als auch Frankreichs eine geringe, aber doch merkbare Abnahme der Statur seit den prähistorischen Zeiten stattgefunden. Die modernen Engländer scheinen seit den alten Angelsachsen in der Statur nicht zurückgegangen zu sein." Lp.

Miss C. D. Fawcett and K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. On the inheritance of the cephalic index. Lond. R. S. Proc. **62**, 413-417.

Eine Untersuchung, welche zur Rechtfertigung der Ansicht unternommen ist, dass die Vererbung der Verhältnisse der Abmessungen am Kopfe eine sehr befriedigende Methode zur Bestätigung der Vererbung bietet. Insbesondere werden aus dem bearbeiteten Material mehrere allgemeine Sätze abgezogen. Lp.

K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. On the law of ancestral heredity. Lond. R. S. Proc. **62**, 386-412.

Gegen das von Fr. Galton in dem Werke „Natural inheritance" (1889) aufgestellte Vererbungsgesetz (vergl. hierüber F. d. M. **28**, 210, 1897) hatte sich Pearson zunächst ablehnend verhalten. Gegenwärtig hat er sich aber zu der Ansicht bekehrt, dass dieses „Galton'sche Gesetz der Vorfahren-Vererbung" ein fundamentales Princip der Vererbungstheorie ist, aus dem alle numerischen Daten der Erblichkeit in Zukunft wenigstens bis zu einer ersten Annäherung hergeleitet werden können. Diese Zuversicht schöpft der Verf. aus der Uebereinstimmung der Resultate seiner bezüglichen Untersuchungen mit dem nun von ihm richtig aufgefassten Galton'schen Gesetze. Das wird theoretisch des

näheren durchgeführt und auf einige Beispiele angewandt. „Gegenwärtig wünschte ich nur meine Ansicht dahin auszusprechen, dass mit allem gehörigen Vorbehalt das Gesetz der Vorfahren-Vererbung mir eine der glänzendsten Entdeckungen Galton's zu sein scheint; es ist höchst wahrscheinlich, dass es die einfache beschreibende Feststellung ist, welche alle verschlungenen Linien des erblichen Einflusses in einen einzigen Brennpunkt bringt. Wenn die Darwin'sche Evolution natürliche Zuchtwahl ist, verbunden mit Vererbung, dann muss sich die einfache Feststellung, die das ganze Gebiet der Vererbung umfasst, fast ebenso Epoche machend für den Biologen erweisen, wie das Gravitationsgesetz für den Astronomen." Lp.

F. Galton. An examination into the registered speeds of American trotting horses, with remarks on their value as hereditary data. Lond. R. S. Proc. **62**, 310-311.

Erörterungen über die Wichtigkeit von Aufzeichnungen über Geschwindigkeiten von Pferden in ihren „Stammbäumen", erläutert an den Daten aus „Wallace's Year Book" für die Jahre 1892/96. Lp.

F. Galton. A diagram of heredity. Nature **57**, 293.

Die vom Verf. aufgestellte Regel der Anteilsberechnung der Vorfahren an den ererbten Eigenschaften (vergl. F. d. M. **28**, 210, 1897) ist von A. J. Meston durch ein hübsches Diagramm versinnlicht worden („Horseman", Chicago, 28 Decbr. 1897), das in Nachbildung vorgeführt und erläutert wird. Lp.

F. Galton. The distribution of prepotency. Nature **58**, 246-247.

K. Pearson. The distribution of prepotency. Nature **58**, 292-293.

Erörterungen über den Einfluss der Zuchtwahl bei den Pferden, die zu Zwecken des Sports dienen sollen, hinsichtlich der Uebereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung. Während Galton in diesem Falle eine Abweichung von den von ihm selbst aufgestellten Gesetzen der Vererbung behauptet, weist Pearson den beobachteten Widerspruch als nur scheinbar vorhanden zurück und erblickt auch in den beigebrachten Beispielen das Walten allgemeiner Gesetzmässigkeit. Lp.

F. R. Japp. Opening address in Section B of the British Association. Stereochemistry and vitalism. Nature **58**, 452-460.

K. Pearson. Chance or vitalism? Nature **58**, 495-496.

W. F. R. Weldon. Opening address in Section D of the British Association. Nature **58**, 499-506.

G. F. Fitzgerald. Chance or vitalism? Nature **58**, 545.

C. O. Bartrum. Chance or vitalism? Nature **58**, 545.

J. T. Cunningham. Organic variations and their interpretation. Nature **58,** 593-594.

G. Henslow. A few remarks upon Prof. Weldon's address. Nature **58,** 594-595.

W. F. R. Weldon. Answer to Mr. Cunningham. Nature **58,** 595-596.

G. Errera. Asymmetry and vitalism. Nature **58,** 616.

F. R. Japp. Reply to various criticisms. Nature **58,** 616-618.

Die beiden Eröffnungsreden von Japp und Weldon betreffen Wahrscheinlichkeiten bei der Bildung chemischer Verbindungen und bei der natürlichen Zuchtwahl. Die Zuschriften der verschiedenen Correspondenten kritisiren die vorgetragenen Ansichten. Lp.

E. Mosch. Zur Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempfindungen. Wundt Philos. Studien **14,** 491-549.

Die Arbeit knüpft an die Bruns'sche Abhandlung an: „Ueber die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik" (F. d. M. **25,** 352, 1893). Der Verf. will den Versuch machen, die in dem Bruns'schen Aufsatze ausgesprochenen Gedanken auf dem Gebiete der Schallempfindungen in Anwendung zu bringen. Ausserdem soll es der Zweck der Arbeit sein, die Grundformeln, die nichts anderes als eine Anwendung des Gauss'schen Fehlergesetzes auf die Psychophysik darstellen, auf ihre Brauchbarkeit hin zu prüfen. Die Prüfung der Anwendbarkeit des Gauss'schen Fehlergesetzes ist um so mehr eine dringende Forderung geworden, als Fechner in seiner Collectiv-Masslehre gezeigt hat, dass das Gauss'sche Fehlergesetz durchaus nicht die ihm beigelegte allgemeine Anwendbarkeit besitzt. (Die Untersuchungen von K. Pearson bewegen sich in gleicher Richtung. Ref.) Eine mathematisch strenge Ableitung solcher allgemeinen Fehlergesetze hat dann Bruns gegeben (vergl. das Referat über Bruns S. 189). Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt daher mehr auf mathematischem als auf psychologischem Gebiete. Insbesondere ist der zweite Abschnitt ganz den mathematischen Entwickelungen gewidmet, der Abschnitt 6 der Erweiterung des Gauss'schen Fehlergesetzes, das sich zur genaueren Darstellung der Beobachtungen als nicht ausreichend erwiesen hatte, und in Abschnitt 7 folgt die Anwendung des verallgemeinerten Verteilungsgesetzes. Es zeigt sich, dass das Bruns'sche Gesetz im Stande ist, den Thatsachen der Beobachtung besser Rechnung zu tragen als das einfache Gauss'sche Gesetz. Lp.

T. C. Simmons. Note on question 4816. Ed. Times **68,** 71-72.

Die von Evans gestellte Frage lautet: A trifft eine Kreisscheibe vom Radius 20 Zoll in der Entfernung von vierhundert Yards mit einer Flinte 500 Mal unter tausend Schüssen. Wie oft muss B unter tausend

Schüssen dieselbe Scheibe mit der Flinte in derselben Entfernung treffen, um zu beweisen, dass seine Geschicklichkeit zu der von A sich wie 2 zu 1 verhält? Zwei irrige Beantwortungen von K. S. Putnam und Whitworth veranlassten den Verf. der Note, den richtigen Weg zu weisen, wonach B die Scheibe $937\frac{1}{2}$ Mal treffen müsste. Sir John Herschel hat die Frage auf S. 495 - 507 seiner „Familiar lectures on scientific subjects" (Strahan, 1866) in völliger Allgemeinheit richtig behandelt, nachdem er sich in einer Arbeit des Jahres 1857 ebenfalls getäuscht hatte. Auch bei Liagre „Calcul des probabilités" (1879, 2e éd.) und bei Bertrand „Calcul des probabilités (1889) findet man die richtigen Lösungen. Dagegen ist H. Laurent in seinen „Jeux de hasard" (Paris, Gauthier-Villars) demselben Fehler unterlegen wie Herschel in seiner ersten Veröffentlichung. Lp.

N. Sabudski. Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung auf das Schiessen und die Schiesslehre. St. Petersburg: Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. XVII + 425 S. gr. 8°. (Russisch.)

Inhaltsverzeichnis. Die Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung auf das Schiessen und die Schiesslehre.

Kapitel I. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre. 1. Zufällige Erscheinungen. — 2. Mass für die Wahrscheinlichkeit. — 3. Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Function der Beziehung m/n. — 4. Grenzen des Wahrscheinlichkeitswertes.

§ I. Die grundlegenden Lehrsätze. 5. Erster Satz — Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen. — 6. 7. Entgegengesetzte Ereignisse. 8. Zweiter Satz — Wahrscheinlichkeit aus Gründen. — 9. Beispiele zur Erläuterung der Anwendung der beiden ersten Sätze. — 10. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gemäss seiner Wahrscheinlichkeit nach verschiedenen Hypothesen. — 11. Dritter Satz — hypothetische Wahrscheinlichkeit. — 12. Beispiele zur Erläuterung der Anwendung des dritten Satzes. — 13. Vierter Satz — Theorie zukünftiger Ereignisse.

§ II. Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Wiederholung von Versuchen. 14. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, zusammengesetzt aus einer begrenzten Zahl von Wiederholungen zweier von einander unabhängigen entgegengesetzten Ereignisse, deren Einzelwahrscheinlichkeit bekannt ist. — 15. Wahrscheinlichkeit, dass bei μ Wiederholungen des Versuchs das Ereignis A nicht weniger als a- und nicht mehr als b-Mal eintritt. — 16. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, zusammengesetzt aus einer begrenzten Zahl von Wiederholungen dreier unter sich unabhängigen Ereignisse. — 17. Das wahrscheinlichste Ereignis aus μ Wiederholungen eines Versuchs, welcher hinzukommt zu einem von zwei entgegengesetzten Ereignissen. — 18. Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Ereignisses bei einer sehr grossen Anzahl von Versuchen.

§ III. Lehrsatz von Jacob Bernoulli. 19. Ueber die Gesetzmässigkeit in der Zahl der wiederkehrenden Ereignisse beim Anwachsen der Versuchsreihe. — 20. Elementare Herleitung des Satzes von Jacob Bernoulli. — 21. Beweis des Bernoulli'schen Satzes nach der Methode von Laplace.

§ IV. Mathematische Theorie der Erwartung von Tschebyschew. 22. Bestimmung der mathematischen Erwartung. — 23. Vom mittleren Zuwachs. — 24. Gerechtes Spiel oder Lotterie. — 25. Beispiel für die Erläuterung der Regel von gerechtem Spiel und Lotterie. — 26. Theorie Tschebyschew's. — 27. Gesetz der grossen Zahlen. — 28. Theorie von Jacob Bernoulli.

§ V. Betrachtung des Falles, dass sich bei Wiederholung eines Versuchs die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Ereignisse mit jedem Versuch ändern. 29. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches festgestellt wird aus einer beschränkten Zahl von Wiederholungen zweier von einander unabhängigen entgegengesetzten Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit bekannt ist und bei jedem Versuch wechselt. — 30. Wahrscheinlichkeit, dass bei μ Wiederholungen eines Versuchs die Zahl m des Eintreffens eines Ereignisses A in den Grenzen M_0 und M_1 liegt. — 31. Der Fall, dass man bei Wiederholung eines Versuchs das Eintreffen eines von mehreren unter einander unabhängigen Ereignissen erwartet. — 32. Wahrscheinlichkeit, dass bei μ Wiederholungen eines Versuchs die Summe $m_1\vartheta(1)+m_2\vartheta(2)+\cdots+m_l\vartheta(l)$ gleich s ist, wenn man voraussetzt, dass das Eintreffen des Ereignisses A_1 verbunden ist mit dem Werte der Function $\vartheta(1)$; das Eintreffen des Ereignisses A_2 mit dem Werte der Function $\vartheta(2)$ u. s. f.

§ VI. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen. 33. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus der Zahl seiner Wiederholungen bei einer gegebenen Zahl von Versuchen. — 34. Die entgegengesetzte Bernoulli'sche Theorie. — 35. Zahlenbeispiel. — 36. 37. Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse.

Kapitel II. Methode der kleinsten Quadrate.

§ I. Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes einer Unbekannten nach den Resultaten ihrer unmittelbaren Messung. 38. Ueber Beobachtungsfehler. — 39. Ständige und zufällige Fehler. — 40. Eigentümlichkeit der zufälligen Fehler. — 41. Das arithmetische Mittel aus einer grossen Zahl von Beobachtungen. — 42. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Beobachtungsresultate einem gegebenen Werte gleich ist, wenn eine grosse Zahl von Beobachtungen vorliegt. — 43. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Wert innerhalb bestimmter Grenzen liegt. — 44. wie 41. — 45. Der zuverlässigste Wert einer Unbekannten aus einer sehr grossen Zahl von Beobachtungen. — 46. Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers bei der Anwendung des Grundsatzes vom arithmetischen Mittel aus einer beschränkten Anzahl von Beobachtungen. — 47. Mass für die Genauigkeit der Beobachtung. — 48. Wahrscheinlichste Grösse des mittleren Wertes. — 49. Mass für die Genauigkeit des mittleren Wertes. —

50. Wahrscheinlichster Wert des Masses für die Genauigkeit der Beobachtung. — 51. Wahrscheinlicher Fehler der einzelnen Beobachtung und des Mittelwertes. — 52. Ausdruck für das Mass der Genauigkeit einer Beobachtung durch den Mittelwert der n^{ten} Potenz der Fehler. — 53. Beziehung zwischen den mittleren Fehlern und den wahrscheinlichsten Werten der mittleren Fehler. — 54. Der genaueste Wert des arithmetischen Fehlermittels. — 55. Mittel zur Bestimmung des Masses der Beobachtungsgenauigkeit auf Grund der mathematischen Erwartung. — 56. Ausdruck für das Mass der Genauigkeit von Beobachtungen mit Hülfe des Unterschieds zwischen den gemessenen Werten. — 57. Mittlerer quadratischer Fehler eines Wertes, wenn bei Bestimmung seiner Grösse einige von einander unabhängige Fehlerquellen mitwirken, deren mittlere quadratische Werte bekannt sind.

§ II. Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes einer Unbekannten aus Beobachtungen, die einen verschiedenen Grad von Genauigkeit haben. 58. Wahrscheinlichster Wert der Unbekannten x, bestimmt aus Beobachtungen von verschiedenem Grade von Genauigkeit und folglich von verschiedener Zuverlässigkeit. — 59. Mass der Genauigkeit und Wert des mittleren Resultats. — 60. Wahrscheinlichster Wert des Genauigkeitsmasses H und wahrscheinlicher Fehler R des Mittelwertes. — 61. Kontrolle für die Möglichkeit der Zulassung des Satzes vom arithmetischen Mittel aus einer beschränkten Zahl von Beobachtungen.

§ III. Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes eines Resultates aus Beobachtungen, die aus ihren Functionen hergeleitet sind. 62. 63. Grund- und Normal-Gleichungen für den Fall, dass Beobachtungen von einem bestimmten Grade von Genauigkeit vorliegen, wenn die Abhängigkeit zwischen den Unbekannten durch eine lineare Gleichung bestimmt ist. — 64. Der Fall, dass die Beobachtungen keinen bestimmten Grad von Genauigkeit aufweisen. — 65. Auflösung der Normalgleichungen. — 66. 67. Wahrscheinlichster Wert des Genauigkeitsmasses und wahrscheinlicher Beobachtungsfehler. — 68. Mass der Genauigkeit des Wertes und wahrscheinliche Fehler der wahrscheinlichsten Werte ξ, η, ζ der Grössen x, y, z. — 69. Der Fall, wenn die Beziehung zwischen den gesuchten Unbekannten durch eine Gleichung von nicht linearer Gestalt angegeben ist. — 70. Die Fälle von Bedingungsgleichungen, aus denen die Grössen der Unabhängigen mit genügender Genauigkeit zu bestimmen sind. — 71. Einige praktische Handgriffe bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. — 72. Beispiel I. Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes der Winkel zwischen Richtungen, die von einem Orte M einer Standlinie nach vier Punkten A, B, C, D gehen. — 73. Beispiel II. Bestimmung des Druckes der Pulvergase in den verschiedenen Rohrquerschnitten der 42-linigen Kanone auf Grund der Druckmessungen beim Schiessen mittels Stauchapparaten, welche in den verschiedenen Querschnitten des Rohres angebracht sind.

Kapitel III. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Untersuchung der Schiessresultate.

§ I. Untersuchung der Schiessresultate, wenn die Auftreffpunkte in einer (Vertical-)Ebene liegen. 74. Die Abweichungen der Einzelflugbahnen von der mittleren Flugbahn sind zu betrachten wie Beobachtungsfehler. — 75. Mittlerer Treffpunkt und Wahrscheinlichkeit der Abweichung von diesem Punkte. — 76. Veränderung des Vorzeichens von *e* in der gewonnenen Wahrscheinlichkeitsgleichung. — 77. Curven gleicher Wahrscheinlichkeit. — 78. Bestimmung der Richtung der Gruppirungsaxe nach Versuchsresultaten. — 79. Errechnung der Coordinaten des mittleren Treffpunktes, der mittleren quadratischen und der wahrscheinlichen Abweichung. — 80. Wahrscheinlichkeit zu treffen: in einen sehr engen elliptischen Ring und in eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem mittleren Treffpunkte zusammenfällt, und deren Axen mit den Gruppirungsaxen znsammenfallen und einfach proportional sind den mittleren quadratischen Abweichungen von ihren Richtungen. — 81. Wahrscheinlichkeit, in ein Rechteck zu treffen, dessen Mittelpunkt mit dem mittleren Treffpunkte zusammenfällt, und dessen Seiten den Gruppirungs-Axen parallel sind. — 82. Treffähigkeit beim Schiessen. — 83. Ueber die Grenzen der Abweichung und über den Ausschluss von zweifelhaften Beobachtungen. — 84. Beispiel für die Bearbeitung der Schiessresultate aus einem schweren 12 cm Kp.-Geschütz, um die Möglichkeit darzuthun, dass man die Methode der kleinsten Quadrate zur Untersuchung von Schiessresultaten anwenden kann.

§ II. Untersuchung der Schiessresultate, wenn die Auftreffpunkte auf einer Horizontalebene liegen. 85. Wahrscheinlichkeit der Abweichung der einzelnen Punkte vom mittleren Treffpunkte. — 86. Aenderung des Vorzeichens von *e* in der ermittelten Wahrscheinlichkeitsgleichung. — 87. Oberflächen gleicher Wahrscheinlichkeit und Bestimmung der Richtung der Gruppirungsaxe nach den Versuchsergebnissen.

§ III. Untersuchung der Resultate des Schrapnellschiessens. 88. Ueber die Zahl der Auftreffpunkte auf der Scheibe beim Springen eines Schrapnells. — 89. Ueber den mittleren Sprengpunkt der Schrapnells und über die wahrscheinliche Längenabweichung der Sprengpunkte der einzelnen Schrapnells. — 90. Ueber die Zahl der Aufschlagspunkte auf die Scheibe beim Schiessen mit Schrapnells. — 91. Ueber den mittleren Breitestreifen in der Scheibe, der beim Schiessen mit einer Gruppe von Schrapnells getroffen wird. — 92. Zahlenbeispiel.

Kapitel IV. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Untersuchung von Fragen des Schiessverfahrens. 93. 94. 95. Grundlagen für die Beurteilung der Fragen des Schiessverfahrens.

§ I. Das Schiessverfahren, wenn die Geschossabweichung gemessen werden kann. 96. Bestimmung der wahrscheinlichsten Correctur der Aufsatzhöhe, wenn Richtung und Grösse der Geschossabweichung vom Ziel genau gemessen ist. — 97. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers beim Einschiessen im angeführten Falle. — 98. Bestimmung der wahrscheinlichsten Zielentfernung und des wahrscheinlichen Fehlers des Einschiessens, wenn die Geschossabweichung vom Ziel nicht genau gemessen worden ist.

§ II. Das Schiessverfahren, welches sich darauf gründet, dass Kurzschüsse von Weitschüssen unterschieden werden. Verfahren von Percin. — 99. Die Wahrscheinlichkeit für einen Kurzschuss und für einen Weitschuss. — 100. Zahlenbeispiele. — 101. 102. Bestimmung der wahrscheinlichsten Visirhöhe und ihr wahrscheinlicher Fehler, wenn die Beobachtung sich auf Unterscheidung von Kurz- und Weitschüssen beschränkt. Methode des französischen Artilleristen Percin. — 103. Betrachtung des Falles, wann man eine Gabel erhält. — 104. 105. Bestimmung der wahrscheinlichsten Correctur und des wahrscheinlichen Fehlers des Schiessverfahrens beim Gruppenschiessen. — 106. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass beim Gruppenschiessen eine Combination von Kurz- und Weit-Schüssen entsteht, wenn die Visirhöhe aus den vorhergehenden Schüssen gefunden ist. — 107. Betrachtung des Falles, dass der wahrscheinliche Fehler beim Einschiessen $R = 1$ ist.

§ III. Regelung des Schiessverfahrens nach der Methode von Mangon. 108. Bestimmung der wahrscheinlichsten Zielentfernung, wenn bei einigen Schüssen Richtung und Grösse der Geschossabweichung vom Ziel beobachtet wurde, und man sich bei anderen auf die Beobachtung, ob Kurz- oder Weit-Schuss, beschränkte. Verfahren des belgischen Artilleristen Mangon. — 109. Zahlenbeispiele. — 110. Eigentümlichkeit der Function $f(t)$. — 111. 112. 113. Angenäherter Wert des wahrscheinlichen Fehlers des Schiessverfahrens. — 114. Zahlenbeispiele. — 115. Bemerkung über ein Schiessverfahren, welches sich auf Zahlenangaben von Apparaten und zugleich auf die Unterscheidung von Kurz- und Weit-Schüssen mit dem Auge gründet. — 116. 117. Wahrscheinlichste Correctur des Visirs und sein wahrscheinlicher Fehler, wenn die Abweichung der Schüsse vom Ziel gemessen wird und zugleich mit dem Auge Kurz- und Weit-Schüsse unterschieden werden. — 118. 119. 120. Falsche Beobachtungen und ihre Einbeziehung in die Rechnung bei Bestimmung von Weit- und Kurz-Schüssen.

§ IV. Lösung einiger besonderer Fragen des Schiessverfahrens. — 121. Berechnung des angenäherten Wertes der wahrscheinlichsten Höhenänderung des Aufsatzes, gesucht aus den vorangegangenen Schüssen. — 122. Bestimmung der angenäherten Wahrscheinlichkeit, das Ziel in die Gabel zu bekommen und in die Grenzen der Geschossstreuung. — 123. 124. Wahrscheinlichkeit für eine falsche Gabel. — 125. 126. Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Fälle der Verteilung von Kurz- und Weit-Schüssen innerhalb der erschossenen Gabel. — 127. Wahrscheinlichkeit, ein gegebenes Ziel zu treffen, wenn man mit der Erhöhung schiesst, die durch das Einschiessen gefunden ist.

§ V. Ueber das Einschiessverfahren auf Grund der Messung der Abweichung der Geschosse vom Ziel. 128. Das Einschiessverfahren auf Grund der gemessenen Abweichung vom Ziel. — 129. 130. 131. Verfahren der Doppel-Correctur.

§ VI. Betrachtung einiger bei uns (in Russland) eingeführten Regeln für das Schiessen aus Geschützen, welche sich auf die Beob-

achtung der Richtung der Geschossabweichung vom Ziel gründen. 132. Einteilung des Einschiessens in drei Hauptperioden. — 133. Ermittelung der engen Gabel. — 134. Wiederholung der Grenzen der engen Gabel. — 135. Andere Mittel der Prüfung der Grenzen der engen Gabel durch zwei Schüsse. — 136. Die einzelnen Schüsse nach Festsetzung der engen Gabelgrenzen. — 137-138. Das Gruppenschiessen.

§ VII. Das Schrapnellschiessen. 139. Eigentümlichkeiten des Schrapnellschiessens. — 140. Errechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Schrapnell innerhalb gegebener Höhengrenzen springt. — 141. Zahlenbeispiel. — 142. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass das Schrapnell vor dem Springen vor oder hinter dem Ziele aufschlägt. — 143-148. Ueber einige bei uns (in Russland) angenommene Regeln für das Einschiessen mit Schrapnells.

Kapitel V. Integrationsformeln für die Methode der kleinsten Quadrate.

149. Erklärung. — 150-156. Herleitung der Formel von Tschebyschew für die Summirung der Glieder einer Reihe, die einer gesuchten Function gleich ist, wenn gefordert wird, den wahrscheinlichsten Wert der Coefficienten k_0, k_1, k_2, ... zu finden aus der Gleichung $U = F(x)[k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots]$, wo $F(x)$ eine Function des veränderlichen x ist, und wenn aus Beobachtungen gefunden ist $U = u_1$, $u_2, \ldots, u_n$, entsprechend den verschiedenen Werten $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. — 157-158. Integrationsformeln Tschebyschew's, wenn die Bedeutung der Function bekannt ist, welche den verschiedenen Werten der Veränderlichen entspricht.

Beilage 1. Entwickelung von $\sin x$ in eine unendliche Reihe.
Beilage 2. Ergänzung zu No. 52.
Beilage 3. Methode der kleinsten Quadrate nach Laplace.
Beilage 4. Ueber den Mittelwert.

Beilage 5. 1. Tabelle der Werte $\Theta(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt$.

2. Tabelle der Werte $\Phi(\beta) = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-\varrho^2 z^2} dz$, wo $\beta = \frac{s}{r}$ ist.

3. Tabelle der Wahrscheinlichkeit $P = \Phi(\beta') \cdot \Phi(\beta'')$.

4. Tabelle der Werte $\Pi(n, s)$.

5. Tabelle der Werte $\frac{a_{n,s}}{a_0}$.

6. Tabelle der Werte $\frac{F_{n,s}}{2\varepsilon_\xi \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}$.

7. Tabelle der Werte $F(t)$, $f(t)$, $f'(t)$, wo $t = -\beta$ und $t = \beta$ ist.

Kls.

M. Cantor. Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig: B. G. Teubner. X + 136 S. 8°.

Heutzutage wird es fast für jedermann notwendig sein, etwas von den Rechnungsweisen des auf Kauf und Verkauf sich beschränkenden Börsengeschäftes zu verstehen; ebenso lassen es Gemeinde- und Staatsverwaltung wünschenswert erscheinen, etwas von der Aufnahme und Heimzahlung von Anleihen zu wissen, und endlich ist das Versicherungswesen so in den Vordergrund des öffentlichen Lebens getreten, dass sich jeder Gebildete darüber in Kürze Auskunft zu verschaffen wünschen wird. Von diesem Gesichtspunkte aus hat der Verf. sein Büchlein verfasst; sein Wunsch, ein lesbares Buch zu schreiben, ist jedenfalls gelungen; bleibt es doch auch da verständlich, wo mathematische Formeln nicht vermieden werden konnten. Ref. hat auch das Urteil praktischer Bankbeamten über das Buch, das er erbeten hatte, mit dem seinen übereinstimmend gefunden. Die neun Kapitelüberschriften lauten: Einfacher Zins, Zusammengesetzter Zins, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Von den Lotterieanlehen, Versicherungswesen, Sterblichkeitstafeln, Einfache Lebensversicherung und sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung, Dividendenberechnung, Weniger einfache Versicherungsarten auf Grundlage der Sterblichkeit. Ein Anhang enthält eine Tafel für $1{,}0p^n$ und $1{,}0p^{-n}$, bei $p = 3$, $p = 3\frac{1}{2}$, $p = 4$ und $n = 1$ bis $n = 100$. Bö.

H. P. Hase. Abhandlung über Begräbnis-, Witwen- und Waisen-Kassen. Pr. (No. 582) Realgymn. Zwickau. 40 S. 4°.

Es werden nur Kassen mit geringer Mitgliederzahl und geringen Unterstützungsbeträgen behandelt, bei denen man gewöhnlich eine versicherungs-wissenschaftliche Verwaltungsweise, teils aus äusseren, teils aus inneren Gründen, nicht für angebracht hält. Der Verf. erachtet dieses Verfahren nicht für berechtigt und häufig sogar für schädlich; jedoch hält er hier Vereinfachungen für zulässig. Er versucht deshalb, den Zusammenhang der für das Versicherungswesen wichtigen Grössen so darzustellen, dass die gewöhnliche schulmässige mathematische Vorbildung vollkommen ausreicht, um die Rechnungen und etwaige allgemeine Formelentwickelungen verstehen zu können. Man wird dann die Prüfungsweise einer Gesellschaftskasse, wie sie vom Verf. schliesslich vorgeschlagen wird, selbständig ausführen, und damit die Herrschaft über die Kassenverhältnisse sowie den Massstab für etwaige Aenderungen gewinnen können, wenn auch besonders die alljährlich vorzunehmende Prüfung des Soll-Vermögens der Kassen nicht streng wissenschaftlich ist.

Fünf Abschnitte enthalten die Darstellung der Verhältnisse einer Begräbniskasse, einer Witwenkasse, einer Witwenkasse mit gezwungener Mitgliedschaft, einer Waisenkasse, endlich einer Waisenkasse mit gezwungener Mitgliedschaft; der sechste Abschnitt giebt eine Prüfung der Zwickauer Lehrer-Begräbnis-, Witwen- und Waisen-Kassenverhältnisse, der siebente endlich enthält Schlussbemerkungen. Bö.

U. GOBBI. Contribuzione allo studio dell'interesse. Lomb. Ist. Rend. (2) **31,** 237-251, 325-337, 1300-1302.

„Zweck dieser Note ist, zu untersuchen, ob und um wie viel eine Aenderung im Gewinn eine Aenderung im Ersparen veranlassen könne, und Aufklärung darüber zu verschaffen, ob auf Grund diesbezüglicher Beobachtungen irgend eine Auffassung möglich ist, die die Theorie des Gewinns zu fördern im Stande sei." Bö.

Weitere Litteratur.

E. CÉSARO. Sur l'emploi du calcul des probabilités en pétrographie. Belg. Mém. **53,** 55 S.

B. DANIELEWICZ. Versicherung eines Kapitals mit einer Rente. Wiad. mat. **2,** 32-36 (Polnisch).

B. DANIELEWICZ. Ueber die Keuchel'sche Formel zur Berechnung der Prämienreserve in den Lebensversicherungen. Wiad. mat. **2,** 150-155 (Polnisch).

B. DANIELEWICZ. Das Gruppensystem der Reserveberechnung bei den Lebensversicherungen mit bestimmtem Termin. Wiad. mat. **2,** 216-218 (Polnisch).

L. GROSSMANN. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik. 10. Lieferung (Suppl.-Bd.) Wien: Selbstverlag. IV + 80 S. 8°.

M. KEHM. Ueber die Versicherung minderwertiger Leben. Jena. 92 S. gr. 8°.

H. LAURENT. Théorie des opérations financières. Paris: Gauthier-Villars. 446 S. 8°.

G. F. LIPPS. Ueber Fechner's Collectivmasslehre und die Verteilungsgesetze der Collectivgegenstände. Wundt Philos. Studien **13,** 579-612. Bericht in F. d. M. **28,** 209, 1897.

F. C. LUKAS. Vorausberechnung und Ausgleichung statistischer Erscheinungen. Wien. Assecuranz-Jahrb. 1898, 35 S. 8°.

F. C. LUKAS. Die Ausbildung von mathematischen Sachverständigen in der Lebensversicherungs-Wissenschaft. Wien. Oestr. Versich. Ztg. 1897, 30 S.

W. H. METZLER. On the excess of the number of combinations in a set which have an even number of inversions over those which have an odd number. American M. S. Bull. (2) **4,** 294-295.

H. MICHAEL. Amortisationstabellen zur Anfertigung von Annuitäten-Tilgungsplänen. Mannheim. 158 S. gr. 8°.

CH. MOSER. Sur une fonction qui intervient dans la théorie de l'assurance contre la maladie. Arch. sc. phys. (4) **6,** 364-366.

J. H. PEEK. Toepassing der Waarschijnlijkheidsrekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek. 's Gravenshage. XII + 166 S. 4°.

J. RIEM. Netto-Rechnungen auf Grundlage von Zillmer's ausgeglichener Sterbetafel der 23 deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften für normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, zu 3 % gerechnet und controllirt. Basel. 4°.

H. SCHUBERT. Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Leipzig: G. J. Göschen. V u. 286 S. 8°.

H. SCHUBERT. Mathematical essays and recreations; from the German by T. J. McCormak. Chicago: Open Court Publishing Company. IV + 149 S. 8°.

A. SMITH. An inquiry into nature and causes of wealth of nations. New edition. London. 796 S. 8°.

A. S. SMITH. Compound interest, as exemplified in the calculation of annuities, immediate and deferred, present values and amounts, insurance premiums, repayment of loans, etc. With annuity tables. Enlarged edition. London. 72 S. 8°.

H. TARNKE. Die Rechnungs-Grundlagen der Lebensversicherung. Leipzig. XI + 148 S. gr. 8°.

J. VINOT. Récréations mathématiques. Nouveau recueil de questions curieuses et utiles extraites des auteurs anciens et modernes. 4e éd. Paris: Larousse. VIII + 215 S. 8°.

C. VIVANTE. Traité théorique et pratique des assurances maritimes. Traduit, annoté et complété par V. Yseux. Paris. 40 + 564 S. 8°.

K. WAGNER. Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena. VI + 160 S.

WALFORD. Insurance guide and handbook to the principles and practice of life assurance. New and revised edition by W. Schooling. London.

K. ZNOVICKI. Combinationen mit Wiederholungen und deren Anwendung zur Summation gleicher Potenzen der natürlichen Zahlen. Spaczinski's Bote No. 265. 14-18. (Russisch.) Si.

Fünfter Abschnitt.

R e i h e n.

Kapitel 1.

A l l g e m e i n e s.

A. Pringsheim. Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Processe. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 47-146.

I. Irrationalzahlen und Grenzbegriff.

1. Euklid's Verhältnisse und incommensurable Grössen. Michael Stifel's Arithmetica integra. Der Irrationalbegriff der analytischen Geometrie. Das Cantor-Dedekind'sche Axiom und die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen. Die Theorien von Weierstrass und Cantor. Die Theorie von Dedekind. Du Bois-Reymond's Kampf gegen die arithmetischen Theorien. Die vollkommene Arithmetisirung im Sinne Kronecker's. Verschiedene Darstellungsformen der Irrationalzahlen und Irrationalität gewisser Darstellungsformen.

2. Der geometrische Ursprung des Grenzbegriffs. Die Arithmetisirung des Grenzbegriffs. Das Kriterium für die Grenzwert - Existenz. Das Unendlichgrosse und Unendlichkleine. Oberer und unterer Limes. Obere und untere Grenze. Das Rechnen mit Grenzwerten. Die Zahl $e = \lim(1+1/\nu)^{\nu}$. Sogenannte unbestimmte Ausdrücke. Graduirung des Null- und Unendlichwerdens. Grenzwert zweifach - unendlicher Zahlenfolgen.

II. Unendliche Reihen, Producte, Kettenbrüche und Determinanten.

3. Unendliche Reihen. Convergenz und Divergenz. Die Convergenzkriterien von Gauss und Cauchy. Kummer's allgemeine Kriterien. Die Theorien von Dini, Du Bois-Reymond und Pringsheim. Die Kriterien erster und zweiter Art. Andere Kriterienformen. Tragweite der Kriterien erster und zweiter Art. Die Grenzgebiete der Convergenz und Divergenz. Bedingte und unbedingte Convergenz. Wert-

änderungen bedingt convergenter Reihen. Kriterien für eventuell nur bedingte Convergenz. Addition und Multiplication unendlicher Reihen. Doppelreihen. Vielfache Reihen. Transformation von Reihen. Euler-MacLaurin'sche Summenformel. Halbconvergente Reihen. Divergente Reihen. Divergente Potenzreihen.

4. Unendliche Producte, Kettenbrüche und Determinanten. Unendliche Producte: Historisches. Convergenz und Divergenz. Umformung von unendlichen Producten in Reihen. Factoriellen und Facultäten. Allgemeine formale Eigenschaften der Kettenbrüche. Recursorische und independente Berechnung der Näherungsbrüche. Näherungsbrucheigenschaften besonderer Kettenbrüche. Convergenz und Divergenz unendlicher Kettenbrüche. Allgemeines Divergenzkriterium. Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Convergente Kettenbrüche mit Gliedern beliebigen Vorzeichens. Periodische Kettenbrüche. Transformation unendlicher Kettenbrüche. Umformung einer unendlichen Reihe in einen äquivalenten Kettenbruch. Anderweitige Kettenbruchentwickelungen unendlicher Reihen. Kettenbrüche für Potenzreihen und Potenzreihenquotienten. Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und Producten. Aufsteigende Kettenbrüche. Unendliche Determinanten. Historisches. Haupteigenschaften unendlicher Determinanten. St.

E. Schimpf. Zur Definition der Convergenz der unendlichen Reihen und der unendlichen Producte. Mehrfache Grenzgleichungen. Grenzgleichungen periodischer Reihen. Pr. (No. 364) Gymn. Bochum. 30 S. 4°.

I. Wenn man unendliche Producte, welche verschwinden, ohne dass ein Factor verschwindet, nicht als convergent bezeichnen will, so hat man für die Convergenz der unendlichen Reihen für wachsendes n und beliebiges ν

$$\lim_{n=\infty} \{f_{n+\nu} - f_n\} = 0,$$

dagegen für die Convergenz der unendlichen Producte

$$\lim_{n=\infty} \left\{\frac{f_{n+\nu}}{f_n} - 1\right\} = 0.$$

Der Verf. zeigt, wie diese beiden Erklärungen aus einer allgemeineren Auffassung des Begriffes „Convergenz" entspringen.

II. Es handelt sich um Reihen $\Sigma\omega(k)x^k$, in welchen $\omega(k)$ durch die Formel $\omega(k)\colon \omega(k-1) = 1 + mk^{-1} + m_2 k^{-2} + \cdots + m_{\lambda-1} k^{-\lambda+1} + (m_\lambda)_k k^{-\lambda}$ erklärt ist; daraus ergiebt sich, wenn G den Grenzwert des Quotienten $\omega(k)\colon \omega(k-1)$ für $k = \infty$ bedeutet,

$$\omega(k) = Gk^m \{1 + \beta_1 k^{-1} + \beta_2 k^{-2} + \cdots + (\beta_{\lambda-1})_k k^{-\lambda+1}\}.$$

Für $|x-1| > 0$ ergeben sich die Grenzgleichungen

$$(1) \qquad \Sigma\omega(k)x^k - X_1 = n^m x^n \frac{Gx}{x-1}(1+\varepsilon_n),$$

$$(2) \qquad \Sigma\omega(k)x^k - \left[\sum_0^\mu \omega(k)x^k + \frac{Gx}{x-1}(X'_1 - \mu^m x^\mu)\right]$$
$$= n^m x^n \frac{Gx}{x-1}\left\{1 + \frac{1}{n}\left(\beta_1 - \frac{m}{x-1}\right)_n\right\}.$$

$(\sigma)_n$ bedeutet eine von n abhängige Function, welche σ für $n=\infty$ zum Grenzwert hat.

Sind x und m von der Art, dass $\lim(n^{m-1}x^n) = \infty$ ist, so sind X_1 und X'_1 beliebig. Hat $(n^m x^n)$ keinen Grenzwert oder den Grenzwert 0, so sind X_1 und X'_1 fest bestimmte Grössen; es muss für diesen Fall

$$X_1 = \sum_0^\mu \omega(k)x^k + \frac{Gx}{x-1}(X'_1 - \mu^m x^\mu)$$

sein. Ist dagegen $|x| = 1$ und $0 < \mathfrak{m} \leqq 1$, so ist X_1 beliebig, X'_1 fest.

Hierzu tritt die erweiterte Grenzgleichung

$$\sum_0^n \omega(k)x^k - \left[\sum_0^\mu \omega(k)x^k + \frac{Gx}{x-1}\left\{X'_1 - \mu^m x^\mu\left[1 + \frac{D_1}{\mu} + \frac{D_2}{\mu^2} + \cdots + \frac{D_{\varrho-1}}{\mu^{\varrho-1}}\right]\right\}\right]$$
$$= n^m x^n \frac{Gx}{x-1}\left[1 + \frac{D_1}{n} + \frac{D_2}{n^2} + \cdots + \frac{D_{\varrho-1}}{n^{\varrho-1}} + \frac{(D_\varrho)_n}{n^\varrho}\right].$$

Demnach erscheint das Convergenzmass als ein Product aus den zwei Factoren $n^m x^n\ Gx:(x-1)$ und der Klammergrösse, welche 1 zur Grenze hat. Dieser zweite Factor lässt sich nach Potenzen von $1/n$ entwickeln und zwar bis zur ϱ^{ten} Potenz, sobald seine Entwicklung bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Potenz geführt war und λ den Bedingungen genügt, dass für $|x| \gtrless 1$ $\lambda \geqq \varrho+1$, für $|x-1| > 0$, $|x| = 1$ und $\mathfrak{m} \gtrless \varrho$ $\lambda \geqq \varrho+2$ und für $|x-1| > 0$, $|x| = 1$ und $\mathfrak{m} = \varrho$, $\lambda \geqq \varrho+3$ ist. ($\mathfrak{m}$ bedeutet den reellen Teil von m.)

Hieran schliesst sich: mehrfache Grenzgleichung der Reihe $\Sigma\omega(k)$ für $|m-g+1| > 0$ $(g = 0, 1, 2, \ldots, \varrho)$; mehrfache Grenzgleichung der Reihe $\Sigma\omega(k)$ für $m+1 = 0$ und $m+1$ gleich positiver Zahl.

III. Grenzgleichungen periodischer Reihen.

$$\sum_0^n a_k = \sum_0^n \omega(k)e^{\alpha k^2 + \beta k + \gamma},$$
$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\omega(k)}{\omega(k-1)}\, e^{2\alpha k + (\beta - \alpha)}.$$

Bezeichnet man den Grenzwert des Quotienten $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}$ durch $\varkappa$, so gilt Folgendes:

Ist der reelle Teil von α positiv, so ist $\varkappa = \infty$; ist der reelle Teil von α negativ, so ist $\varkappa = 0$; ist α selbst gleich 0, so ist $\varkappa = e^\beta$; ist α rein imaginär, so besitzt $a_k : a_{k-1}$ keinen Grenzwert.

Es werden dann die Fälle behandelt: 1. Der reelle Teil von $\alpha \gtrless 0$; 2. $\alpha = 0$ und $e^\beta \gtrless 1$; 3. $\alpha = 0$ und $e^\beta = 1$; daran schliesst sich eine Zusammenstellung der einfachen Grenzgleichungen der Reihen $\Sigma\omega(k)z^k \cos k\varphi$ und $\Sigma\omega(k)z^k \sin k\varphi$. Wz.

R. Bettazzi. Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo. Torino Atti **33**, 355-374.

Man sagt, dass eine Reihe mit positiven Gliedern „ein Continuum darstellt“, wenn die Summen sämtlicher endlichen und unendlichen Bestandteile derselben eine stetige Zahlenmenge bilden. Die Untersuchungen des Verfs. über solche Reihen führen zu folgendem Hauptergebnis: Damit eine Reihe mit positiven Gliedern ein Continuum darstellt, ist es notwendig und hinreichend, dass die untere Grenze der Glieder Null ist, und dass, wenn b irgend eine positive Zahl bezeichnet, die Summe der Glieder, welche kleiner als b sind, nicht kleiner als b ist. Vi.

C. Pietrocola. Sull' uso dell' algoritmo isobarico nella risoluzione delle serie ricorrenti. Napoli Rend. (3) **4**, 189-190.

Wenn n recurrente Reihen alle derselben Relationsscala $\alpha f(\alpha) = 0$ genügen, aber verschiedenen Systemen von Anfangsgliedern entsprechen, wenn durch $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3, \dots$ die auf einander folgenden Glieder der dem i^{ten} System entsprechenden Reihe bezeichnet werden, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^p & \alpha_2^p & \dots & \alpha_n^p \\ \alpha_1^q & \alpha_2^q & \dots & \alpha_n^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^t & \alpha_2^t & \dots & \alpha_n^t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \dots & \alpha_n^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_p & u_{p-1} & \dots & u_{p-n+1} \\ u_q & u_{q-1} & \dots & u_{q-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_t & u_{t-1} & \dots & u_{t-n+1} \end{vmatrix};$$

hierin stellt u_k die vollständige symmetrische Function k^{ter} Ordnung der Wurzeln der erzeugenden Gleichung $f(x) = 0$ dar.

In dem Bericht von A. Capelli über die Arbeit wird empfohlen, sie in die Atti der Akademie aufzunehmen. Wz.

M. d'Ocagne. Sur la formule de Taylor. Revue de math. spéc. **9**, 1-3.

E. Fabry. Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta Math. **22**, 65-88.

„Wenn die Coefficienten der Reihe $\Sigma a_n z^n$ (der Convergenzradius wird gleich 1 angenommen) willkürlich und unabhängig von einander sind, so kann die durch diese Reihe definirte Function über den Convergenzkreis nicht analytisch fortgesetzt werden.“ Dieser Borel'sche Satz wird neu bewiesen, ebenso einige von Fabry in den Ann. de l'École Normale mitgeteilten Sätze; im Anschluss daran werden Reihen hergeleitet, für welche ein bestimmter Teil des Convergenzkreises die

Grenze (coupure) bildet, über welche die durch die Reihe dargestellte Function nicht analytisch fortsetzbar ist. Wz.

E. Fabry. Sur les points singuliers d'une série de Taylor. Journ. de Math. (5) **4**, 317-358.

I. Es sei $f(z) = \Sigma a_n z^n$, $\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1}$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu a_n,$$

wo λ eine (reelle oder complexe) gegebene Grösse, θ positiv ist. Wenn bei beliebigem ν für $n = \infty$ der Ausdruck

$$\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$$

eine endliche obere Grenze $\frac{1}{A}$ hat, so giebt es keinen singulären Punkt z, für welchen $|z| - \theta|\lambda - z| < A$ wäre.

II. Wenn $f(z)$ keinen singulären Punkt hat, für welchen $|z| - \theta|\lambda - z| < A$ ist, worin A und θ positiv sind, und wenn für $\theta \geqq 1$ der Punkt $z = \infty$ ein Pol oder nicht singulär ist, so ist für $n = \infty$ die obere Grenze der in I angegebenen Wurzel höchstens gle ch $\frac{1}{A}$.

Beispiele (1) $a_n = \frac{1}{n+a}$, (2) $a_n = \frac{1}{(n+a)^p}$.

Untersuchung einer Reihe, die nur einen singulären Punkt auf dem Convergenzkreis hat. Beispiel $\Sigma z^n e^{n[-1+\cos(Ln)^\alpha]}$ für $0 < \alpha < 1$, $n = 1, \ldots, \infty$.

Wenn jede der beiden Reihen $\Sigma a_n z^n$ und $\Sigma b_n z^n$ nur einen singulären Punkt λ', λ'' auf ihrem Convergenzkreis hat, so kann die Reihe $\Sigma a_n b_n z^n$ nur den singulären Punkt $\lambda'\lambda''$ auf ihrem Convergenzkreis haben; dieser Punkt ist singulär, wenn $R = R'R''$ ist, wo R', R'', R die Convergenzradien der drei Reihen sind. Wz.

J. Hadamard. Théorème sur les séries entières. Acta Math. **22**, 55-64.

É. Borel. Sur les singularités des séries de Taylor. S. M. F. Bull. **26**, 238-248.

Wenn die beiden Maclaurin'schen Reihen $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m + \cdots$ und $\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m + \cdots$ innerhalb der um den Nullpunkt mit den Radien k und l beschriebenen Kreise convergent sind und die singulären Punkte α_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ und

β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ haben, so kann die Reihe $\psi(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \cdots + a_m b_m x^m$ keine anderen singulären Punkte als $\alpha_\mu \beta_\nu$ haben.

Diesen von Hadamard aufgestellten Satz vervollständigt Borel durch die folgenden Sätze:

Die Natur eines singulären Punktes $\alpha\beta$ der Reihe ψ hängt nur von der Natur der singulären Punkte α und β ab. (Eine Ausnahme kann eintreten, wenn $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ ist.)

Sind die Functionen f und φ eindeutig in der Umgebung der Punkte α und β, so ist auch die Function ψ in der Umgebung von $\alpha\beta$ eindeutig.

Sind α, β Pole p^{ter}, q^{ter} Ordnung, so ist $\alpha\beta$ ein Pol $(p+q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Ist α ein einfacher Pol von f, so ist die Art des singulären Punktes $\alpha\beta$ von ψ (bis auf einen constanten Factor) dieselbe wie diejenige von β in φ. Wz.

J. Hadamard. Sur les séries entières. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 110-112.

Beweis des in C. R. **124,** 492 mitgeteilten Satzes (F. d. M. **28,** 222, 1897). Lp.

Leau. Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor. S. M. F. Bull. **26,** 267-271.

Der Satz von Hadamard lautet: Setzt man

$$\varphi(z) = \Sigma a_n z^n, \quad \psi(z) = \Sigma b_n z^n, \quad f(z) = \Sigma a_n b_n z^n,$$

so kann $f(z)$ keine anderen singulären Punkte haben als diejenigen, deren Affixe das Product der Affixen der zwei singulären Punkte von φ und von ψ sind. Sei nun α ein singulärer Punkt von φ und β von ψ. Nach bekannter Formel hat man:

$$(4) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \psi(x)\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x},$$

wo C den Umfang eines Feldes bezeichnet, das den Ursprung und die Punkte z/α umfasst, die Punkte β aber ausschliesst. Mögen ferner $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... die Reihen $\Sigma a_n^2 z^n$, $\Sigma a_n^3 z^n$, ... bezeichnen. Man setze in Gleichung (4) nach einander $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... für $\psi(x)$, so dass $f(z)$ entsprechend in $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... übergeht. Der Umfang C soll enthalten bleiben zwischen den γ und den z/γ, wo die γ die Punkte von $\mathfrak{E}$, den Ensembles der singulären Punkte, isolirt von den E angenommen sind. H.

Leau. Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes. C. R. **127,** 607-609.

Der Convergenzradius der Reihe $f(z) = \Sigma a_p z^p$ sei gleich 1. Ob

es auf dem Convergenzkreis singuläre Punkte giebt oder nicht, hängt von einem Ausdruck $\left| \alpha_{nn} a_n + \alpha_{n+1n} a_{n+1} + \cdots + \alpha_{n'n} a_{n'} \right|^{\frac{1}{n}}$ (Hadamard benutzt $\left| \frac{f^n(b)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}$) ab, wo $\frac{n'}{n}$ grösser als eine feste Zahl ist, die grösser als 1 ist.

Bildung von Reihen, die nicht über den Convergenzkreis fortsetzbar sind, ferner von solchen, die nur einen singulären Punkt haben. — Für die Berechnung des numerischen Wertes einer durch eine Reihe $f(z) = \Sigma a_p z^p$ dargestellten Function ausserhalb des Convergenzkreises kann man Reihen $\Sigma a_p b_{pm} z^p$ bilden (m sei eine ganze Zahl), welche angenäherte Werte liefern. Dabei genügt es, den Fall zu behandeln, dass alle a gleich 1 sind:

Beispiele: $\frac{1 - e^{-m(1-z)}}{1-z}$, $\frac{1 - \left(\frac{a+z}{a+1}\right)^m}{1-z}$. Wz.

Leau. Sur le cercle de convergence des séries. C. R. **127**, 711-712.

I. Wenn der Convergenzradius der Reihe $\Sigma c_p t^p$ von Null verschieden, derjenige der Reihe $f_n(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + \varphi_n(t)$ grösser als λ/n und $\lambda > 1$ ist,

II. wenn die Ordnung der durch die Reihe $\Sigma d_p t^p$ definirten Function im Borel'schen Sinne kleiner als 1 ist, der Convergenzradius der Reihe $g_n(t) = d_1 t + d_2 t^2 + \cdots + d_n t^n + \psi_n(t)$ grösser als λn ist,

so hat, wenn t einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt und dessen Radius wenigstens gleich λ/n im Falle I, wenigstens gleich λn im Falle II ist, die Folge der Moduln von $\varphi_n(t)$, bezüglich $\psi_n(t)$ eine endliche obere Grenze.

Der Punkt $+1$ ist der einzige singuläre Punkt der Reihe $\Sigma f_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n$, bezüglich der Reihe $\Sigma g_n(n) z^n$ auf dem Convergenzkreis.

Wz.

Le Roy. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. C. R. **127**, 654-657.

Der Radius des Convergenzkreises der Reihe $\Sigma a_n z^n$ sei gleich 1. Wenn es dann eine Function $\varphi(x)$ giebt, die den Gleichungen

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx, \quad \Sigma a_n z^n = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx = f(z)$$

genügt, so ist $f(z)$ innerhalb des Convergenzkreises gleich der Summe der Reihe. $f(z)$ ist in der ganzen Ebene holomorph mit Ausnahme der reellen Werte von z, die grösser als 1 sind.

Wenn auch $\varphi(x)$ für $0 < x < 1$ holomorph ist, so ist der Querschnitt nicht wesentlich, und $f(z)$ hat keine anderen singulären Punkte als $z = 1$ und $z = \infty$.

Die Berechnung der plötzlichen Wertänderung, die das Integral bei Ueberschreitung des Querschnitts erleidet, giebt die verschiedenen Bestimmungen von $f(z)$.

Die divergente Reihe $\Sigma a_n z^n$ heisst summirbar, wenn der Wert $f(1)$ existirt. Geben die verschiedenen Summationsmethoden dasselbe Resultat, so heisst sie absolut summirbar.

Eine absolut summirbare Reihe kann wie eine convergente Reihe behandelt werden. Wz.

Mohrmann. Bestimmung der Coefficienten in der Potenzreihe, die durch Umkehrung einer gegebenen Potenzreihe entsteht. (Mit Anwendungen.) 2. Teil. Pr. (No. 758) Gymn. Arnstadt. 18 S. 4°.

Die Umkehrung der Potenzreihe (1) $y = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$ sei (2) $x = y(b_{01} + b_{11} y + b_{21} y^2 + \cdots)$; es handelt sich darum, die Coefficienten b_{n1} darzustellen, und zwar geschieht dies ohne Benutzung des Unendlichkleinen.

Bildet man für $k = 1, 2, 3, \ldots$ (3) $x^k = y^k(b_{0k} + b_{1k} y + b_{2k} y^2 + \cdots)$ und setzt die sich hieraus ergebenden Ausdrücke für x, x^2, x^3, ... in die Gleichung (1) ein, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten ein System von linearen Gleichungen für die Grössen b_{nk}; im besonderen ist $b_{01} = \dfrac{1}{a_0}$, $b_{0\,n+1} = \dfrac{1}{a_0^{n+1}}$. Hieraus wird unter Einführung willkürlicher Grössen t_{11}, t_{12}, t_{22}, ..., die in jedem besonderen Falle zweckmässig zu wählen sind, ein neues System von Gleichungen hergeleitet:

$$\begin{array}{lllll}
a_0 b_{n1} + a_1 b_{n-1\,2} & + a_2 b_{n-2\,3} & + \cdots + a_n b_{0\,n+1} & = 0, \\
f_1(a_0) b_{n1} + f_1(a_1) b_{n-1\,2} & + f_1(a_2) b_{n-2\,3} & + \cdots + f_1(a_n) b_{0\,n+1} & = 0, \\
f_2(a_0) b_{n1} + f_2(a_1) b_{n-1\,2} & + f_2(a_2) b_{n-2\,3} & + \cdots + f_2(a_n) b_{0\,n+1} & = 0, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f_{n-1}(a_0) b_{n1} + f_{n-1}(a_1) b_{n-1\,2} & + f_{n-1}(a_2) b_{n-2\,3} & + \cdots + f_{n-1}(a_n) b_{0\,n+1} & = 0;
\end{array}$$

hierin ist gesetzt:

$$f_1(a_r) = t_{11} a_r + a_0 a_{r-1} + a_1 a_{r-2} + \cdots + a_{r-1} a_0,$$
$$f_2(a_r) = t_{12} a_{r1} + t_{22} f_1(a_r) + a_0 f_1(a_{r-1}) + a_1 f_1(a_{r-2}) + \cdots + a_{r-1} f_1(a_0).$$

Die gesuchten Coefficienten werden 1. als Quotienten von Determinanten, 2. ohne Benutzung von Determinanten dargestellt.

Als Anwendungen dienen die Exponentialreihe, die binomische Reihe für ganze positive Exponenten und die Sinusreihe. Wz.

M. Lerch. Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefficienten. Prag. Ber. 1898, 17 S.

M. Lerch. Ueber eine Eigenschaft der Factorielle. Prag. Ber. 1898, 4 S.

M. Lerch. Nachtrag zu den Bemerkungen über trigonometrische Reihen. Prag. Ber. 1898, 17-19.

I. Es bedeute x eine Grösse, und es seien $c_1, c_2, c_3, \ldots$ irgend welche Grössen, so dass die Reihe $f_1(x) = \Sigma c_\nu \sin \nu x\pi (\nu = 1, \ldots, \infty)$ convergirt; bezeichnet man durch $[u]$ das grösste Ganze der reellen positiven Grösse u und setzt $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{[u]} = \varphi(u)$, so ist

$$f_1(x) = -\lim_{(m=\infty)} \pi \int_0^m \varphi\left(\frac{z}{x}\right) \cos z\pi dz$$

unter der Annahme, dass der Grenzübergang durch ganzzahlige Werte m vermittelt wird.

II. Ist für ein positives x die Reihe $f_2(x) = \Sigma c_\nu \cos \nu x\pi$ $(\nu = 1, \ldots, \infty)$ convergent, so ist

$$f_2(x) = +\lim_{(m=\infty)} \pi \int_0^{m+\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{z}{x}\right) \sin z\pi dz,$$

wenn der Grenzübergang durch ganzzahlige m geschieht.

Das Resultat der Arbeit: „Ueber eine Eigenschaft der Factorielle" findet sich, wie der Verf. bemerkt, in der Arbeit Jacobi's: Observatio arithmetica de numero classium etc. Werke B. 6, S. 240. Wz.

A. A. Michelson. Fourier's series. Nature 58, 544-545.

A. E. H. Love. Fourier's series. Nature 58, 569-570.

Der erste Verf. verwickelt sich bei der Behandlung Fourier'scher Reihen (z. B. durch gliedweises Differentiiren) in Widersprüche, denen er ratlos gegenübersteht, wird dann aber von Love zurechtgewiesen.

Lp.

J. W. L. Glaisher. General summation - formulae in finite differences. Quart. J. 29, 303-328.

In der symbolischen Euler'schen Formel $\Sigma\varphi(x) = \int \varphi(x+V)\,dx + C$ ist für V^n V_n zu setzen, $V_1 = -\frac{1}{2}$, $V_{2n+1} = 0$ $(n > 0)$, $V_{2n} = (-1)^{n-1} B_n$, wo B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet. Dieser Summe werden die beiden Formen gegeben:

$$C + \int \varphi(x)dx + V^1\varphi(x) + \frac{V^2}{2!}\varphi'(x) + \frac{V^3}{3!}\varphi''(x) + \cdots,$$

$$C + x\varphi(V) + \frac{x^2}{2!}\varphi'(V) + \frac{x^3}{3!}\varphi''(V) + \cdots.$$

Im Anschluss daran werden verschiedene speciellere Formeln hergeleitet, in denen x durch $x-\frac{1}{2}$, $x-\frac{1}{3}$, $x-\frac{1}{4}$, ... ersetzt ist.

In der Formel $\Sigma(-1)^x\varphi(x)=(-1)^{x-1}\int\varphi(x+e)\,dx\,U_0+C$ bedeutet e einen Operator: $e^n U_0=U_n$; $U_0=0$, $U_1=\frac{1}{2}$, $U_{2n}=(-1)^n(2^{2n}-1)B_n$, $U_{2n+1}=0$ $(n>0)$. Dann wird $\Sigma(-1)^x\varphi(x)$ nach $x-\frac{1}{2}$, $x-\frac{1}{4}$, ... entwickelt.

Für die Function $\Sigma_2\varphi(x)=\varphi(a)+\varphi(a+2)+\cdots+\varphi(x-4)+\varphi(x-2)$ werden die Reihen

$$C+\tfrac{1}{2}\int\varphi(x-1)dx-\frac{(2-1)B_1}{2!}\varphi'(x-1)+\frac{(2^3-1)B_2}{4!}\varphi'''(x-1)+\frac{(2^5-1)B_3}{6!}\varphi^{\mathrm{v}}(x-1)+\cdots$$

und $$C+\tfrac{1}{2}\int\varphi(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\frac{2B_1}{2!}\varphi'(x)-\frac{2^3B_2}{4!}\varphi'''(x)+\cdots$$

abgeleitet; entsprechende Reihen für $\Sigma_4\,\varphi(x)=\varphi(a)+\varphi(a+4)+\cdots+\varphi(x-4)$, $\Sigma_2(-1)^{\frac{1}{2}x}\varphi(x)$, $\Sigma_4(-1)^x\varphi(x)$. Diese Resultate sind enthalten in dem allgemeineren

$$\Sigma\varphi(x)=\int\varphi(x-a+e)dx\,V_0(a)+C,$$

$$\Sigma(-1)^x\varphi(x)=(-1)^{x-1}\int\varphi(x-a+e)dx\,U_0(a)+C;$$

hierin ist a constant, $e^n U_0(a)=U_n(a)$, $e^n V(a)=V_n(a)$,

$$V_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}B_1x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2x^{n-4}+\cdots,$$

$$U_n(x)=\tfrac{1}{2}nx^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2!}(2^2-1)B_1x^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(2^4-1)B_2x^{n-5}-\cdots.$$

Für $\Sigma\varphi(x)$ und $\Sigma(-1)^x\varphi(x)$ werden Entwicklungen nach $x-a$ gegeben, z. B.

$$\Sigma\varphi(x)=C+\int(x-a)\varphi(e)+\frac{(x-a)^2}{2!}\varphi'(e)+\frac{(x-a)^3}{3!}\varphi''(e)+\cdots=C+(x-a)\varphi(V(a))+\frac{(x-a)^2}{2!}\varphi'(V(a))+\frac{(x-a)^3}{3!}\varphi''(V(a))+\cdots,$$

darin ist $V^n(a)$ durch $V_n(a)$ zu ersetzen. Die V und U genügen den symbolischen Gleichungen:

$$\varphi(e)\,V_0(x) = \varphi(e-a)\,V_0(x+a),$$
$$\varphi(e)\,U_0(x) = \varphi(e-a)\,U_0(x+a).$$

Wz.

P. M. Pokrovsky. Die Euler-McLaurin'sche Summenformel und deren Anwendungen. Kiew Univ. No. 12, 1-14. (Russisch.)

Die Abhandlung reproducirt die Darstellung der betreffenden Frage in den Vorlesungen des Verf. § 1. Ableitung der Formel mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten. § 2. Zusammenstellung einiger Eigenschaften der Bernoulli'schen Functionen und Zahlen. § 3. Anwendung zur Aufstellung der Formel von Stirling. Si.

P. J. Heawood. Interpolation tables. Messenger (2) **27**, 121-128.

In vielen Fällen, wenn die ersten drei Glieder der Formel für endliche Differenzen $u_{n+x} = u_n + x\Delta u_n + \frac{1}{2}x(x-1)\Delta^2 u_n + \cdots$ mit hinreichender Genauigkeit die Zwischenwerte einer zu tabulirenden Function liefern würden, falls man jeden zehnten Wert direct berechnet hätte, dürfte es sich lohnen, bei der Ergänzung der bis auf die letzte verlangte Decimale genauen Zwischenwerte Erleichterung zu haben, ohne die Rechnung ausführen zu müssen, welche der sofortige Gebrauch jener Formel mit sich bringt. Der Verf. zeigt, dass einige sehr einfache Hülfstafeln in dieser Hinsicht wirksame Unterstützung in Fällen liefern, wenn die endlichen Unterschiede der genau vervollständigten Tafel nicht zu rasch sich ändern. Lp.

C. A. Laisant. Une remarque sur l'interpolation. Assoc. Franç. St. Étienne **26**, 86-90.

Angabe eines Verfahrens zur Bestimmung einer Function von x, die für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegebene n Werte annimmt, deren Ableitung für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegebene n Werte annimmt, und die endlich für $x = x_{n+1}$ den Wert y_{n+1} hat. Es folgen Bemerkungen über Verallgemeinerungen dieser Aufgabe und Zahlenbeispiele. Lp.

E. Pascal. Repertorio di matematiche superiori. (Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici.) Volume I: Analisi. Milano: XVI + 642 S. 12mo.

W. Jochnik. Det vigtigaste af algebraiska Analysen. Stockholm. 93 S. 8°.

Kapitel 2.
Besondere Reihen.

Sidonio B. C. da Silva Paes. Series de numeros. Coimbra.

Dieses Büchlein enthält eine didaktische Darstellung der elementaren Theorie der Reihen. Tx. (Lp.)

A. Leman. Beiträge zum mathematischen Unterricht in den Oberklassen. Pr. (No. 552) Oberrealsch. Mülhausen i. E. 32 S. 4°. Mit 1 Taf.

I. Zur Methode der unbestimmten Coefficienten bei Reihenentwicklungen. Die alte Polemik gegen den üblichen Beweis (Nullsetzen des Arguments) des Satzes, dass eine Reihe identisch verschwindet, falls sie für jeden Wert der Variable verschwindet; Verf. schlägt vor, die Reihe erst auf n Glieder zu beschränken und dann $n=\infty$ werden zu lassen.

II. Die Elemente der neueren Geometrie in vorzugsweise analytischer Behandlung. Für die speciellen Bedürfnisse der Anstalt werden die Involution auf der Geraden und die Anwendungen auf die Sätze von Desargues und Pascal dargestellt. R. M.

G. A. Gibson. The treatment of arithmetic progressions by Archimedes. Edinb. M. S. Proc. **16**, 2-12.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Punkte in der Behandlung arithmetischer Reihen bei Archimedes. Ein merkwürdiges Versehen in den „Konoiden und Sphäroiden“ (Prop. 21) wird angezeigt, und auf eine von Zeuthen gemachte Bemerkung („Kegelschnitte im Altertum“, S. 450) über die Archimedische Behandlung des Ellipsoids wird Bezug genommen. Gbs. (Lp.)

Th. Harmuth. Ueber die Darstellung von ganzzahligen Factoriellen und Potenzen durch Producte gemischter Zahlen. Pr. (No. 65) Königl. Wilhelms-Gymn. Berlin. 8 S. 4°.

I. $$(2n)! = 1\tfrac{1}{2}.1\tfrac{1}{3}.3\tfrac{3}{4}.3\tfrac{1}{5}.5\tfrac{5}{6}.5\tfrac{1}{7}\dots \cdot\left(2n-1+\frac{2n-1}{2n}\right)\left(2n-1+\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$(2n+1)! = 2\tfrac{2}{3}.2\tfrac{1}{4}.4\tfrac{4}{5}.4\tfrac{1}{6}.6\tfrac{6}{7}.6\tfrac{1}{8}\dots \cdot\left(2n+\frac{2n}{2n+1}\right)\left(2n+\frac{1}{2n+2}\right),$$

ähnliche Formeln für

$$[(2n)!]^2,\quad [(2n+1)!]^2,\quad (2n)!,\quad a(a+3),\quad a(a+2)(a+4),$$
$$a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5), \dots.$$

$$\text{II.}\qquad n^2 = \left(n-1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(n+1+\frac{1}{2n-1}\right),$$

$$n^3 = \left[n(n-1)+\frac{n}{2n+1}\right]\left[n+1+\frac{1}{2n-1}\right],$$

$$n^4 = \left[n(n-1)+\frac{n}{2n+1}\right]\left[n(n+1)+\frac{n}{2n-1}\right],$$

$$(kn)^2 = \left[kn^2+1+\frac{1}{kn^2-1}\right]\left[k-1+\frac{n^2-1}{n^2}\right].$$

Wz.

Ch. H. Kummell. A binomial theorem, expressed in form of a factorial, which is always convergent. Annals of Math. **12**, 60-64.

Beweis der Formeln:

$$(a^n \pm b)^{\frac{1}{n}} = a\left[1\pm\frac{x}{n}\right]\left[1-\frac{x_1}{n}\right]\left[1-\frac{x_2}{n}\right]\cdots\left[1-\frac{x_{m-1}}{n}\right](1-x_m)^{\frac{1}{n}},$$

wo

$$x = \frac{b}{a^n} \qquad \text{und} \qquad x_1 = 1-\left[1\pm\frac{x}{n}\right]^{-n}(1\pm x),$$

$$x_2 = 1-\left[1-\frac{x_1}{n}\right]^{-n}(1-x_1), \ldots, x_m = 1-\left[1-\frac{x_{m-1}}{n}\right]^{-n}(1-x_{m-1})$$

ist, und

$$(a^n \pm b)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{na_1^{n-1}}\,\frac{1}{na_2^{n-1}}\cdots\frac{1}{na_{m-1}^{n-1}}(a_m^n - b_m)^{\frac{1}{n}},$$

wo

$$a_1 = na^n \pm b,\ b_1 = a_1^n - (na^{n-1})^n(a^n\pm b),$$
$$a_2 = na_1^n - b_1,\ b_2 = a_2^n - (na_1^{n-1})^n(a_1^n - b_1), \ldots$$

ist. Wz.

A. Brambilla. Una sorgente di identità numeriche. Periodico di Mat. **13**, 212-217.

Empfiehlt die Factoriellen in der Bezeichnung

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$$

zur Entwickelung von Identitäten als nützliche Uebungsaufgaben und führt dies an einer Reihe von hübsch gebildeten Beispielen durch. Vorbilder hierzu findet man u. a. in Cauchy's Résumés analytiques, Turin, 1833. Lp.

A. Schiappa Monteiro. Sur une question relative à un produit de quantités complexes. Lisboa Jorn. (2) **5**.

Lösung der folgenden, von Catalan gestellten Aufgabe. Das Product:

$$(1+xi)(1+x^2i)(1+x^4i)(1+x^8i)\ldots$$

$(i=\sqrt{-1})$ auf die Gestalt $P+Qi$ zu bringen und zu zeigen, dass im Falle einer unendlichen Anzahl von Factoren $P^2+Q^2=1/(1-x^2)$ ist $(x<1)$. Tx. (Lp.)

A. Schiappa Monteiro. Note sur un théorème relatif à la série harmonique. Lisboa Jorn. (2) 5.

Lösung der im Jahre 1897 im Journal von de Longchamps gestellten Aufgabe: Zu beweisen, dass $(n-1)!\sum_2^n \frac{1}{n-1}$ durch n teilbar ist (n ungerade). Tx. (Lp.)

Ch. Hermite. De la sommation d'une série considérée par Abel. Kasan Ges. (2) 8_1, 107-108.

Die Reihe $\Sigma_n\varphi(n)x^n$ ($\varphi(n)$ ein Polynom m^{ten} Grades in n) wird leicht mit Hülfe der Euler'schen Transformation $y=x/(1-x)$ bestimmt; führt man $1/x$ statt x ein, so bekommt man die Identität $\Sigma_n A_n x^{-n-1}\equiv\Sigma_n\Delta^n A_0(x-1)^{-n-1}$. Analog ist die zweite Identität: $\Sigma_n(A_n-A_0)(x-1)^n/n\equiv\Sigma_n x^{-n}\Delta^n A_0$. Si.

S. Pincherle. Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 185-193.

Durch die Formeln

$$A(x^n)=x^n(1+a_{n.1}x+\cdots+a_{n.p-1}x^{p-1}+a^p),\quad \lim_{(n=\infty)} a_{n.i}=a_i$$

und

$$A^{-1}(x^n)=(b_{n.n}+b_{n.n+1}x+\cdots+b_{n.n+\nu}x^\nu)x^n,\quad AA^{-1}(x^n)=x^n$$

werden die Operationen A und A^{-1} erklärt; ζ sei der grösste unter den Moduln der Wurzeln der Gleichung $1+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{p-1}y^{p-1}+y^p=0$. Durch eine Potenzreihe Σg_nx^n, welche in einem um den Nullpunkt mit einem Radius, der grösser als ζ ist, beschriebenen Kreise convergirt, sei eine Function S definirt. Durch Anwendung der Operation A^{-1} auf die Potenzreihe Σg_nx^n entstehen im allgemeinen Functionen, die in dem um den Nullpunkt mit dem Radius ζ beschriebenen Kreise Singularitäten besitzen; nur dann sind die dadurch erzeugten Functionen in diesem Kreise frei von Singularitäten, wenn die Reihe Σg_nx^n der Bedingung $\Sigma g_nl_n=0$ genügt; hierin bedeutet $l(n)$ das Integral der linearen Gleichung mit endlichen Differenzen

$$l(n)+a_{n.1}l(n+1)+\cdots+a_{n.p-1}l(n+p-1)+l(n+p)=0.$$

Wz.

J. W. L. Glaisher. On the sums of the series $1^n+2^n+\cdots+x^n$ and $1^n-2^n+\cdots\pm x^n$. Quart. J. **30**, 166-204.

In dieser Abhandlung benutzt der Verf. verschiedene Summationsformeln, welche er in einer früheren Abhandlung (General summation-formulae in finite differences, Quart. J. **29**, 303-328) abgeleitet hatte, um für die Reihen $1^n+2^n+3^n+\cdots+x^n$ und $1^n+2^n+3^n-\cdots+(-1)^{x-1}x^n$ Summationsformeln aufzustellen, welche bez. nach Potenzen von x^2+x, $x+\frac{1}{2}$, $x+a$ und x^2+2ax geordnet sind. Für die bei den einzelnen Potenzen der verschiedenen Entwicklungen auftretenden Zahlencoefficienten ergiebt sich eine grosse Anzahl von Relationen. Hau.

J. W. L. Glaisher. Note on a theorem relating to sums of even powers of the natural numbers. Messenger (2) **28**, 29-32.

Setzt man $S_n = 1^n+2^n+3^n+\cdots+x^n$, so ist, wie der Verf. in Messenger (2) **20**, 120-128 (F. d. M. **22**, 269, 1890) gezeigt hat:

$$S_{2n} = (x^2+x)\{P_2 S_{2n-2}+P_4 S_{2n-4}+\cdots P_{2n-2}S_2+P_{2n}(x+\tfrac{1}{2})\},$$

wo die Werte der P die a. a. O. gegebenen Ausdrücke bezeichnen. In der gegenwärtigen Note drückt der Verf. die P auf eine verschiedene Art aus.

Die Werte sind:

$$P_{2n} \;\;= (-1)^{n-1}\,(2n+1)B_n,$$
$$P_{2n-2} = (-1)^{n-1}\{(2n+1)B_n-(2n+1)_3 B_{n-1}\},$$
$$P_{2n-4} = (-1)^{n-1}\{(2n+1)B_n-(2n+1)_3 B_{n-1}+(2n+1)_5 B_{n-2}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo $(2n+1)_r$ die Anzahl der Combinationen von $2n+1$ Elementen zur Klasse r bedeutet, B_r die r^{te} Bernoulli'sche Zahl. Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. Classes of recurring formulae involving Bernoullian numbers. Messenger (2) **28**, 36-79.

In vielen der sehr zahlreichen recurrenten Formeln für die Bernoulli'schen Zahlen sind die eingehenden Grössen nicht schlechthin die Bernoulli'schen Zahlen B_n, sondern die Ausdrücke $(2^{2n}-1)B_n$, $(2^{2n-1}-1)B_n$, $(3^{2n}-1)B_n$ u. dergl. m. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, dass viele Klassen dieser recurrenten Formeln nicht diesen besonderen Ausdrücken eigentümlich angehören, sondern zu Relationssystemen zu rechnen sind, welche zu einer beliebigen Grösse von folgender Gestalt in Beziehung stehen:

$$(a^{2n-1}-1)(b^{2n-1}-1)(c^{2n-1}-1)\ldots B_n,$$
$$(a^{2n}-1)(b^{2n}-1)(c^{2n}-1)\ldots B_n,$$
$$(\lambda a^{2n}-1)(\mu a^{2n}-1)(\nu a^{2n}-1)\ldots B_n.$$

So wird unter anderem gezeigt, dass, wenn

$$F_n(a, b, c) = (a^{2n-1}-1)(b^{2n-1}-1)(c^{2n-1}-1)B_n$$

gesetzt ist, dann die Beziehung gilt:

$$(n+1)_2 x^{n-1} F_1(a, b, c) - (n+1)_4 x^{n-3} F_2(a, b, c) + \cdots$$
$$= \frac{1}{abc}\Big\{(a-1)(b-1)(c-1)x^{n+1} - abc\,V_{n+1}(x)$$
$$+ a^{n+1}bc\,V_{n+1}\left(\frac{x}{a}\right) + \cdots - a(bc)^{n+1}V_{n+1}\left(\frac{x}{bc}\right) - \cdots$$
$$+ (abc)^{n+1}V_{n+1}\left(\frac{x}{abc}\right)\Big\}.$$

Hierin sind die Grössen x, a, b, c unbeschränkt; $V_n(x)$ ist die Bernoulli'sche Function, und $(n+1)_r$ ist die Anzahl der Combinationen von $n+1$ Elementen zur Klasse r. Eine ähnliche Formel gilt auch für

$$\varphi_n(a, b, c) = (a^{2n}-1)(b^{2n}-1)(c^{2n}-1)B_n.$$

Diese Formeln werden für die Fälle erörtert, dass x eine ganze Zahl ist, von der a, b, c Divisoren sind; ferner dass x ein Bruch ist und nur zwei der Factoren a^r-1, b^r-1, ... darin enthalten sind, wo a und b besondere Zahlwerte haben.

Diese letzteren Werte sind:

$$\alpha_n = 2(2^{2n}-1)B_n,\quad \beta_n = 2(2^{2n-1}-1)B_n,\quad \delta_n = 3(3^{2n-1}-1)B_n,$$
$$\varepsilon_n = 3(2^{2n-1}-1)(3^{2n-1}-1)B_n,\quad \zeta_n = (2^{2n}-1)(3^{2n-1}-1)B_n,$$
$$\eta_n = \tfrac{3}{4}(2^{2n-1}-1)(3^{2n}-1)B_n,$$
$$\gamma_n = \tfrac{3}{4}(3^{2n-1}-1)B_n,\quad \theta_n = \tfrac{1}{4}(2^{2n}-1)(3^{2n}-1)B_n.$$

Dieselben kommen als Coefficienten vor in den Entwickelungen von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, $x/\sin x$, $3x\cos\frac{1}{2}x/\sin\frac{3}{2}x$, $3x\cos 2x/\sin 3x$, $\sin\frac{1}{2}x/\cos\frac{3}{2}x$, $\sin x/(2\cos 2x+1)$, $\sin x/(2\cos x+1)$, $\sin x/(2\cos x-1)$.

Glr. (Lp.)

D. Sintzow. Bemerkung über Bernoulli'sche Zahlen. Kasan Ges. (2) 8_1, 104-106. (Russisch.)

Die von A. A. Masing (Mosk. Math. Samml. **16**) als neu angegebenen Recursionsformeln für Bernoulli'sche Zahlen sind schon bekannt. Die eine wird gewöhnlich Formel von Lepaige genannt, stammt aber von Euler (Inst. calc. diff.), die andere von Gohierre de Longchamps. Si.

E. Grigoriew. Bernoulli'sche Zahlen höherer Ordnungen. Kasan Ges. (2) 7_1, 146-202. (Russisch.)

Bernoulli'sche Zahlen $B_{\varrho^n} = \left[D_z^n\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p\right]_{z=0}$ werden als Functionen von p betrachtet [Vgl. Ed. Lucas in S. M. F. Bull **6**; F. d. M. **10**, 191, 1878 und Sintzow in Kasan Ges. (1) **8**; F. d. M.

22, 443, 1890], deren Ableitungen und endliche Differenzen nach p, durch dieselben Zahlen ausgedrückt, neue Recursionsformeln und Methoden zur Berechnung der Coefficienten der Polynome $\psi_n(p) = (-2)^n B_{p,n}$ geben. Eine Tabelle der ersten 15 Polynome schliesst die Abhandlung. Eine Reihe der Functionen wird betrachtet, deren Entwicklungscoefficienten von $B_{p,n}$ abhängen. So die Potenzen der trigonometrischen Functionen. Besonders sei erwähnt die Entwicklung

$$\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^p = 1+\Sigma_k \frac{p}{p+k} B_{p+k,k}\frac{x^k}{k!}.$$

Da die $B_{p+k,k}$ durch $p+k$ teilbar sind, so ist $\frac{p}{p+k}B_{p+k,k}$ ein Polynom k^{ten} Grades in p. Si.

L. Saalschütz. Zur Zerlegung in Partialbrüche nebst einem Zusatz über Ausdrücke für Sinus- und Cosinus-Potenzen. Monatsh. f. Math. **9**, 132-150.

Um die Function $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)[(x-b)^2+a^2]^n}$ in Partialbrüche zu zerlegen, wird $x-b=v$, $z=v^2+a^2$, $\psi(v) = f(v+b):\varphi(v+b)$ und

$$\frac{\psi(v)}{(v^2+a^2)^n} = \frac{\alpha_0+\beta_0 v}{z^n}+\frac{\alpha_1+\beta_1 v}{z^{n-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}v}{z}+F(v)$$

gesetzt. Durch Multiplication mit z^n folgt hieraus:

$$\text{(I)}\qquad \psi(v) = \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k+\beta_k v)z^k+z^n F(v).$$

Setzt man $\psi(ai) = \lambda_0+\mu_0 i$, so ergiebt sich für $v=ai$ durch Vergleichung der Coefficienten $\alpha_0=\lambda_0$, $a\beta_0=\mu_0$; wird $\psi^{\nu}(ai) = \lambda_\nu+\mu_\nu i$ gesetzt, so werden durch fortgesetzte Differentiirung der Gleichung (I) für α_h und β_h die Darstellungen gewonnen ($h \geqq 1$):

$$(2a)^{2h}\alpha_h = \frac{1}{h}\Bigg[(2a)(2h-2)_{h-1}\frac{\mu_1}{1!}-2(2a)^2(2h-3)_{h-1}\frac{\lambda_2}{2!}$$

$$-3(2a)^3(2h-4)_{h-1}\frac{\mu_3}{3!}+\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{h-1}{2}}h(2a)^h\frac{\mu_h}{h!}, & \text{wenn } h \text{ ungerade ist;}\\ (-1)^{\frac{h}{2}}h(2a)^h\frac{\lambda_h}{h!}, & \text{wenn } h \text{ gerade ist.}\end{cases}$$

$$(2a)^{2h}a\beta_h = (2h)_h\mu_0-(2h-1)_h\frac{(2a)\lambda_1}{1!}-(2h-2)_h\frac{(2a)^2\mu_2}{2!}$$

$$+(2h-3)_h\frac{(2a)^3\lambda_3}{3!}-\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{h+1}{2}}\frac{(2a)^h\lambda_h}{h!}, & \text{wenn } h \text{ ungerade ist,}\\ (-1)^{\frac{h}{2}}\frac{(2a)^h\mu_h}{h!}, & \text{wenn } h \text{ gerade ist.}\end{cases}$$

Als Beispiel wird

$$y = 1 : (x^2+4)^2(x^2+4x+9)^2(x^2-2x+2)^3$$

behandelt; im Zusatz werden die Gleichungen:

$$2^h \cos^{2h-1}\varphi \sin\varphi = \frac{(2h-2)_{h-1}}{2^{h-1}} \sin 2\varphi + \frac{2(2h-3)_{h-1}}{2^{h-2}} \cos\varphi \sin 3\varphi + \frac{3(2h-4)_{h-1}}{2^{h-3}} \cos^2\varphi \sin 4\varphi + \frac{4(2h-5)_{h-1}}{2^{h-4}} \cos^3\varphi \sin 5\varphi + \cdots + h \cos^{h-1}\varphi \sin(h+1)\varphi,$$

$$2^{h-1}\cos^{2h}\varphi = \frac{(2h-2)_{h-1}}{2^{h-1}} \cos\varphi \cos\varphi + \frac{(2h-3)_{h-1}}{2^{h-2}} \cos^2\varphi \cos 2\varphi + \frac{(2h-4)_{h-1}}{2^{h-3}} \cos^3\varphi \cos 3\varphi + \frac{(2h-5)_{h-1}}{2^{h-3}} \cos^4\varphi \cos 4\varphi + \cdots + \cos^h\varphi \cos h\varphi$$

abgeleitet. Wz.

Weitere Litteratur.

A. Berger. Recherches sur les nombres polygonaux. Upsala Nova Acta (3) **17**, 38 S.

K. Bochow. Die Formeln für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen, abgeleitet an Figuren. Magdeburg: Faber. 45 S. 8°. (Aus „Jahrbuch des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg.)

K. Hullmann. Mathematische Abhandlungen. I. Die Reihen. II. Die Dreiteilung des Winkels. III. Das delische Problem. München: J. A. Finsterlin Nachf. 52 S. gr. 8°.

V. Jamet. Sur la division des polynômes entiers. Marseille Ann. **8**, 151-161.

V. Jung. Ableitung der Formel für die Summe der positiven, ganzen Potenzen der natürlichen Zahlenreihe in independenter Form. Časopis **27**, 191-198. (Böhmisch.) Sda.

J. C. Kluyver. Over de binomiale ontwikkeling. Amst. Versl. **6**, 421-432.

N. Nielsen. Undersögelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelse paa Raekker og Integraler. Kjöbenhavn Vid.-Selsk. Skr. 66 S. 4°.

G. de Rocquigny. Propositions sur les progressions arithmétiques. Mathesis (2) **8**, 57-60.

H. Oldenburg. En anmärkning angående s. k. divergenta summerbare serier. Stockh. Öfv. **55**, 157-162.

Sechster Abschnitt.
Differential- und Integralrechnung.
Kapitel 1.
Allgemeines (Lehrbücher etc.).

CH. MÉRAY. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Ouvrage honoré d'une souscription du ministère de l'instruction publique. Quatrième partie: Applications géométriques classiques. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XII + 248 S. gr. 8°.

Mit dem vorliegenden vierten Bande ist das eigenartig gestaltete Werk des verdienten Verfassers zum Abschluss gekommen. Der Ausführlichkeit gegenüber, mit welcher in den beiden ersten Bänden die originalen theoretischen Anschauungen des Verf. dargestellt sind, erscheinen die beiden letzten Bände zunächst etwas dürftig; bei näherem Lesen entdeckt man aber auch in ihnen den Stempel der Ursprünglichkeit, der dem ganzen Werke aufgedrückt ist. Das Schwergewicht liegt jedoch, wie schon durch den äusseren Umfang bekundet wird, in den urwüchsigen Gedanken, die in den beiden ersten Bänden niedergelegt sind. Der Vollständigkeit wegen verzeichnen wir die Titel der einzelnen Kapitel: I. Vorbegriffe, Rectificationen, Quadraturen, Kubaturen. II. Berührungen im allgemeinen. III. Berührungen der Oberflächen und Linien mit den Gebilden ersten Grades. IV. Einhüllende Gebilde. V. Berührungen erster Ordnung zwischen der Kugel oder dem Kreise mit gegebenen Gebilden. VI. Hervorstechende Eigenschaften der gebräuchlichen Oberflächen. VII. Berührungen höherer Ordnung zwischen einer Linie und dem Kreise oder der Kugel. VIII. Fragen bezüglich der Berührungen zweiter Ordnung zwischen einer Oberfläche und dem Kreise oder der Kugel. Anhang: Hauptformeln in Polarcoordinaten.

Wie man schon aus diesem rohen Skelette erkennt, stellt das Buch durchaus nicht eine Sammlung der Ergebnisse infinitesimaler Betrachtungen über geometrische Gebilde nach hergebrachter Schablone der

verbreiteten Lehrbücher dar. Im Gegenteil, will man die rein analytische Auffassung aller geometrischen Gebilde durch den Verf. kennen lernen, so muss man das klassische Vorwort von über sechs Seiten lesen, in dem die Anschauungen lapidarisch niedergelegt sind; dasselbe verdient eine Verbreitung über den Leserkreis hinaus, welcher die Leçons nouvelles in die Hand erhält.

Um den Geist desselben zu zeigen, setzen wir eine Stelle hierher: „Kann ich auch nicht, ohne meinen Lesern die tödlichste Langeweile zu verursachen, die hauptsächlich auf die Stetigkeit der geometrischen Gebilde gegründeten Schlussfolgerungen einzeln zerpflücken, um sie in ihrer heillosen Nacktheit zu zeigen, so wird mir der Nachweis leicht sein, dass es auch hier noch genügt, die Dinge nicht eigensinnig anders sehen zu wollen, als sie sind; auf die gewollte Schöpfung der Wahrheit aus dem Nichts zu verzichten, wenn man auch nicht den Beweisen die Kürze der euklidischen Elemente giebt, so doch wenigstens dieselbe Festigkeit und Klarheit. Die geometrischen Theorien würden ohne die Rechnung mit der Zahl nicht existiren, die ihre Notwendigkeit schon unter der knospenartigen Gestalt der Proportionen des „dritten Buches" gezeigt hat; die noch früher sich offen aufdrängt, da sie allein die wechselseitige Verknüpfung der verschiedenen Teile eines Gebildes anders als in situ ermöglicht. Nun aber sind die Rechnungsarten die Quelle der Functionen, die ihrerseits sie zusammenfassen und einordnen, und ausser einigen leidigen Traumgespinsten, aus denen noch nichts emporgestiegen ist, sind die Functionen als Polynome oder Potenzreihen erfunden worden. Das ist nach einigen sehr schnell aus dem Gesichte verlorenen speciellen Axiomen die wahre Quelle der geometrischen Wahrheiten, die, zu welcher man immer wieder aufsteigen kann, ohne je in die Irre zu gehen; welche sie alle liefert, indem sie zugleich die Erklärung ihrer Existenz mit sich bringt. Der bündigen Entwickelung dieses Gedankens sind die folgenden Seiten vornehmlich gewidmet, und ich werde nach meiner Meinung meine Mühe nicht umsonst aufgewandt haben, wenn ich für denselben mit Erfolg Raum geschaffen habe." Lp.

E. Czuber. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band. Mit 112 Figuren im Text. XIII u. 526 S. Zweiter Band. Mit 78 Figuren im Text. IX u. 428 S. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°.

Die „Vorlesungen" sind zunächst für technische Hochschulen bestimmt; als Lehrer der Mathematik an der technischen Hochschule zu Wien hatte der Verf. Gelegenheit, die besonderen Bedürfnisse dieser Bildungsanstalten zu studiren. Weshalb gerade für technische Hochschulen die gangbarsten Werke über Differential- und Integralrechnung verfasst sind, denen sich das zu besprechende anreiht, dies erklärt sich wohl daraus, dass der Bedarf an ihnen wegen der hohen Besuchsziffer der Studirenden dieser Hochschulen ungemein gross ist, aber auch dass für die Lehrer derselben die zwingende Notwendigkeit vorliegt, zum

Zwecke der grösstmöglichen Zeitersparnis und allgemeiner Verständlichkeit auf die Gestaltung des Vortrages die grösste Aufmerksamkeit zu verwenden.

Nach der Gepflogenheit der einführenden Werke hat Czuber die Betrachtung auf die Functionen reeller Variabeln beschränkt (mit Ausnahme von Bd. **1**, IV, § 4), und gegenüber den neuerdings oft ausgesprochenen Wünschen, die Integralrechnung möglichst früh neben der Differentialrechnung zu beginnen, hat er es ferner bei der aus den französischen Lehrbüchern her bekannten Praxis bewenden lassen, in dem ersten Bande des Werkes zunächst die ganze Differentialrechnung mit ihren geometrischen Anwendungen zu erledigen, danach im zweiten Bande die Integralrechnung zu vereinigen. Ueberdies tritt der vorwiegend pädagogische Charakter, dem das weit verbreitete Kiepert'sche Lehrbuch unzweifelhaft seine grossen Erfolge verdankt, in dem Czuber'schen Werke mehr zurück, und die rein wissenschaftliche Haltung springt dafür in die Augen, ohne dass jedoch die didaktische Seite dadurch vernachlässigt ist. Die geometrischen Anwendungen nehmen ja einen breiten Raum ein, und gelegentliche Zahlenbeispiele dienen ebenfalls zur Veranschaulichung des Vortrages. Der systematische Aufbau, das Streben nach Anschluss an die der modernen Functionenlehre gemässe strengere Auffassung der Begriffe ist schon aus der allgemeinen Einteilung des Inhaltes ersichtlich.

Erster Band: 1. Variable und Functionen, 2. Differentiation von Functionen einer Variable, 3. Differentiation von Functionen mehrerer Variablen, 4. Reihen, 5. Maxima und Minima der Functionen, 6. Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Curven und Flächen.

Zweiter Band: 1. Grundlagen der Integralrechnung, 2. unbestimmte Integrale, 3. einfache und mehrfache bestimmte Integrale, 4. Anwendung der Integralrechnung, 5. Differentialgleichungen (einschliesslich der Variationsrechnung und der partiellen Differentialgleichungen).

Der kenntnisreiche Geist aber, der das Ganze beherrscht, zeigt sich überall, wo man an ein näheres Studium des Werkes geht, auf welches die streng abgemessene Fassung der Stolz'schen Grundzüge der Differential- und Integralrechnung nicht ohne Einfluss geblieben ist. Die Reichhaltigkeit des Inhaltes tritt besonders in dem Abschnitte über die geometrischen Anwendungen hervor, der im ersten Bande 223 Seiten, also mehr als zwei Fünftel des ganzen Bandes, einnimmt. Mit grosser Umsicht und mit genauem Eingehen auf einzelne Besonderheiten sind hier die betreffenden Untersuchungen durchgeführt, und die sieben Paragraphen über die Raumcurven und krummen Oberflächen (S. 415—524) geben einen Abriss dieser Theorie, der für eine erste Kenntnisnahme recht vollständig ist und mehr enthält, als auf einer technischen Hochschule in dem allgemeinen Colleg hierüber gegeben werden kann. In der Integralrechnung sind den Anwendungen im vierten Abschnitt 80 Seiten gewidmet, davon in § 5 der Massenanziehung und dem Potential 20 Seiten. Im Gegensatz zu dieser Vollständigkeit vermisst Ref. manche Anwendungen auf die Theorie der Gleichungen, die der Verf. wohl

einer Vorlesung über Algebra zuweist; für diese ist jedoch an technischen Hochschulen kein besonderer Raum vorhanden. Wenn ferner Ref. an einzelnen Stellen, wie z. B. bei der Aufsuchung der Asymptoten ebener Curven, eine leichtere, flüssigere Darstellungsform gewünscht hätte, so standen vielleicht sachliche Bedenken entgegen, die den Verf. zu minutiösen Unterscheidungen nötigten. Auf Einzelheiten einzugehen, die verbesserungsfähig sind, muss sich Ref. wegen Mangels an Raum versagen. Lobend zu erwähnen ist das alphabetische Sachregister am Ende des zweiten Bandes, eine Einrichtung, die leider den meisten Lehrbüchern zu fehlen pflegt.

Das Verzeichnis der am Schlusse des ersten Bandes abgedruckten Litteratur, die der Verf. „bei der Ausarbeitung der Vorlesungen vornehmlich zu Rate zog", lässt die englischen Werke über den Gegenstand vermissen, abgesehen von dem Buche „Higher Mathematics" von Merriman und Woodward, das ja einen Ergänzungscursus darstellt. Dies scheint dem Ref. bedauerlich; denn obgleich der ausschliesslich auf das Praktische und Brauchbare gerichtete Sinn der englischen Lehrbücher unserer Gewöhnung nicht zusagt, so wird doch gerade von unseren Ingenieuren, die im praktischen Leben stehen, eine erhöhte Rücksichtnahme auf die unmittelbar zu machenden Anwendungen in dem mathematischen Unterrichte gefordert, und es wäre interessant gewesen, zu sehen, wie Czuber dieser Richtung Rechnung getragen haben würde. Von weiteren bezüglichen Werken ist ferner unter anderen Worpitzky's Lehrbuch (Berlin 1880) nicht erwähnt, das in höchst eigenartiger und durchaus selbständiger Weise gleichzeitig die Differentiation und die Integration der einzelnen Functionsklassen behandelt und wegen seiner originalen Betrachtungen eine grössere Beachtung verdient, als ihm meistens zu Teil wird.

Um aber nicht die Meinung zu erwecken, als solle das vorliegende Buch durch die vorangehenden Bemerkungen herabgesetzt werden, wollen wir zum Schlusse auf das anerkennende Urteil zurückkommen, das wir an den Anfang der Anzeige gesetzt haben. Wir halten das neue Lehrbuch kraft seiner inneren Tüchtigkeit für sehr geeignet, den Studenten der technischen Hochschulen und der Universitäten ein zuverlässiger Führer in das Gebiet der Infinitesimalrechnung zu sein; es bereitet die strenge Fassung der Begriffe vor und bringt in nicht schwieriger Vortragsweise einen reichen Stoff so zur Darstellung, dass die Anwendung desselben sofort geschehen kann. Lp.

Angelo Genocchi. Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisirte deutsche Uebersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. Erste Lieferung. Leipzig: B. G. Teubner. 224 S. 8°.

Die von Genocchi an der Turiner Universität gehaltenen Vorlesungen, welche noch bei Lebzeiten des scharfsinnigen italienischen

Mathematikers, aber ohne seine Mitwirkung in der Peano'schen Bearbeitung erschienen, wurden sogleich nach ihrer Veröffentlichung mit grossem Beifalle aufgenommen. Man vergleiche die Anzeige in F. d. M. **16,** 223, 1884, wo der wegen seiner gleichen strengen Geistesrichtung hochgeschätzte Stolz die Anzeige lieferte; ebenso in Darboux Bull. (2) **9,** 170-172, wo es heisst: Der Verf. befasst sich vor allem mit dem Ursprunge der Begriffe, auf welche man beim Eintritt in die Mathematik stösst. So beleuchtet er den Begriff der rationalen und irrationalen Zahlen, indem er diese letzteren nach Art der Deutschen und besonders von Dedekind definirt durch Anwendung der Einteilung der Gesamtheit der rationalen Zahlen in zwei Klassen; jede Zahl der einen Klasse ist kleiner als jede Zahl der anderen. Ebenso präcisirt der Verf. in zahlreichen an die Spitze des Buches gestellten Noten die genauen Bedingungen, unter denen gewisse, im Verlaufe des Vortrags bewiesene Sätze gültig sind. Mit einem Worte, er strebt überall nach Präcision sowohl in den Fassungen der Sätze als auch in den Beweisen. Man freut sich, dass diese wohl definirten Begriffe beim Unterrichte die zu dehnbaren Vorstellungen verdrängen, die man dabei zuweilen vorfindet. — Es ist daher gerechtfertigt, dass auf Anregung von A. Mayer (Leipzig) und J. Knoblauch (Berlin) ein derartiges Werk in deutscher Uebersetzung der deutschen studirenden Jugend geboten wird. Lp.

Ch. Sturm. Lehrbuch der Analysis (Cours d'analyse). Uebersetzt von Theodor Gross. Zweiter Band. Berlin: Fischer's technologischer Verlag, M. Krayn. VIII und 351 S. gr. 8°.

Bei der Anzeige der Uebersetzung des ersten Bandes (F. d. M. **28,** 242, 1897), der, wie der vorliegende, ohne Angabe des Druckjahres auf dem Titelblatte ausgegeben ist, wurde die Bedeutung des Sturm'schen Werkes für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung während der letzten vierzig Jahre kurz geschildert; zugleich wurde aber auch leise darauf hingewiesen, dass in dieser Zeit manche Fortschritte der Wissenschaft gemacht sind, die naturgemäss in der Uebersetzung ohne eine Umarbeitung des Textes nicht hätten zur Erscheinung kommen können. Die französischen Herausgeber haben durch wenige, behutsame Abänderungen des Textes, sowie besonders durch Hinzufügung umfangreicher Noten diesem Missstande abzuhelfen gesucht; denn die neuen „Programme“ für die französischen Prüfungen verlangten die Aufnahme mancher Theorie, die bei der ersten Abfassung unberücksichtigt geblieben war. Durch Fortlassung aller dieser Noten hat der Uebersetzer nun zwar die Einfachheit und Einheitlichkeit des ursprünglichen Werkes wieder hergestellt, hat aber auch dem Leser den Einblick in die Ergebnisse mancher neueren Forschungen vorenthalten. Da der vorliegende Band nach einem kurzen Abrisse der Theorie der bestimmten Integrale eine verhältnismässig ausführliche Behandlung der totalen und partiellen Differentialgleichungen, die Krümmung der Oberflächen, die Differenzenrechnung und die Variationsrechnung enthält, auf diesen Gebieten aber,

und besonders in der Theorie der Differentialgleichungen, während der zweiten Hälfte des Jahrhunderts die Einsicht durch functionentheoretische Betrachtungen erheblich gefördert ist, so ist hier der Abstand zwischen dem gegenwärtigen Stande der Erkenntnis und der vor vierzig Jahren entstandenen Darstellung oft sehr fühlbar. Gleichwohl sind die Vorzüge des Buches gross genug, um es für den Anfänger zur ersten Einführung in die üblichen Operationen bei der Behandlung von Differentialgleichungen als durchaus brauchbar erscheinen lassen.

Zur bequemeren Uebersicht und zum praktischen Gebrauch bei Rechnungen hat der Uebersetzer auf S. 291 bis 349 eine Sammlung der wichtigsten Formeln beider Bände des Werkes zusammengestellt. Leider ist diese Sammlung mit manchen Druckfehlern behaftet, vor der Benutzung also genau zu prüfen, und die Wiedergabe ist zuweilen in einer solchen Art geschehen, dass man zum Verständnis erst wieder auf die angeführte Stelle des Textes zurückblättern muss. — Bezüglich der Uebersetzung wiederholen wir unser Urteil über den ersten Band: Die Wiedergabe der Gedanken ist bisweilen etwas frei, aber sinngemäss und gut deutsch. Einzelne Verstösse kommen ja vor, z. B. die Uebersetzung von circonférence durch Kreisumfang statt durch Kreislinie oder schlechtweg Kreis (S. 66, wo suite de paraboles besser durch Parabelschar als durch Reihenfolge von Parabeln zu verdeutschen ist). Dérivées partielles (S. 78) sind partielle Ableitungen, nicht aber partielle Differentiale; und dergleichen mehr. — Der Druck ist correcter als im ersten Bande, doch sind noch immer manche störende Fehler zu verzeichnen, so auf S. 232, wo 1. 2. 3 statt 1+2+3 steht. Die an sich gute Ausstattung hat dadurch in dem zweiten Bande gewonnen, dass die Formeln cursiv gesetzt sind, während für sie im ersten Bande Antiquaschrift angewendet war. Lp.

J. McMahon and V. Snyder. Elements of the differential calculus. Newyork, Cincinnati, Chicago: American Book Company. XIV + 337 S. 8°.

Dieses Buch gehört einer Reihe von Lehrbüchern an, die unter dem Titel: „The Cornell Mathematical Series“ unter der Oberleitung von L. A. Wait, dem „Senior Professor of Mathematics in Cornell University“ erschienen sind, und zu der auch die in dem folgenden Referate besprochene Integralrechnung von Murray gehört. „Diese Reihe ist in erster Linie für die Bedürfnisse der Studirenden des Ingenieurfaches und des Baufaches an der Cornell - Universität bestimmt; demgemäss spielen viele Aufgaben der Praxis zur Erläuterung der grundlegenden Principien früh eine wichtige Rolle in jedem ihr angehörigen Buche. Während das Bestreben bestanden hat, jeden Gegenstand in einer einfachen Art vorzutragen, so ist doch Strenge der Behandlung für wichtiger erachtet worden als Einfachheit, und somit darf gehofft werden, dass die Reihe auch allgemein den Studenten der Mathematik annehmbar sein wird. Der allgemeine Plan und viele der Einzelheiten jedes Buches wurden in Zusammenkünften des mathematischen Lehrkörpers beraten. Eine auto-

graphirte Ausgabe jedes Buches wurde für einen Zeitabschnitt als Lehrbuch in allen Klassen gebraucht, und die dabei gewonnenen Erfahrungen wurden sämtlich berücksichtigt, bevor das Werk dem Druck übergeben wurde."

Nach dieser wörtlichen Mitteilung der jedem Bande vorgedruckten Erklärung über die Entstehung der Sammlung von Lehrbüchern können wir zur Besprechung des vorliegenden Bandes kommen. Während die Grundbegriffe mit hinreichender Vollständigkeit erörtert sind, ist doch nichts hineingezogen, was nicht für die folgenden Teile des Werkes durchaus erforderlich ist. Bei der Behandlung der Entwickelung der Functionen in Reihen wird die Convergenz und die Berechnung des Restes gebührend berücksichtigt, und die Theorie wird durch eine grosse Anzahl von Beispielen beleuchtet. Das Thema der Asymptoten wird in aller Breite erörtert, damit der Student befähigt werde, die Gestalt jedes unendlichen Zweiges aus seiner angenäherten Gleichung zu bestimmen. Das Verfahren wird sowohl in diesem Kapitel wie auch in einem späteren über das Entwerfen von Curvenzügen an vielen passenden Beispielen erläutert.

Man ersieht aus diesen Bemerkungen, dass das Buch den praktischen Bedürfnissen derjenigen Studenten sich anschmiegt, für die es geschrieben ist. Bei einem Lehrbuche in englischer Sprache ist es selbstverständlich, dass eine grosse Anzahl von Uebungsbeispielen jedem Paragraphen angehängt sind. Sehr nützlich ist die Hinzufügung der Resultate am Ende des Buches in einer tabellarischen Uebersicht, ebenso auch das genaue alphabetische Sachregister. Lp.

D. A. Murray. An elementary course in the integral calculus. London: Longmans, Green, and Co. XIV + 288 S. 8°. (Newyork, Cincinnati, Chicago: American Book Company.)

Zur Einführung in die Integralrechnung scheint dieses Buch recht brauchbar zu sein. Durchweg werden geometrische Illustrationen immerfort mit gutem Bedachte benutzt, und ebenso werden Anwendungen auf verschiedenartige Aufgaben aus der Mechanik gemacht (welche letzteren zweckmässig hätten vermehrt werden können). Es würde unverständig sein, wenn man an ein Werk, wie das vorliegende, hohe Anforderungen hinsichtlich der Strenge stellen wollte. Innerhalb seines Rahmens ist es klar und tüchtig abgefasst; nach unserer Ansicht dürfte ein junger Student aus der Beschäftigung mit dem Buche grossen Nutzen ziehen. Als recht brauchbar ist das der angenäherten Integration gewidmete Kapitel zu erwähnen. Selbst ein Kapitel über die elementareren Typen von Differentialgleichungen ist hinzugefügt. (Im übrigen vergleiche man das vorangehende Referat. Lp.) Gbs. (Lp.)

W. B. Smith. Infinitesimalanalysis. Vol. I. Elementary: real variables. London: Macmillan and Co. XV + 352 S. 8°.

Dieses Werk besitzt einen grossen Vorzug, dass nämlich, während

ein löbliches Streben nach Strenge festgehalten wird, zugleich das Bemühen zu bemerken ist, die Annahmen klar zu zergliedern, auf denen die Beweise beruhen. Vom Standpunkte der Functionentheorie aus beurteilt, wäre wohl manches zu bemängeln; ein solches Urteil würde aber unbillig sein, da das Buch augenscheinlich für Anfänger bestimmt ist, die für die abstracteren, jener Theorie angehörigen Erörterungen noch nicht reif genug sind. Der allgemeine Plan des Buches ist gut, die zur Erläuterung dienenden Beispiele nicht zu schwer. Doch kommen einige Nachlässigkeiten vor und an einigen Stellen eine gewisse Unachtsamkeit im Ausdrucke, so dass die sonst klare und verständige Darstellung dadurch entstellt wird. Die Behandlung der Umkehrung von Functionen lässt einiges zu wünschen übrig, und mit der Darstellung der Bedeutung eines Differentials (§§ 97, 206) sind wir durchaus nicht einverstanden. Die Cauchy'sche Definition (die thatsächlich dieselbe ist, wie die viel früher von Robins dem Newton'schen Ausdrucke „momentum" gegebene Bedeutung) scheint viel eher den Vorzug zu verdienen. Etwas anderes kann ebenfalls nicht übergangen werden: der Verf. beliebt, eine Neuerung im Stile durchweg einzuführen, die dem englischen Gebrauche fremd ist. Eigenschaftswörter werden beständig als Hauptwörter gebraucht; z. B. „the intersections of consecutives" für „consecutive curves" (S. 44), „independents" statt „independent variables" (S. 220). Dann finden wir wieder „exponental" für „exponential", ferner „tract between points„ für „straight line joining the points", u. s. w. Manche der (hier nicht genannten) Neuerungen sind gut zu heissen, viele von ihnen verletzen aber ein englisches Ohr. Gbs. (Lp.)

E. v. Budisavljevic und A. Mikuta. Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. II. Band: Grundzüge der Differential- und Integral-Rechnung von Hauptmann Alfred Mikuta. Mit 142 Textfiguren. Wien und Leipzig: Wilhelm Braumüller. VIII u. 607 S. gr. 8°.

Die Begrenzung des Lehrstoffs in dem vorliegenden Leitfaden entspricht den Bestimmungen des Lehrplanes für die k. und k. technische Militärakademie in Wien. Als Quellen für den zu besprechenden zweiten Band werden die Werke von Herr, Kleyer, Matthiessen, Stegemann, Weber sowie die Vorlesungen von Czuber, R. v. Escherich, Gegenbauer genannt.

Die Disposition ist die folgende: I. Teil. Differential- und Integralrechnung. 1. Differentialrechnung. 2. Integralrechnung. 3. Das bestimmte Integral.

II. Teil. Anwendung der Differential- und Integralrechnung. I. Abteilung. Algebra. 1. Die Reihen. 2. Bestimmung der Werte von Ausdrücken, welche für besondere Werte der Variablen eine der unbestimmten Formen annehmen. 3. Ueber complexe Grössen. 4. Algebraische Gleichungen. 5. Maxima, Minima. II. Abteilung. Geometrie. 1. Untersuchung des Laufes ebener Curven. 2. Unebene Curven oder

Curven doppelter Krümmung. 3. Krumme Flächen. 4. Quadratur und Rectification ebener Curven. 5. Kubatur krummer Flächen. 6. Complanation krummer Flächen. 7. Kubatur und Complanation krummer Flächen in ganz allgemeinen Fällen.

III. Teil. Differentialgleichungen. 1. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung. 3. Einige Fälle der Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung.

Gemäss dem Zwecke des Buches sind die theoretischen Betrachtungen möglichst eingeschränkt; in dieser gegebenen Beschränkung ist die Darstellung klar und für Anfänger leicht verständlich. Auf eine Genauigkeit der Darstellung, die der Schärfe der Begriffe moderner Functionentheorie entspricht, darf man freilich nicht rechnen. Gelegentlich läuft auch etwas Falsches mit unter, so z. B. wenn die Reihe $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$ (S. 180) convergent genannt wird. Die Breite der Schreibweise erinnert an das Lehrbuch von Kiepert (Stegemann). Die Ausstattung ist vortrefflich. Wie für den Standpunkt der Officiere, die sich der Infinitesimalrechnung als einer Hülfswissenschaft zu bedienen haben, dürfte das Werk auch den Anforderungen der Techniker und Chemiker genügen. Lp.

F. de Heusch. Cours d'analyse. Calcul différentiel. Bruxelles: Alfred Castaigne; Paris: A. Hermann. VIII + 278 S. gr. 8⁰.

Das Buch stellt den Lehrgang des Verf. an der École militaire dar; daher wird das Gewicht nicht gerade auf die äusserste Strenge in der Entwickelung der Begriffe gelegt, als vielmehr auf baldige und umfangreiche geometrische Anwendungen. Da aber, wie auch die Vorrede sagt, die besten — natürlich französischen — Quellen zu Grunde liegen, so ist diese Darstellung der Differentialrechnung zur Einführung in die Infinitesimalrechnung und besonders in die infinitesimalen Betrachtungen der Geometrie gut geeignet. Die drei Teile sind betitelt: Theorie (S. 1-84), analytische Anwendungen (S. 85-155), geometrische Anwendungen (S. 157-270). Druckfehler (S. 271-274). —

Die beiden ersten Teile bieten zu keinen Bemerkungen Anlass. Die verhältnismässig grosse Ausdehnung des dritten Teiles rührt daher, dass derselbe die allgemeine Untersuchung der differentialen Eigenschaften der Curven und Oberflächen in ziemlicher Ausführlichkeit bringt, etwa in dem Umfange wie in den bekannten Lehrbüchern von Cournot, Duhamel und Sturm. Lp.

P. Appell. Éléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens. Cours professé à l'École centrale des arts et manufactures. Paris: Georges Carré et C. Naud. XXIV + 695 S. 8⁰.

Das vorliegende Werk ist der Redaction des Jahrbuchs nicht zugegangen; um aber das Werk des hervorragenden Gelehrten nicht bloss

mit dem Titel anzuführen, verweisen wir auf die ausführlichen Anzeigen in Darboux Bull. (2) **23,** 136-139; L'enseignement math. **1,** 66-72; Monatsh. f. Math. **10,** Lit. Ber. 32-33; Nieuw Archief (2) **4,** 158-160; Schlömilch Z. **44,** Hl. A. 153-155. Nachdem in Frankreich bisher immer der Standpunkt fest gehalten ist, dass die theoretische Ausbildung der Techniker in der Mathematik von derjenigen der Mathematiker nicht unterschieden sein dürfe, hat Appell in dem vorliegenden Buche mit dieser Tradition gebrochen und nach dem übereinstimmenden Urteile der angeführten Referate ein Werk geschaffen, das den Ansprüchen der Techniker gerecht wird, ohne die hergebrachte Eleganz der französischen Darstellung zu opfern und ohne auf wissenschaftliche Gründlichkeit zu verzichten. Lp.

FR. JUNKER. Höhere Analysis. Erster Teil. Differentialrechnung. Mit 63 Figuren. Leipzig: G. J. Göschen'sche Verlagshandlung. (Sammlung Göschen, No. 87). 192 S. 12 mo.

Das in der bekannten hübschen Ausstattung der „Sammlung Göschen" erschienene Bändchen enthält die Differentialrechnung nebst ihrer Anwendung auf die üblichen Aufgaben der Analysis und der Curventheorie, am Schluss auch auf einige Aufgaben der Mechanik. Bei der Beschränkung des Umfanges konnte die Darstellung natürlich nicht in die Tiefe gehen. So werden z. B. die Reihen von Taylor und Maclaurin nach der Methode der unbestimmten Coefficienten abgeleitet; die Reste von Lagrange und von Cauchy werden ohne Beweis (und natürlich ohne spätere Benutzung) bloss historisch angeführt. Im einzelnen liesse sich manches wohl noch bessern. So ist auf S. 125 die Definition der Asymptote einer Curve nicht vollständig; das hier gegebene Kriterium passt auf jede Parallele zu einer Asymptote. Die Aussage S. 133, dass $f''(x)$ einen Vorzeichenwechsel nur beim Durchgang durch Null erleidet, ist unrichtig, weil ein solcher Wechsel auch beim Durchgang durch Unendlich eintreten kann. So hat die Curve $x^3/a^3+y^3/b^3=1$ einen Wendepunkt in $x=a$, $y=0$, wo d^2y/dx^2 nicht Null, sondern unendlich ist. Die Zeichnung der hyperbolischen Spirale ist ganz fehlerhaft (S. 162). Die fundamentale Eigenschaft der Evolute einer Curve C, dass der Bogen der Evolute gleich der Differenz der Krümmungsradien von C ist, welche die Evolute in den Endpunkten des Bogens berühren, ist weder ausgesprochen noch bewiesen, wohl aber zur Construction der Evolvente benutzt. Bei einer neuen Auflage müsste also eine genaue Durchsicht stattfinden. Lp.

P. A. LAMBERT. Differential and integral calculus for technical schools and colleges. London: Macmillan and Co. X + 245 S. 8°.

Das Buch ist nach einem in mancher Hinsicht guten Plane verfasst und besitzt viele empfehlenswerte Eigenschaften. Die Schreibweise ist aber zu knapp, und der Verf. hätte vielleicht weiser gehandelt, wenn

er manche Gegenstände gänzlich fortgelassen hätte, die völlig über das Verständnis derjenigen Studenten hinaus gehen, für welche das Buch bestimmt ist und sich sonst als brauchbar erweisen würde.

Gbs. (Lp.)

W. Nernst, A. Schönflies. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Mit 68 im Text befindlichen Figuren. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. München und Leipzig: E. Wolff. XII und 339 S. gr. 8°.

Wenn drei Jahre nach dem Erscheinen dieses von uns in F. d. M. **26,** 300, 1895 angezeigten Lehrbuchs schon eine neue Auflage nötig geworden ist, so ist damit die Brauchbarkeit des Werkes bezeugt. Die schnelle Verbreitung erklärt sich durch die bei der ersten Besprechung von uns hervorgehobene, zweckmässige Darstellung, die von dem Leser nur einen niedrigen Stand mathematischer Vorkenntnisse verlangt und ohne hohe Ansprüche an die Arbeits- und Fassungskraft schnell zu interessanten Anwendungen führt. Je elementarer und verständlicher ein solches, von hervorragenden Gelehrten verfasstes, einführendes mathematisches Werk gehalten ist, um so lieber wird es von der grossen Menge der studirenden Jugend aufgenommen, die damit über den ersten anstrengenden Schritt fortgeleitet wird. Dazu kommt die stärkere Verbreitung der physikalischen Chemie, durch welche den heranwachsenden jungen Chemikern die Notwendigkeit einer gewissen mathematischen Vorbildung nahe gelegt wird. Mit der ersten Auflage verglichen, zeigt die zweite ein fast unverändertes Aussehen. Der Umfang ist im ganzen um 30 Seiten gestiegen, von denen 12 am Ende auf die Entwickelung der Eigenschaften der Determinanten an dem Beispiele der zwei- und dreireihigen Determinanten kommen. Ausserdem sind als Hinzufügungen zu erwähnen: wiederholte Hinweise auf den zweiten Wärmesatz, weitere naturwissenschaftliche Anwendungen der Infinitesimalrechnung und einige Beispiele aus der Theorie der Differentialgleichungen. Demnach wird diese zweite Auflage, in der auch manche kleine Mängel der ersten beseitigt sind, sich jedenfalls der gleichen freundlichen Aufnahme zu erfreuen haben.

Lp.

H. Lorentz. Elemente der höheren Mathematik. Grundlagen der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendung auf die Naturwissenschaft. Bd. I. Moskau. XXXII + 715 S. (Russisch.)

Eine von W. Scheremetevsky gelieferte russische Bearbeitung des Buches von H. Lorentz: Leerboek der differentiaal- en integraalrekening etc., Leiden 1882, welche von der Moskauer Commission für die Organisation der Hausstudien herausgegeben ist. — Einverleibt ist ein Ab-

riss der Geschichte der Entwickelung der mathematischen Analysis. (S. 80-349.) Vergl. F. d. M. **14**, 201, 1882. Si.

E. Villié. Compositions d'analyse, cinématique, mécanique et astronomie données depuis 1889 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques. Énoncés et solutions. Troisième partie. Paris: Gauthier-Villars et Fils. X + 299 S. 8°.

Bezüglich des „zweiten Teils“ dieser Sammlung verweisen wir auf F. d. M. **22**, 278, 1890. Wir bemerken in Bezug auf die Prüfung zur „Licence“, dass seit 1896 jeder licencié ès sciences in dreien aus 18 zur Auswahl gestellten Gebieten der Mathematik und Naturwissenschaften einzeln sich das Zeugnis der bestandenen Prüfung erworben haben muss, und dass für die Zulassung zum Concours d'agrégation, in welchem die an den „Lycées“ anzustellenden Professoren aus den licenciés ès sciences als Beste sich zu erweisen haben, ein Zeugnis über die bestandene Prüfung in noch einem, also viertem Fache vorzulegen ist. Dem Stande der strenge überwachten Ausbildung der Studenten in Frankreich entspricht der hohe Standpunkt und die Mannigfaltigkeit der bei den Prüfungen der „Licence“ unter Clausur in vorgeschriebener Zeit zu lösenden Aufgaben. Die nach dem Systeme absoluter Lernfreiheit ausgebildeten deutschen Candidaten dürften bei der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen im allgemeinen nicht im Stande sein, in Clausur diese Aufgaben zu lösen. Um so mehr ist es ihnen anzuempfehlen, Sammlungen wie die vorliegende durchzuarbeiten, damit sie sich neben ihrer freieren theoretischen Einsicht die praktische Gewandtheit im Gebrauche ihrer Kenntnisse erwerben.

Der erste Teil mit den Aufgaben aus der Analysis umfasst in acht Kapiteln: Quadraturen, Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen, orthogonale Trajectorien, Krümmungsradien und Krümmungslinien, asymptotische und geodätische Linien, vermischte Aufgaben, imaginäre Veränderliche. Im zweiten Teile ist diesmal die Kinematik, über welche jetzt ein besonderes Zeugnis erworben werden kann, gesondert behandelt, nämlich in drei Kapiteln: die ebene Bewegung, die Bewegung eines unveränderlichen Systems um einen festen Punkt, die allgemeine Bewegung eines unveränderlichen Systems. Es folgt als dritter Teil die Mechanik mit den drei Kapiteln: Bewegung eines Punktes, Bewegung eines starren Körpers, Dynamik der Systeme. Der vierte Teil enthält die Aufgaben aus der Astronomie.

Die Aufgaben sind innerhalb jedes Teiles mit fortlaufenden Nummern versehen, die sich an diejenigen der entsprechenden Teile des zweiten Bandes der Sammlung anschliessen. Bei jeder Aufgabe ist Tag und Ort vermerkt, wo sie gestellt ist; die Lösung ist vollständig entwickelt. Am Schlusse ist eine chronistisch geordnete Uebersicht über die in allen drei Bänden der Sammlung enthaltenen Aufgaben abgedruckt.

Es wäre gewiss sehr interessant, wenn dieser Sammlung der bei französischen Prüfungen in Clausur gelösten Aufgaben eine Sammlung der

Themata für die Hausarbeiten bei den deutschen Prüfungen für das höhere Lehramt gegenüber gestellt würde. Lp.

A. Fuhrmann. Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Erste Hälfte. Berlin: W. Ernst u. Sohn. XIX + 180 S. 73 Textfiguren. 8°.

Den beiden ersten Teilen seiner „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik" welche in den Jahren 1888 und 1890 erschienen sind [vgl. F. d. M. (1888) **20**, 272 und (1890) **22**, 277], lässt der Verf. jetzt die erste Hälfte des dritten Teiles folgen, welcher bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung enthält. Der Titel kennzeichnet aber insofern nicht genau den Inhalt, als ein grosser Teil der Aufgaben der niederen Geodäsie entnommen ist; so enthalten die ersten fünfzehn Paragraphen, welche fast die Hälfte des Buches umfassen, nur geodätische Aufgaben. Die meisten der Aufgaben sind, da sie dem praktischen Leben entnommen sind, durchaus geeignet, das Interesse der Studirenden an den Uebungen über Differentialrechnung sehr zu erhöhen. Recht wertvoll sind ferner die zahlreichen Litteraturnachweise, welche vornehmlich auf grundlegende technische Werke den Leser hinweisen und nicht nur den Studirenden, sondern auch vielen Universitätslehrern der Mathematik willkommen sein werden.

Ob es sich nicht empfehlen dürfte, bei dem hoffentlich bald erfolgenden Erscheinen der weiteren Teile dieses Werkes, bez. bei Neuauflagen die Bezeichnung als Lehrbuch in dem Titel zu streichen, möchte Referent hiermit zur Erwägung angeregt haben; das Werk ist eine sehr brauchbare Aufgabensammlung, aber kein eigentliches Lehrbuch und will seiner Natur nach ein solches auch gar nicht sein. Hau.

H. Dölp. Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. 7. Aufl. neu bearbeitet von E. Netto. Giessen: J. Ricker. 216 S. 18 Textfiguren. 8°.

Der im Jahre 1895 erschienenen sechsten Auflage der bekannten Dölp'schen Aufgabensammlung ist in dem kurzen Zeitraum von drei Jahren die siebente Auflage gefolgt, ein Beweis für die grosse Beliebtheit, deren sich diese Sammlung mit Recht erfreut; bei dieser neuen Auflage giebt auch E. Netto sein früheres Incognito auf und nennt sich als Bearbeiter. Nachdem es schon bei der vorigen Auflage gelungen war, die früher häufigeren Druckfehler auszumerzen und eine nahezu correcte Aufgabensammlung herzustellen, hat der Herausgeber bei dieser Auflage die theoretischen Erläuterungen zeitgemäss überarbeitet, wodurch dieselben an ihrer leichten Verständlichkeit nicht verloren, an Strenge der Beweisführung aber wesentlich gewonnen haben und die Brauchbarkeit des Buches bedeutend erhöht ist. Hau.

Mme W. SCHIFF. Sammlung von Uebungen und Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Teil 1. St. Petersburg. V + 202 S. (Russisch.)

Teil I dieser neuen russischen Aufgabensammlung enthält Uebungen und Aufgaben S. 1-96 aus der Differentialrechnung und deren Auflösungen (S. 131-242). Si.

G. KOWALEWSKI. Bemerkungen über einen Satz der Differentialrechnung. Schlömilch Z. **43,** 116-118.

Gauss definirte die Stetigkeit einer Function in folgendem Sinne: „Geht x von x_0 bis x_1 und nimmt y für diese beiden Werte der Veränderlichen die Werte y_0 und y_1 an, so giebt es zwischen x_0 und x_1 jedesmal einen Wert x', für welchen die Function den zwischen y_0 und y_1 gewählten Wert y' erhält.“

Die jetzt gültige Dirichlet'sche Definition der Stetigkeit ist enger, so dass eine Function, welche die von Gauss geforderte Eigenschaft besitzt, nicht in dem jetzigen Sinne stetig zu sein braucht.

Der Verf. beweist nun den Satz: „Hat eine Function $f(x)$ in dem Intervalle $(a \dots b)$ einschliesslich der Grenzen die von Gauss angegebene Eigenschaft, besitzt sie ferner an jeder Stelle im Innern des Intervalls eine bestimmte Derivirte, und ist $f(a) = f(b)$, so giebt es zwischen a und b eine Stelle ξ, an welcher die Derivirte verschwindet“, welcher Satz in der Differentialrechnung nur für stetige Functionen bewiesen wird. Beispiel einer solchen Function, welche für $x = 0$ unstetig ist. Hau.

Weitere Litteratur.

C. ALASIA. Esercizi ed applicazioni di calcolo infinitesimale ed integrale. Città di Castello: Lapi. XII u. 220 S. 8°. Vi.

W. S. HALL. Elements of the differential and integral calculus. New York: Van Nostrand. 260 S. 8°.

L. S. Considerazioni e teoremi sulla funzione proporzionalità, nel calcolo cosi elementare come differenzial ed integral. Milano: Ingegneri. 47 S. 8°.

E. PASCAL. Repertorio di matematiche superiori. Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici. Vol. I: Analisi. Milano: Hoepli. XV + 642 S. 16mo.

J. PEXIDER. Beitrag zu den Methoden der Infinitesimalrechnung. Časopis **27,** 254-256. (Böhmisch.) Sda.

A. J. STODÓLKIEWICZ. Die Principien der höheren Calcule. Zweite Auflage. Warschau 1898. 8°. (Polnisch.) Vgl. F. d. M. **26,** 223, 1896.

J. M. TAYLOR. Elements of the differential and integral calculus, with examples and applications. Revised edition. Boston: Ginn and Co. XIII + 269 S. 8°.

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

D. Sintsof. Sur les dérivées d'une fonction algébrique. Nouv. Ann. (3) **17,** 411-413.

Es sei y eine algebraische Function, welche durch die irreducible Gleichung:

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_{n-1} y + p_n = 0$$

bestimmt ist, in welcher die Coefficienten p rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sind. Bezeichnet $\varDelta$ die Discriminante der obigen Gleichung für y, so ist:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \varDelta^{-p}(a_{p,0} + a_{p,1} y + \cdots + a_{p,n-1} y^{n-1}).$$

Der Verf. zeigt nun, dass die rationalen Functionen $a_{i,k}$ explicit durch die Functionen p_i und ihre auf einander folgenden Ableitungen dargestellt werden können. Hau.

E. G. Gallop. Note on a formula in differentiation. Messenger (2) **27,** 175-176.

Die von Hobson für die wiederholte Differentiation von $\varphi(u)$ nach $x_1, x_2, \ldots, x_p$ gegebene Formel, wo $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2$ (vergl. F. d. M. **25,** 458 u. 822, 1893), kann aus der bekannten Formel für die Differentiation von $\varphi(x^2)$ nach x hergeleitet werden. Lp.

J. K. Whittemoore. A proof of the theorem $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. American M. S. Bull. (2) **4,** 389-390.

Mit Hülfe des Doppelintegrals dieser beiden Ableitungen, erstreckt über ein den betrachteten Punkt einschliessendes kleines Rechteck, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind. Lp.

M. W. Crofton. Question 13519. Ed. Times **68,** 63.

Beweis der Formel (in englischer Bezeichnung):

$$f(d/dx + d/dy)e^{xy} = e^{xy} \exp.(d/ds)^2 f(s),$$

wo $s = x + y$. Lp.

C. Roussiane. Sur les formes canoniques d'une expression différentielle $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$. Math. Ann. **50,** 247-260.

Ein Differentialausdruck

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\cdots+X_p\,dx_p$$

der p unabhängigen Veränderlichen x, in welchem $X_1, X_2, \ldots, X_p$ beliebige analytische Functionen dieser Veränderlichen sind, lässt sich stets auf die kanonische Form, und zwar entweder auf die gerade

$$F_1\,df_1+F_2\,df_2+\cdots+F_n df_n \qquad (2n \leqq p)$$

oder auf die ungerade

$$df_1+F_2\,df_2+\cdots+F_{n+1}df_{n+1} \qquad (2n+1 \leqq p),$$

in denen alle Veränderlichen von einander unabhängig sind, zurückführen, und zwar gehören zu jedem Differentialausdrucke unendlich viele kanonische Formen, welche aber sämtlich die gleiche Anzahl von Veränderlichen enthalten. Die Beziehungen, welche zwischen den Veränderlichen zweier kanonischen Formen eines gegebenen Differentialausdruckes bestehen, sind schon öfter untersucht [vgl. F. d. M. **7**, 225-231, 233, 1875]. In dieser Abhandlung leitet der Verf. diese Beziehungen, sowohl für die Veränderlichen zweier geraden, als auch zweier ungeraden Formen, nach einer neuen, recht einfachen Methode ab, welche von dem ursprünglich gegebenen Differentialausdrucke ganz unabhängig ist. Dieselbe ist noch besonders dadurch interessant, dass neue Eigenschaften der Veränderlichen kanonischer Formen benutzt werden.

Hau.

Wm. F. Osgood. The law of the mean and the limits $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Annals of Math. **12**, 65-78.

Der Verf. kritisirt das in den Lehrbüchern „gewöhnlich gegebene“ Verfahren zur Bestimmung des sogenannten wahren Wertes von unter unbestimmten Formen auftretenden Functionswerten und giebt eine strengere Behandlung dieses Gegenstandes mit Hülfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Die Kritik trifft mindestens in Bezug auf neuere deutsche Lehrbücher nicht zu, da in ihnen das vom Verf. beanstandete Verfahren nicht mehr verwendet wird; gewöhnlich wird in denselben die Taylor'sche Reihe benutzt, und da diese als eine Folge des verallgemeinerten Mittelwertsatzes erscheint, so ist das von dem Verf. gegebene Verfahren in gewissem Sinne nur ein specieller Fall des auf der Taylor'schen Reihe aufgebauten. Hau.

U. Amaldi. Sulla trasformazione di Laplace. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{7}_2$, 117-124.

Der Verf. giebt eine kurze vorläufige Mitteilung über seine Untersuchungen einer gewissen distributiven Operation, von welcher die bekannte Laplace'sche Transformation nur ein specieller Fall ist; hierbei bedient er sich der hauptsächlich von Pincherle [vgl. F. d. M. **28**, 347-349, 1897] ausgebildeten synthetischen Methode, welche von jeder analytischen Darstellung der Operation unabhängig ist. Hau.

G. Vivanti. Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 240-241.

Eine Function $f(x,y)$ der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y kann in einem Punkte O in Bezug auf jede durch ihn hindurchgehende Gerade ein Maximum, bez. Minimum besitzen, ohne dass sich um diesen Punkt O herum ein Gebiet abgrenzen lässt, für welches die Function in O einen Maximal-, bez. Minimalwert besitzt. Wie der Verf. zeigt, muss die Function in O einen Extremwert haben, wenn sie in Bezug auf jede durch O hindurchgehende Curve in O einen Extremwert derselben Art hat. Umgekehrt kann man stets eine durch O gehende Curve, für welche die Function keinen Extremwert in O hat, auffinden, wenn die Function in O keinen Extremwert besitzt. Hau.

V. v. Dantscher. Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von n Veränderlichen. Math. Ann. **51**, 227-252.

Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ an einer Stelle $a_1, a_2, \dots, a_n$, in deren Umgebung die Entwickelung der Function nach ganzen positiven Potenzen von $x_1-a_1, x_2-a_2, \dots, x_n-a_n$ mit einer semidefiniten Form beginnt, ein eigentliches Maximum oder Minimum habe, löst der Verf., ausgehend von der Grundanschauung, welche er in seiner diesbezüglichen Theorie für Functionen von zwei Veränderlichen [vgl. das Referat hierüber in F. d. M. **25**, 467-469, 1893/94] entwickelt hat.

Die gesuchten notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich aus der Betrachtung der Entwickelung:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)-f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(h_1, h_2, \dots, h_n)$$
$$= g_i(h_1, h_2, \dots, h_n)+g_{i+1}(h_1, h_2, \dots, h_n)+\cdots,$$

wo g eine gewöhnliche Potenzreihe von $h_1, h_2, \dots, h_n$ ist, g_ν eine ganze homogene Function ν^{ter} Dimension derselben Grössen, welche mit diesen zugleich verschwindet, und $h_\nu = x_\nu - a_\nu$ gesetzt ist. Dann sind bekanntlich die drei Fälle zu unterscheiden:

I. g_i ist eine definite Form (i gerade); dann ist $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein eigentliches Maximum oder Minimum, je nachdem $g_i < 0$ oder > 0 ist.

II. g_i ist eine indefinite Form; dann ist $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

III. g_i ist eine semidefinite (positive oder negative) Form; dann entscheidet das Vorzeichen von g_i allein nicht, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Der Verf. benutzt nun die folgende Ueberlegung: Ist für die Function $g(h_1, h_2, \dots, h_n)$ der Wert 0 auf jeder durch den Nullpunkt des Bereiches $h_1, h_2, \dots, h_n$ gehenden Geraden $h_\nu = \lambda_\nu \varrho$ für $\nu = 1, 2, \dots, n$ [wo ϱ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reelle Veränderliche sind und $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2 = 1$ sein soll] in dem Intervalle $-p_\lambda \leqq \varrho \leqq q_\lambda$, wo p_λ und q_λ

positive, von Null verschiedene Grössen bezeichnen, ein eigentliches Maximum, bez. Minimum, und ist die untere Grenze r der positiven Veränderlichen r_λ, welche die kleinere der beiden Grössen p_λ, q_λ bezeichnet, für den Bereich $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=1$ von Null verschieden, so ist $g(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ in der Umgebung der Stelle $0, 0, \ldots, 0$ vom Radius r durchaus negativ, bez. durchaus positiv, also $g(0, 0, \ldots, 0)$ ein eigentliches Maximum, bez. Minimum.

Setzt man nun $g(\lambda_1\varrho, \lambda_2\varrho, \ldots, \lambda_n\varrho)=\varrho^i\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \varrho)$, wo also

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \varrho)=g_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+\varrho g_{i+1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+\cdots$$

ist, so ist nur zu entscheiden, ob sich eine positive Zahl $\mathfrak{r}$ so klein angeben lässt, dass φ für alle reellen Wertesysteme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des Bereiches $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=1$ durchaus von Null verschieden ist, solange nur $0<\varrho^2\leqq\mathfrak{r}^2$ ist.

Diese Entscheidung ist in den Fällen I und II leicht allgemein zu fällen: für den Fall III, dessen Untersuchung der weitaus grösste Teil der Arbeit gewidmet ist, müssen zur Entscheidung noch Glieder g_ν von höherer als der i^{ten} Dimension herangezogen werden. Der Verf. löst diese Frage für $i=2$, wobei noch einige specielle Fälle unerledigt bleiben. Die Untersuchung dieser letzteren, sowie der Fälle, in denen $i>2$ ist, bleibt einer weiteren Abhandlung vorbehalten.

Hau.

J. Pierpont. Maxima and minima of functions of several variables. American M. S. Bull. (2) **4**, 535-539.

Darstellung der exacteren Theorie nach Peano, Scheffers, Stolz und von Dantscher, veranlasst durch den gänzlichen Mangel an Berücksichtigung dieser Theorie durch die Verf. englischer und amerikanischer Lehrbücher.

Lp.

L. Lindelöf. Recherches sur les polyèdres maxima. Acta Soc. Sc. Fennicae **24**, 47 S.

In einer früheren Arbeit [Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg **4**], welche 1869 erschienen und 1880 mit dem Steiner-Preise gekrönt worden ist, hatte der Verf. folgende zwei, bereits von Steiner vermutete, Sätze bewiesen:

Damit ein convexes Polyeder bei gegebener Oberfläche, Anzahl und gegenseitiger Neigung der Seitenflächen ein Maximum des Volumens besitzt, ist notwendig, dass es einer Kugel umbeschrieben ist. Ist die gegenseitige Neigung der Seitenflächen nicht vorgeschrieben, sondern unbestimmt, so ist ferner notwendig, dass die Kugel die Seitenflächen in ihren Schwerpunkten berührt.

In dieser neuen Arbeit untersucht der Verf. nun weiter, ob diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, damit ein Polyeder ein Maximum des Volumens besitzt. An dem speciellen Beispiele einer

dreiseitigen Pyramide, deren drei nach der Spitze laufende Kanten auf einander senkrecht stehen, zeigt der Verf. zunächst, dass dies nicht der Fall ist. In dem zweiten Abschnitte stellt er dann einige Sätze über den Schwerpunkt verschiedener Polygone und Polyeder zusammen, welche er in dem folgenden Abschnitte benutzt, um eine Reihe von Polyedern darauf hin zu untersuchen, ob sie einer Kugel, welche ihre Seitenflächen in den Schwerpunkten berührt, umbeschrieben sein können. In dem letzten Abschnitte werden dann unter denjenigen Polyedern, welche die für ein Maximum des Volumens notwendigen Bedingungen erfüllen, diejenigen bestimmt, welche thatsächlich ein solches Maximum besitzen. Hierbei beschränkt sich der Verf. auf Polyeder mit nicht mehr als sechs Seitenflächen, wobei sogar noch in der Untersuchung der Polyeder mit sechs Seitenflächen eine Lücke bleibt. Bemerkungen über die Oktaeder und Ikosaeder schliessen die Abhandlung.

Hau.

W. A. Anissimow. Ueber Höhen der grössten Beleuchtung gegebener Flächenstücke. Warschau Univ. 8, 24 S. (Russisch.)

Discussion der Aufgabe: „die Höhe des leuchtenden Punktes über dem horizontalen Flächenstück so zu bestimmen, dass die Beleuchtung die grösste sei.“ Die Aufgabe für ein unendlich kleines Flächenstück steht unter anderem bei Frenet; hier aber wird die Discussion für verschiedene endliche Flächenstücke durchgeführt. Inzwischen ist die Abhandlung in französischer Sprache in Darboux Bull. (2) **23**, 264 (1899) erschienen. Si.

H. Lüdtke. Physikalische Aufgaben über Maxima und Minima in elementarer Behandlung. Pr. (No. 388) Realgymn. Iserlohn. 21 S. 4°.

95 Aufgaben über kleinste oder grösste Entfernungen zweier Punkte, die sich auf Geraden oder Kreisen bewegen, über Balken mit grösster relativer Festigkeit, die aus einem gegebenen Stamme zu schneiden sind; über die günstigste Segelstellung bei gegebener Kursrichtung; über den Fall auf der schiefen Ebene, den Wurf, den Stoss elastischer und unelastischer Körper, elektrische Abstossung, stärkste Beleuchtung und kleinste Ablenkung des Lichtstrahls. — Den meisten Aufgaben sind die Lösungen beigegeben. Lg.

G. Baldauf. Ueber die Punkte kleinster Summe der absoluten Abstände von n Geraden. Plauen. 30 S. 4°.

Kapitel 3.
Integralrechnung.

R. Baire. Sur le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles. C. R. **126**, 1700-1703.

Um sich von der Voraussetzung der Stetigkeit der Derivirten frei zu machen, formulirt der Verf. das Integrationsproblem in folgender Weise: Es sind alle Functionen f der reellen Veränderlichen x, y zu suchen, welche nur den Bedingungen genügen, die unerlässlich notwendig sind, damit die in die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$ eintretenden Elemente eine bestimmte Bedeutung haben und die Gleichung befriedigen. Es werden in Bezug auf das so gefasste Problem verschiedene Sätze aufgestellt, von denen zum Schlusse angedeutet wird, wie sich dieselben auf Gleichungen von der Form $X(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ausdehnen lassen. Hau.

A. Hurwitz. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. Acta Math. **22**, 179-180.

Der Verf. kommt noch einmal auf seine, unter demselben Titel, in Bd. 20 der Acta Math. [F. d. M. (1897) **28**, 251-252] veröffentlichte Abhandlung zurück, um noch eine ihm erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit von Appell [F. d. M. (1891) **23**, 430-431] zu citiren, in welcher sich bereits der seiner eigenen Arbeit zu Grunde liegende Gedanke vorfindet. Die Weiterentwickelung dieses Gedankens geschieht aber in beiden Abhandlungen auf verschiedenen Wegen. Hau.

Fr. Meyer. Ueber Wechselbeziehung zwischen Integralrechnung und Geometrie. Königsb. Physik.-ökon. Ges. 1898, 5 S. 4°.

An verschiedenen Beispielen zeigt der Verf., wie sich geometrische Betrachtungen verwenden lassen, um Integralformeln herzuleiten, welche dadurch eine unmittelbar greifbare Bedeutung gewinnen. Hau.

O. Stolz. Zur Erklärung der absolut convergenten uneigentlichen Integrale. Wien. Ber. **107**, 207-224.

Im Gegensatze zu de la Vallée-Poussin, welcher die absolute Convergenz der uneigentlichen Integrale über ein endliches Gebiet, sowohl der einfachen, als der mehrfachen, auf eine neue Weise erklärt hat, zeigt der Verf., wie sich die sonst übliche, von Harnack gegebene Erklärung dieser Integrale so weit ausdehnen lässt, dass sie den allgemeinen, von de la Vallée-Poussin betrachteten Fall noch mit umfasst; hierdurch

erweist sich die bisher für die einfacheren Arten der uneigentlichen Integrale benutzte Darstellung als völlig ausreichend. Der Verf. führt die Untersuchung für die einfachen Integrale durch und zeigt zunächst, wann die Harnack'sche Erklärung mit der allgemein üblichen Cauchy'schen übereinstimmt. Nachdem er dann für die Fälle, in welchen diese Uebereinstimmung nicht vorhanden ist, ergänzende Betrachtungen gegeben hat, behandelt er eingehend die absolut convergenten einfachen Integrale.

Hau.

Ferber. L'intégration par l'itération et le calcul des fonctions itératives. Nouv. Ann. (3) **17**, 509-512.

Es ist unmöglich, der Mitteilung zu entnehmen, was dieselbe bezwecken will. Einer fast orakelhaften Kürze der Darstellung, welche es vermutlich auch bedingt hat, dass der Verf. Grössen einführt, ohne es der Mühe für wert zu halten, sie zu definiren, kommen noch einige Druckfehler zu Hülfe, um die Mitteilung völlig unverständlich zu machen.

Hau.

J. Drach. Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. Paris. 150 S. 4°. (Bericht in Abschnitt VII, Kap. 1.)

A. Rossi. Sulle integrazioni estese alle varie forme dei campi derivanti dai differenti sistemi di coordinate. Padova: Gallina. 16 S. 8°. (1897).

Kapitel 4.

Bestimmte Integrale.

G. Kowalewski. Bemerkungen zu dem Mittelwertsatze für ein System von n Integralen. Schlömilch Z. **43**, 118-120.

Verallgemeinerung des von dem Verf. in einer früheren Mitteilung [vgl. das Referat in F. d. M. (1897) **28**, 254-255] aufgestellten Mittelwertsatzes. Verhältnis dieses verallgemeinerten Satzes zu dem sogenannten zweiten (Weierstrass'schen) Mittelwertsatze. Ableitung gewisser von Tschebyscheff früher aufgestellten Integralungleichungen aus einem speciellen Falle des obigen Satzes.

Hau.

W. Kapteyn. Sur les valeurs numériques d'une intégrale définie. Nieuw Archief (2) **3**, 283-284.

Beweis, dass (für $0<\lambda<\frac{1}{4}\pi$) $J(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{arctg}(\cos p \operatorname{tg}\lambda)dp$

$$=2\left\{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{3^2}\operatorname{tg}^3\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{5^2}\operatorname{tg}^5\frac{\lambda}{2}+\cdots\right\},$$

für $\frac{1}{4}\pi < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ dagegen:

$$J(\lambda) = -J\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + \frac{\pi^2}{4} + l\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\, l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Die Werte von $J(\lambda)$ für $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, endlich $2\operatorname{arctg}(-2+\sqrt{5})$ sind in geschlossener Form durch elementare Transcendenten ausgedrückt. Lp.

GODEFROY. Sur les intégrales de Fresnel. Nouv. Ann. (3) **17**, 205-206.

Bei der üblichen Berechnung der Fresnel'schen Integrale

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx \text{ und } \int_0^\infty \cos x^2 dx$$

werden imaginäre Grössen zu Hülfe genommen, was der Verf. bei seiner Berechnung vermeidet. Setzt man in der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$x = y\sqrt{t}$, multiplicirt man dann beide Seiten der resultirenden Gleichung mit $\sin t dt$, bez. $\cos t dt$, und integrirt man in Bezug auf t von 0 bis ∞, so kann man die auf der linken Seite stehenden Doppelintegrale direct berechnen und erhält so die Werte für die rechts stehenden Fresnel'schen Integrale. Hau.

H. G. DAWSON. On the numerical value of $\int_0^h e^{x^2} dx$. Lond. M. S. Proc. **29**, 519-522.

Mit Hülfe der Formel

$$2\sqrt{\pi}\int_0^h e^{x^2} dx = \Phi_2(h) + \Psi_2(h),$$

wo

$$\Phi_2(h) = h + \frac{e^{2h} - e^{-2h}}{2e} + \frac{e^{4h} - e^{-4h}}{4e^4} + \frac{e^{6h} - e^{-6h}}{6e^9} + \cdots,$$

$$\Psi_2(h) = \frac{e^h - e^{-h}}{1} + \frac{e^{3h} - e^{-3h}}{3e^2} + \frac{e^{5h} - e^{-5h}}{5e^6} + \cdots,$$

wird das Integral $\int_0^h e^{x^2} dx$ für alle in Intervallen von 0,01 auf einander folgenden Werte von h zwischen 0 und 2 berechnet. Die Tafel ist genau bis auf 6 Decimalstellen. Hau.

M. LERCH. Ueber einige bestimmte Integrale. Časopis **28**, 32-36. (Böhmisch.)

Ausgehend von der leicht zu verificirenden Relation

$$\int_{u+w}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w\cos 2ux - x\sin 2ux}{w^2+x^2}dx,$$

beschäftigt sich die Arbeit mit gewissen sehr einfachen Integralformeln, wie z. B.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\frac{dz}{u^2+z^2} = \frac{\pi}{2u^2}(1-e^{-u}).$$

Lh.

J. Burgess. On the definite integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$, with extended tables of values. Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh **39**, II, No. 9, 65 S. Referat in Phil. Mag. (5) **46**, 165.

Die Arbeit enthält eine kurze Geschichte über frühere Berechnungen von Tafeln für den Wert des Integrals, ferner Formeln für die Neuberechnung und zwei berechnete Tafeln, deren eine von $t=0$ bis 1,250, und deren andere von $t=1{,}000$ bis 3,000 geht. Br.

P. Mansion. Sur le théorème de Jacques Bernoulli. Brux. S. sc. **22** A, 3-4.

Wenn

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^T e^{-t^2}dt - a\right\},\quad a = \int_{T'}^T e^{-t^2}dt,\ T'' = T - ae^{T^2}$$

ist, so ist auch

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T''} e^{-t^2}dt.$$

Mn.

J. Kowalczyk. Beispiele zur Ausrechnung der elliptischen Integrale erster Gattung mit Hülfe der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels. Wiad. mat. **2**, 21-31. (Polnisch.)

Th. Christen. Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges. Hoppe Arch. (2) **16**, 1-35.

Der Cauchy'sche Residuensatz wird benutzt, um verschiedene bestimmte Integrale zu berechnen. Weder die Methode noch die Resultate können als wesentlich neu bezeichnet werden. Einige der Resultate berichtigen Formeln der bekannten Laska'schen Formelsammlung; diese letztere enthält aber bekanntlich so viele Fehler, dass die Berichtigung einzelner Formeln recht bedeutungslos ist, und nur eine Neubearbeitung derselben die nötige Zuverlässigkeit geben könnte.

Warum der Verf. das französische Wort Résidu statt des allgemein üblichen Residuum gebraucht, ist nicht einzusehen, zumal im Deutschen doch kein Grund vorliegt, statt des lateinischen Wortes seine französische Umbildung zu verwenden.

Eine bessere typographische Ausstattung des Archivs würde das Lesen der in ihm enthaltenen Arbeiten wesentlich erleichtern. Hau.

W. Kapteyn. Over eenige bepaalde integralen. Amsterdam Versl. **6**, 329-335.

Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Hülfe der Formel:

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\left(l\frac{1-z}{1+z}\right)^m\frac{dz}{z} = E\frac{f(z)}{z}\left(l\frac{1-z}{1+z}\right)^m,$$

in der $f(z)$ eine im Innern des Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt als Centrum eindeutige Function der complexen Veränderlichen $z = x+iy$ bedeutet, die in diesem Bereiche keine anderen singulären Punkte als Pole besitzt. Der Integrationsweg setzt sich aus jener Kreislinie und aus zwei Kreisen mit sehr kleinen Radien zusammen, welche um die Punkte $z = \pm 1$ beschrieben sind. — Besondere Fälle: $f(z) = 1$, $(x^2+1)f(z) = z$. (Nach Revue sem. **6**$_2$, 138). Lp.

U. Dini. Una applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. Rom. Acc. L. Mem. (5) **2**, 495-545.

Die Theorie der Residuen wird hier auf die Auswertung bestimmter Integrale angewandt, deren einige in der Theorie der Kugelfunctionen vorkommen. Die Anzahl und die Länge der aufgestellten Formeln verbietet uns, näher auf den Gegenstand einzugehen. Vi.

W. Gosiewski. Ueber den Satz von Stokes. Wiad. mat. **2**, 213-215. (Polnisch.)

Die Ausdehnung des bekannten Satzes auf den Fall, wo das einfache Integral sich über die Begrenzung einer $(m-1)$-mal gekrümmten Curve (im Raume von m Dimensionen) erstreckt. Dn.

M. Bôcher. Note on Poisson's integral. American M. S. Bull. (2) **4**, 424-426.

Eine Behandlung des Poisson'schen Integrals in zwei Dimensionen, deren Vorzug nach dem Verf. darin besteht, dass kein besonderer Kunstgriff benutzt wird. Lp.

A. Pringsheim. Zur Theorie des Doppelintegrals. Münch. Ber. **28**, 1898, 59-74.

Es handelt sich um die Frage, inwieweit der für eine stetige Function $f(x, y)$ gültigen Formel:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy \begin{cases} = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx \end{cases}$$

eine wohl definirte Bedeutung auch dann noch beigelegt werden kann, wenn $f(x, y)$ nur denjenigen Beschränkungen unterliegt, welche die Existenz des betreffenden Doppelintegrals nach sich ziehen, und ob diese letztere auch stets für die Gültigkeit jener Formel ausreichend erscheint. Der Verf. giebt eine vereinfachte Darstellung der zur Beantwortung dieser Frage dienenden Betrachtungen, welche gegenüber der von C. Jordan [vgl. F. d. M. **24**, 261, 1892] gegebenen wesentlich vereinfacht ist.

Die Vereinfachungen sind zum Teil erzielt durch die Einführung einer neuen zweckmässigen Bezeichnungsweise für die obere und untere Unbestimmtheitsgrenze einer Zahlenreihe a_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für $\lim \nu = \infty$, bez. einer Function $\varphi(x)$ für $x = x_0$, für welche die Symbole $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\nu$, $\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\nu$, bez. $\overline{\lim\limits_{x=x_0}}\, \varphi(x)$, $\underline{\lim\limits_{x=x_0}}\, \varphi(x)$ gebraucht werden. $\overline{\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}}\, a_\nu$, bez. $\overline{\underline{\lim\limits_{x=x_0}}}\, \varphi(x)$ soll dann bedeuten, dass nach Belieben die obere oder untere Unbestimmtheitsgrenze gewählt werden kann, und $\overline{\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}}\, a_\nu = a$ z. B. bedeutet, dass in dem gewöhnlichen Sinne $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ wird. Ein von dem Verf. früher [vgl. F. d. M. **28**, 215, 1897] aufgestellter Hülfssatz lässt sich dann für seine Verwendung in der vorliegenden Abhandlung sehr knapp formuliren. Nachdem in den folgenden Artikeln die für diese Untersuchung nötigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der einfachen Integrale zusammengestellt sind, erfolgt die Definition des Doppelintegrales und die Reduction desselben auf ein iterirtes Integral gemäss der obigen Formel, für welche zwei Beweise — der eine mit Benutzung des vorhin genannten Hülfssatzes — zunächst für ein rechteckiges Integrationsgebiet mit zu den Axen parallelen Seiten gegeben werden. Um die Tragweite der obigen Formel zu zeigen, wird dieselbe auf eine Function angewandt, bei welcher die Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy, \int_{x_0}^{X} f(x,y)dx$ für unendlich viele, überall dicht liegende Werte von x, bez. y nicht existiren. Zum Schlusse wird die obige Formel auf den Fall eines krummlinig begrenzten Integrationsgebietes in sehr einfacher Weise übertragen. Hau.

O. Stolz. Ueber die Umformung eines uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral. Monatsh. f. Math. **9**, 316-330.

Der ganz im Endlichen liegende Bereich $\mathfrak{F}$, dessen Rand von jeder

Parallele zur y-Axe nur in zwei Punkten geschnitten wird, sei begrenzt von den Geraden $x = a$, $x = a'$ und den Curven $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, wo φ_1 und φ_2 eindeutige und stetige Functionen im Intervalle $a \dots a'$ sind und $\varphi_2(x) > \varphi_1(x)$ ist. Für jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ sei eine Function $f(x, y)$ eindeutig erklärt; sie sei im Gebiete $\mathfrak{F}$ nicht endlich, soll indessen mindestens bei jedem Punkte innerhalb $\mathfrak{F}$ stetig sein. Unter der Voraussetzung, dass das Integral $\int_{y_1}^{y_2} |f(x,y)|\, dy$ für das Intervall $a \dots a'$ von x im allgemeinen gleichmässig convergent (nach Dini) sei, zeigt der Verf., 1. dass $\iint\limits_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy$ und $\int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy$ existiren, wenn $\int_{y_1}^{y_2} |f(x,y)|\, dy$ im Intervalle $a \dots a'$ von x eine endliche Function ist, 2. dass das Integral $\int_a^{a} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ absolut convergirt, wenn $\iint\limits_{(\mathfrak{F})} f(x,y) dx dy$ existirt, und dass in beiden Fällen

$$\iint\limits_{(\mathfrak{F})} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^{a} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

ist. Dann wird noch der besondere Fall untersucht, dass $f(x, y)$ im Gebiete $\mathfrak{F}$ nirgends negativ ist.

Zum Schlusse sucht der Verf. noch die Gültigkeitsbedingungen der vorstehenden Gleichungen für den Fall auf, dass sich das Gebiet $\mathfrak{F}$ ins Unendliche erstreckt. Hau.

É. Picard. Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques. C. R. **126,** 298-300.

É. Picard. Sur la réduction des intégrales doubles des fonctions algébriques. C. R. **126,** 1116-1117.

É. Picard. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. C. R. **127,** 579-584.

In einer früheren Mitteilung (C. R. **125,** 909; F. d. M. **28,** 367, 1897) hatte der Verf. definirt, was er unter einem Doppelintegrale zweiter Art, welches einer algebraischen Fläche zugeordnet ist, versteht; diese Definition findet sich in der letzten der drei vorliegenden Mitteilungen wiederholt.

In der ersten dieser Mitteilungen zeigt der Verf., dass die Untersuchung dieser Doppelintegrale zweiter Art zu einer invarianten Zahl ϱ führt (vgl. hierzu das Referat F. d. M. **28,** 330, 1897). Ist nämlich

die algebraische Fläche m^{ten} Grades $f(x, y, z) = 0$ gegeben, so existiren ϱ dieser Fläche zugeordnete Integrale zweiter Art

$$(1) \qquad J = \iint R(x, y, z)\, dz.$$

(wo $R(x, y, z)$ eine rationale Function von x, y, z ist), welche die Eigenschaft haben, dass keine lineare Combination von ihnen die Form

$$(2) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy$$

annehmen kann, und dass jedes andere Integral zweiter Art durch die Summe einer linearen Combination der ϱ Integrale J und eines Doppelintegrals der Form (2) dargestellt werden kann. Bei dem Beweise ergiebt sich, dass alle Doppelintegrale J auf die Form

$$(3) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)}{f'(z)}\, dx\, dy + \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy$$

gebracht werden können, wobei $P(x, y, z)$ ein Polynom von höchstens dem $(2m-4)^{ten}$ Grade ist. In der zweiten Mitteilung wird gezeigt, dass sich im allgemeinen dieser Grad noch reduciren lässt.

Den Schluss der ersten Mitteilung bildet die Vervollständigung der von dem Verf. in seinem Traité d'analyse (**1**, 50-65) und seiner Théorie des fonctions algébriques de deux variables (**1**, 159) gegebenen Reduction der einer algebraischen Curve zugeordneten Abel'schen Integrale.

In der dritten Mitteilung stellt der Verf. die hauptsächlichsten Resultate zusammen, zu welcher er in Bezug auf die Doppelintegrale zweiter Art gelangt ist, und an deren Spitze die eben angeführten Resultate sich wiederfinden. Ferner leitet er die Bedingungen dafür ab, dass ein Doppelintegral

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'(z)}\, dx\, dy,$$

wo $P(x, y, z)$ längs der Doppelcurven der Fläche $f(x, y, z) = 0$ verschwindet, ein solches der zweiten Art ist. Die Anzahl dieser Bedingungen ist im allgemeinen gleich $2\pi + m - 1$, wobei π das Geschlecht irgend einer ebenen Schnittcurve der Fläche bezeichnet. Dann wird erwähnt, dass die linearen Cyklen einer Fläche und die Doppelintegrale zweiter Art in engem Zusammenhange stehen. Den Schluss bilden zwei Beispiele.

Hau.

W. de Tannenberg. Sur la transformation des intégrales multiples. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 109-114.

Es sei $\varphi(x, y, z)$ eine homogene Function m^{ten} Grades, die im Integrationsgebiete endlich bleibt. Das letztere sei ein Sector, der den Coordinatenanfang O als Spitze besitzt, von einer beliebigen Kegelfläche mit O als Mittelpunkt und durch eine beliebige Fläche Σ begrenzt wird.

Eine von O ausgehende Secante schneide Σ nur einmal. Endlich sei V das Volumen des Sectors, S der Flächeninhalt der in Σ liegenden Basis. Dann gilt, wie der Verf. zeigt, die Formel:

$$\text{(I)} \qquad (m+3)\iiint \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{3V}{S}\iint \varphi(x, y, z)\,d\sigma.$$

Für ein Doppelintegral, über das Gebiet eines ebenen Sectors erstreckt, hat man ähnlich:

$$\text{(II)} \qquad (m+2)\iint \varphi(x, y)\,dx\,dy = \frac{2S}{l}\int \varphi(x, y)\,d\sigma.$$

Anwendung dieser Formeln auf die Berechnung der Trägheitsmomente eines dreiaxigen Ellipsoids und eines Dreiecks. Lp.

Ch. J. de la Vallée-Poussin. Sur la réduction des intégrales multiples. C. R. **127**, 950-951.

Es werde zunächst $\int\limits_T f(x, y)\,dT$ erstreckt über ein Rechteck mit den Begrenzungen $x = a$, $x = b$ und $y = c$, $y = d$; dabei soll die Function $f(x, y)$ in diesem Bereiche niemals negativ werden, aber in einzelnen Punkten unbegrenzt wachsen können. Bezeichnet dann $mf(x, y)$ die untere Grenze der Function $f(x, y)$ in einem unendlich kleinen Bereiche um den Punkt (x, y), so ist der Ausdruck

$$\int_c^d dy \int_a^b mf(x, y)\,dx,$$

bei dessen Berechnung jedem Integrale seine untere Unbestimmtheitsgrenze zuerteilt wird, zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen von $\int\limits_T f(x, y)\,dT$ enthalten. Dieser Satz lässt sich leicht auf beliebig gestaltete Bereiche T und beliebig vielfache Integrale ausdehnen.

Hau.

M. de Franchis. Sulla riduzione degli integrali estesi a varietà. Palermo Rend. **12**, 163-187.

Von den verschiedenen Beweisen der bekannten Sätze über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Integral, erstreckt über irgend eine geschlossene ebene oder räumliche Curve, gleich Null ist, sind diejenigen besonders wichtig, welche sich auf die Riemann'schen und die Stokes'schen Transformationsformeln des Curvenintegrals in ein Flächenintegral stützen; dasselbe gilt für den analogen Satz über ein Oberflächenintegral, welches zu dem Zwecke in ein Raumintegral transformirt wird.

Diese Transformationsformeln verallgemeinert der Verf. in der Weise, dass er ein Integral, welches über eine geschlossene Mannigfaltigkeit V_p von p Dimensionen eines Raumes von n Dimensionen, wo $n > p$ ist, erstreckt werden soll, transformirt in ein Integral, erstreckt über eine Mannigfaltigkeit von $p+1$ Dimensionen, welche V_p als Begrenzung besitzt.

Gewisse specielle Fälle dieser Formel ergeben die früher von Betti aufgestellten Transformationsformeln. Ferner erhält man aus ihr die von Poincaré aufgestellten Integrabilitätsbedingungen. Hau.

N. W. Bugajew. Geometrische Methoden der angenäherten Quadratur und Kubatur. Mosk. Math. Samml. **20**, 451-471. (Russisch).

1. Wenn die Curve $y = \varphi(x)$ zwischen $A(a, \varphi(a))$ und $B(b, \varphi(b))$ weder einen Inflexionspunkt noch auch ein Maximum oder Minimum hat, so wird das Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ durch die Summe zweier Trapeze ausgedrückt, deren nicht auf der x-Axe liegende Ecken A, Q und Q, B sind (Q ist der Durchschnittspunkt (ξ, η) der Tangenten in A und B), oder durch die Summe der Trapeze mit den Ecken A, Q' und Q', B, wo $Q = (\xi, \varphi(\xi))$ der Punkt der Curve ist, welcher auf der Ordinate von Q liegt. Der Fehler ist kleiner als $\frac{1}{2}(b-a)(\varphi(\xi)-\eta)$.

2. Angenähert ist das Integral

$$\int_a^b\int_c^d \varphi(x, y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{4\mu\nu}\{\Sigma z_M + 2\Sigma z_A + 4\Sigma z_a\}.$$

Hier wird die Basis in $\mu\nu$ gleiche Rechtecke durch Parallelen zu den Axen geteilt, z_M bedeutet die Coordinate z der Ecke der Basis, z_A die des Teilungspunktes, welcher auf der Seite der Basis liegt; z_a die des inneren Teilungspunktes. Si.

A. A. Markow. Ueber extreme Werte der Integrale im Zusammenhange mit dem Interpolationsproblem. Petersb. Denkschr. (8) **6**, No. 5, 69 S. 4°. (Russisch.)

Verallgemeinerung früherer Resultate desselben Verf. („Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tschebycheff." Acta Math. **9**, 57-70; F. d. M. **18**, 247, 1886, und „Neue Anwendungen der Kettenbrüche". Petersb. Denkschr. (8) **3**, No. 5; F. d. M. **27**, 174, 1896). Zunächst wird der Fundamentalsatz bewiesen: Erfüllen die Functionen $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_{n+1}(z)$ für $a \leqq z \leqq b$ die Bedingungen:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & \lambda_1'(z) & \ldots & \lambda_1^{(k)}(z) \\ \lambda_2(z) & \lambda_2'(z) & \ldots & \lambda_2^{(k)}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{k+1}(z) & \lambda_{k+1}'(z) & \ldots & \lambda_{k+1}^{(k)}(z) \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

dann wird für $a \leqq u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} \leqq b$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & \lambda_1(u_2) & \ldots & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & \lambda_2(u_2) & \ldots & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(u_1) & \lambda_{n+1}(u_2) & \ldots & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix} > 0.$$

Fügt man eine weitere Function $\Omega(z)$ von der Beschaffenheit hinzu, dass analoge Determinanten wie (1), gebildet aus den Functionen $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_{n+1}(z), \Omega(z)$, für $a \leqq z \leqq b \geqq 0$ folgen, so wird die zu (2) analoge Determinante $\geqq 0$ in demselben Intervalle. Von diesem in Acta Math. **9** bewiesenen Satze wird hier ein neuer Beweis gegeben. Nach dieser Einleitung folgt die Discussion der Aufgabe: Es seien die Zahlen a, b, c, C und die Werte der Integrale

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(z)\lambda_k(z)dz = \alpha_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

gegeben. Die extremen Werte von

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

sind zu finden unter der Voraussetzung, dass (β) $c \leqq f(z) \leqq C$ für $a \leqq z \leqq b$. Diese extremen Werte entsprechen solchen Functionen $f_{\max}$ und $f_{\min}$, für deren jede das ganze Intervall (a, b) sich in $n+1$ Teile zerlegt, in denen die Function $f(z)$ den Wert c oder C behält. Die zweite Aufgabe besteht darin, die extremen Werte von

$$\int_a^v f(z)\Omega(z)dz \qquad (a < v < b)$$

wie (α) zu finden unter derselben Bedingung (β). Diese extremen Werte entsprechen solchen zwei Functionen $f(z)$, für deren jede das ganze Intervall (a, b) in $n+2$ Teile zerfällt, in welchen die Function den constanten Wert c oder C besitzt. Ausserdem soll

für $f_{\max}$ sein: $f(v-\varepsilon) = c$, $f(v+\varepsilon) = C$ (ε unendlich klein, aber >0),

für $f_{\min}$: $f(v-\varepsilon) = C$, $f(v+\varepsilon) = c$.

Die Zahlen a, b sind endlich, c und C dagegen können auch unendlich sein im Grenzfalle.

Der Verf. vervollständigt die Discussion, indem er die Existenz der Lösung beweist, was er in Acta Math. als a priori klar annahm.

Die Untersuchung steht im Zusammenhang mit den Arbeiten von Tschebyscheff (Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données), Korkine und Zolotareff, Stieltjes.

Es folgt dann die Betrachtung einiger particularen Fälle und die Verallgemeinerung der oben erwähnten Resultate von Tschebyscheff.

Si.

N. J. Sonin. Ueber einige in der Theorie der bestimmten Integrale auftretende Ungleichungen. Petersb. Denkschr. (8) **6,** No. 6, 54 S. 4°. (Russisch.)

Allgemeine Formeln mit willkürlichen integrirbaren Functionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ zur angenäherten Berechnung der Integrale von der Form

$$\int_a^b \theta(x)[\varphi(x)]^2 dx, \quad \int_a^b \frac{\theta(x)}{\varphi(x)} dx, \quad \int_a^b \theta(x)\varphi(x)\psi(x)dx,$$

d. h. Aufstellung einer oberen und unteren Grenze für die Werte solcher Integrale. Ein Mittelwertsatz bildet die Grundlage. Als Beispiel wird das Integral $\int_a^b \frac{\theta(x)x^{2m}}{x^2+z^2}dx$ betrachtet und mit Hülfe von $\int_a^b \theta(x)\,x^{2k}dx$ bestimmt. Auch werden die Grenzen von $\int_a^b \theta(x)x^n dx$ mit Hülfe von $\int_a^b \theta(x)x^k dx$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ ausgedrückt. — Der Verf. giebt einen sehr einfachen Beweis des Satzes von Tschebycheff (zuerst publicirt von Hermite in der zweiten Auflage seines Cours lithographié, mit dem Beweise von Picard). Weiter wird aus allgemeinen Formeln die Ungleichung von Buniakowsky (Petersb. Denkschr. (7) **1,** No. 9) abgeleitet. Anwendung zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{4x^2e^{-x^2}dx}{e^{-x^2}+\left(2x+\frac{1}{x}\right)\int_0^x e^{-z^2}dx},$$

welches von Tait und Boltzmann (Vorles. üb. Gastheorie 1895, **1,** S. 73) betrachtet ist. Sonin findet als untere Grenze 0,67689437, als obere 0,677995. (Boltzmann giebt ohne Beweis den Wert 0,677464.) Si.

H. Bourget. Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss. C. R. **126,** 634-636.

Es handelt sich um einen speciellen Fall der von Appell auf die Auswertung von Doppelintegralen ausgedehnten Gauss'schen Methode; es ist nämlich das Integral

$$J=\iint_c f(x, y)dxdy,$$

über das Innere des Einheitskreises c um den Coordinatenanfangspunkt zu erstrecken, wenn $f(x, y)$ innerhalb c in eine Potenzreihe entwickelbar sein soll. Bestimmt man dann zwei Polynome $P(x, y)$, $Q(x, y)$

vom p^{ten} Grade, deren gemeinsame Wurzeln dem Innern des Kreises c angehören, und ersetzt man in dem Integrale $f(x, y)$ durch ein Polynom $\varphi(x, y)$, welches in allen den beiden Curven $P(x, y) = 0$ und $Q(x, y) = 0$ gemeinsamen Punkten dieselben Werte $f_1, f_2, \dots, f_{p^2}$ annimmt wie die Function f, so stimmt das Integral J mit dem Integrale

$$\dot{I} = \iint_c \varphi(x, y)dxdy = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_{p^2} f_{p^2}$$

bis einschliesslich auf Glieder der $(p-1)^{ten}$ Ordnung in x, y überein, und es hängen die Werte der Constanten A_i nur von den Schnittpunkten der Curven $P = 0$ und $Q = 0$, nicht auch von der Function f ab.

Die beiden Integrale J und $\dot{I}$ stimmen sogar bis auf Glieder der $(2p-1)^{ten}$ Ordnung überein, wenn man

$$P = \frac{\partial^p (x^2 + y^2 - 1)^p}{\partial x^p}, \quad Q = \frac{\partial^p (x^2 + y^2 - 1)^p}{\partial y^p}$$

wählt. Die Coordinaten der Schnittpunkte dieser Curven $P = 0$ und $Q = 0$ und die Werte der zugehörigen Constanten A_i sind zum Schlusse in einer kleinen Tabelle für $p = 1, 2, 3, 4$ zusammengestellt; unter $p = 1$ muss hinter x der Wert 0 statt π gesetzt werden. Hau.

B. P. Moors. Berekening van de benaderde waarde eener bepaalde integraal. Nieuw Archief (2) **3**, 285-291.

Schluss der Abhandlung aus Nieuw Archief **20**, 129-314 (F. d. M. **25**, 493, 1893). Entwickelung derjenigen Formeln zur mechanischen Quadratur, in welchen sämtliche Coefficienten, mit denen die einzelnen Ordinaten multiplicirt werden, einander gleich sind, also bei m Ordinaten den Wert $1/m$ haben. In Bezug auf diese Formeln sind übrigens zu beachten die Arbeiten von Tschebyscheff (1874) und Radau (1880). Lp.

S. Finsterwalder. Harmonische Analyse mittelst des Polarplanimeters. Schlömilch Z. **43**, 85-92.

Will man eine graphisch gegebene Function in eine Fourier'sche Reihe entwickeln, so kann man, ohne einen harmonischen Analysator zu besitzen, die Entwickelungscoefficienten mit Hülfe eines gewöhnlichen Polarplanimeters leicht mechanisch bestimmen. Allerdings ist dazu die Zeichnung von ebenso vielen Curven erforderlich, als Coefficienten der Fourier'schen Reihe bestimmt werden sollen, welcher Umstand der Benutzung des Polarplanimeters hinderlich im Wege steht. Der Verf. zeigt nun, wie sich das Aufzeichnen der nötigen Curven sehr wesentlich vereinfachen lässt. Der Grad der durch dieses Verfahren erreichbaren Genauigkeit ist ein recht hoher. Hau.

Kapitel 5.
Gewöhnliche Differentialgleichungen.

L. Schlesinger. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In zwei Bänden. Zweiten Bandes zweiter (Schluss-) Teil. Leipzig: B. G. Teubner. XIII + 446 S. gr. 8°.

Ueber Erwarten rasch ist dem in F. d. M. **28**, 260, 1897 besprochenen ersten Teile des zweiten Bandes des vorliegenden Handbuchs der angekündigte zweite Teil nachgefolgt. Er bildet den Schluss und zugleich die Krönung des Werks, indem er uns in die bewundernswerte, von Poincaré begründete und in ihren wesentlichen Teilen ausgebaute Theorie der Fuchs'schen Functionen einführt. Hier ist der Verf. auf seinem eigensten Gebiet, auf dem er durch einschlägige Arbeiten sich nicht nur als gründlicher Kenner, sondern auch als erfolgreicher Forscher bewährt hat. Zur Einleitung dient (13. Abschnitt) die Theorie der elliptischen Modulfunction, entwickelt nach einer dem Verf. eigentümlichen Methode, die direct von den Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung zur Darstellung des Moduls als eindeutiger Function des Quotienten dieser Periodicitätsmoduln führt und auf die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels gegründet ist. Da andrerseits die Periodicitätsmoduln als zwei Fundamentalintegrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der Legendre'schen, mit dem Modul als unabhängiger Variable erscheinen, so ist dadurch die Anknüpfung an das Problem gegeben, diejenigen Fälle der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, von der die Legendre'sche ein besonderer Fall ist, zu ermitteln, in denen die unabhängige Variable z als eindeutige Function des Integralquotienten η erscheint. Die Function vermittelt dann die eindeutig conforme Abbildung eines Kreisbogendreiecks in der η-Ebene auf eine Halbebene in der z-Ebene und wird daher eine eindeutig umkehrbare Dreiecksfunction genannt, mit deren Theorie sich der 14te Abschnitt beschäftigt. Je nachdem die Summe der Winkel des Kreisbogendreiecks kleiner, gleich oder grösser als zwei Rechte ist, ergeben sich drei wesentlich verschiedene Arten von Dreiecksfunctionen. Nur für die dritte Art ist z eine rationale Function von η. Die vier Möglichkeiten, die sich hier ergeben, werden nach Schwarz auf die möglichen Fälle der Kugelteilung in ein Netz von congruenten und symmetrischen sphärischen Dreiecken zurückgeführt, die nach Klein als die des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders charakterisirt werden. Zur Aufstellung der rationalen Function selbst bedient sich der Verf. der Hülfsmittel, die Fuchs bei der Lösung des allgemeinen Problems der algebraischen Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten angewandt hat, wie Einführung der Primformen, des reducirten Wertsystems eines Integrals, und gewinnt dadurch einen natürlichen Anschluss an das Fuchs'sche Problem. Zur Lösung desselben wird der Klein'sche Satz her-

angezogen, wonach jede algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Anwendung einer gewissen einfachen Transformation auf eine algebraisch integrirbare Gauss'sche oder cyklische Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, und dann wird nach Fuchs gezeigt, wie alle auf das Problem bezüglichen Fragen durch rein rationale Processe entschieden werden können. Den Uebergang zu den beiden folgenden Abschnitten, die der Theorie der Fuchs'schen Functionen und dem Poincaré'schen Princip gewidmet sind, bereitet der Verf. durch die Anwendung des letzteren auf die Modulfunction $\tau = \varphi(x)$; x ist eine eindeutige Function von τ, die innerhalb eines einfach zusammenhängenden, von der realen τ-Axe, als Linie der Unbestimmtheit, begrenzten Bereichs überall mit rationalem Charakter existirt und dort jeden Wert mit Ausnahme der drei Werte $0, 1, \infty$ annimmt („diese Werte auslässt"). Ist nun y eine Function von x, die nur die drei Verzweigungsstellen $0, 1, \infty$ besitzt, so wird y als Function von τ innerhalb des Existenzbereichs der Function x ebenfalls eindeutig sein, da die Werte, für die sie sich verzweigen könnte, in diesem Bereich nicht vorkommen. Somit lässt sich die functionale Beziehung zwischen x und y dadurch darstellen, dass beide Variabeln als eindeutige Functionen eines Parameters τ ausgedrückt werden. Dies ist aber das Poincaré'sche Princip, angewandt auf eine Function mit drei Verzweigungspunkten. Poincaré hat bewiesen, dass man stets eine eindeutige Function $x = \psi(\eta)$ herstellen könne, für die der Bereich, wo sich die Function wie eine rationale Function verhält, einfach zusammenhängend ist, und die eine beliebige Anzahl vorgeschriebener complexer Werte auslässt. Nach obiger Schlussweise ist also jede Function y von x, die nur diese Werte als Verzweigungswerte besitzt, gleichzeitig mit x als eindeutige Function des Parameters η darstellbar. Der Verf. zeigt nun, dass es zum Erweise der Möglichkeit einer solchen Darstellung nicht des ganzen Umfanges der bezüglichen Poincaré'schen Untersuchungen bedarf. Nachdem er zunächst allgemein die Fuchs'schen Functionen als solche eindeutigen Functionen z von η definirt hat, die bei den Substitutionen einer gewissen projectivischen Gruppe (der Fuchs'schen Gruppe) unverändert bleiben und innerhalb eines gewissen Kreises, der Linie der Unbestimmtheitsstellen, mit rationalem Charakter existiren, ferner ihre Darstellung durch Quotienten von Fuchs'schen Thetareihen nach Poincaré und eine zweite mittels der auch hier eingeführten Primformen gegeben hat,, fasst er einen Specialfall der Fuchs'schen Functionen ins Auge, der als die unmittelbare Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunction, insbesondere der Modulfunction, angesehen werden kann. Es sind das solche Functionen $z = f(\eta)$, welche die conforme Abbildung eines Kreisbogenpolygons in der η-Ebene auf eine Halbebene der z liefern, und wo die Seiten des Polygons die Kreislinie der Unbestimmtheitsstellen (Grenzkreis) rechtwinklig schneiden. Unter dieser Annahme ist η der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unabhängigen Variable z, deren sämtliche singulären Stellen reelle Werte sind. Diesen entsprechen in

der η-Ebene die Ecken des Kreisbogenpolygons. Liegen noch insbesondere die Ecken auf der Peripherie des Grenzkreises, so hat die Function z die charakteristische Eigenschaft, die erwähnten reellen Werte auszulassen. Zur wirklichen Herstellung einer solchen Function verfährt der Verf. nach einem ihm eigentümlichen Princip, das er bereits früher publicirt hat, und das darin besteht, die functionale Beziehung zwischen η und z durch einen Grenzübergang mittels einer Folge von Iterationen aus einer algebraischen Beziehung hervorgehen zu lassen. Weiter wird dann gezeigt, wie man von der so gewonnenen speciellen Fuchs'schen Function durch einfache Processe zu einer solchen gelangen kann, die beliebig vorgeschriebene reelle und complexe Werte und überdies noch gewisse andere nicht vorgeschriebene Werte auslässt; wodurch das bezeichnete Poincaré'sche Problem als vollständig gelöst zu betrachten ist. Wenn im Hinblick auf dieses Ziel der Verf. auf die Darlegung der umfassenderen Poincaré'schen Untersuchungen verzichtet, so unterlässt er es doch nicht, auf die Gegenstände derselben in geeigneter Form hinzuweisen und z. B. die so wichtige „méthode de continuité“ an einem einfachen Falle zu erläutern. Der letzte (17^{te}) Abschnitt, „Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen“ betitelt, enthält die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit rationalen Coefficienten in der Form, dass abhängige und unabhängige Variabeln als eindeutige Functionen eines Parameters η erscheinen, und zwar ist die unabhängige Variable eine Fuchs'sche Function, während die Integrale als Fuchs'sche Zetafunctionen bezeichnet werden und die Eigenschaft haben, lineare Substitutionen einer gewissen Gruppe zu erfahren, wenn auf η eine Substitution der Fuchs'schen Gruppe ausgeübt wird. Mit Hülfe der Zetafunctionen kann, wie weiter gezeigt wird, die Lösung des von Riemann in seinen nachgelassenen Schriften aufgestellten Existenzproblems eines Systems von Functionen, die gegebene lineare Substitutionen bei den Umläufen der unabhängigen Variable erfahren, in dem Falle gewonnen werden, wo die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 besitzen, ein Resultat, welches, da die Substitutionen der endlichen Gruppen stets diese Bedingung erfüllen, für die Frage der algebraischen Integrirbarkeit der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung wichtig ist. Hier erfolgt der Hinweis auf die Bedeutung der neueren Fuchs'schen Entwickelungen betreffs derjenigen Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und dessen conjugirten Werten gebildete bilineare Form mit constanten und realen Coefficienten ungeändert lässt, und zu denen die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen gehören. Den Schluss bildet die Untersuchung der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit eindeutigen periodischen Coefficienten, deren Integrale überall eindeutig sind. Die Integrale sind dadurch charakterisirt, dass die linearen Substitutionen, welche sie bei Vermehrung der unabhängigen Variable um Vielfache der Perioden erfahren, mit einander vertauschbar sind. Aus dieser Eigenschaft zieht der Verf.

Folgerungen, die nicht nur die Existenz eines Systems von n linear-unabhängigen doppeltperiodischen Functionen zweiter Art als Integralen im allgemeinen Falle erkennen lassen, sondern auch in allen besonderen Fällen die analytische Beschaffenheit der Integrale eines Fundamentalsystems anzugeben gestatten. Daran knüpft sich eine kurze Behandlung der Lamé'schen Differentialgleichung. An geeigneten Stellen lässt es sich der Verf. angelegen sein, den Zusammenhang der behandelten Probleme mit verwandten Theorien darzulegen. So beleuchtet er die Beziehung der Modulfunction zu den binären Formen mit negativer Discriminante, die der projectiven Substitutionen zur Geometrie der Flächen mit constantem Krümmungsmass und zur nichteuklidischen Geometrie; endlich geht er auf das allgemeine Abbildungsproblem von Schottky ein, um genau die Stellung zu bezeichnen, die dasselbe der durch die Fuchs'schen Functionen vermittelten Abbildung gegenüber einnimmt. Ein hinzugefügtes Nachwort bezweckt, den Einfluss hervortreten zu lassen, den der verstorbene Freund und Mitarbeiter des Verf., Paul Günther, auf Plan und Ausführung des Handbuches ausgeübt hat. Hierzu dient einerseits die Wiedergabe des von beiden Mathematikern entworfenen Arbeitsprogramms, andererseits die Zusammenstellung der Kapitel, die nach Günther's Entwürfen bearbeitet, oder in denen Entwickelungen Günther's verwertet sind. Ein Register der angewandten Bezeichnungen erleichtert in dankenswerter Weise den Gebrauch des Handbuchs. Hr.

É. Picard. Remarques sur les groupes de transformations des équations linéaires. Darboux Bull. (2) **22**, 159-160.

In der Besprechung des Schlesinger'schen Handbuchs der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Vessiot in Darboux Bull. veröffentlicht hat, finden sich einige Bemerkungen über die Theorie der Transformationsgruppen, die der Verf. in der vorliegenden Note ergänzt. Hr.

F. Giudice. Nozioni sulle trasformazioni puntuali e sui gruppi continui. Brescia: Apollonio. VI u. 144 S. 8°.

In diesem kleinen Buche, welches als Einleitung in das Studium der Lie'schen Theorien dienen soll, werden die elementarsten Teile des Lie-Scheffers'schen Werkes über Differentialgleichungen auseinandergesetzt. Es folgt auch diesem Werke, mit Ausnahme der Anordnung des Stoffes, im allgemeinen getreu; nur in wenigen Punkten hat der Verf. Veränderungen und Vereinfachungen eingeführt. Dazu mag aber bemerkt werden, dass sein Beweis (§ 50) von der Identität der r-gliedrigen und der von r infinitesimalen Transformationen erzeugten Gruppen unrichtig ist; man könnte sonst nämlich mit ganz denselben Worten beweisen, dass r beliebige unabhängige infinitesimale Transformationen eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, was bekanntlich falsch ist. Vi.

G. Vivanti. Teoria dei gruppi di trasformazioni. Lezioni di analisi superiore fatte nella R. Università di Messina. Anno scolastico 1897-98. Raccolte dal Dott. D. Apreda. Reggio Calabria: Massara 369 S. 8° lith.

Es werden hier die Hauptpunkte der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen und der Theorie der Berührungstransformationen entwickelt. Einige Vorlesungen sind auch der Anwendung auf Differentialgleichungen gewidmet. Vi.

E. Puchberger. Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. VI. (Supplement-) Heft. Wien: C. Gerold's Sohn. 49 S. gr. 8°.

Puchberger integrirt ruhig weiter, trotz mehrfachen dringenden Abratens seiner Recensenten. Wenigstens ist insofern ein Fortschritt zu constatiren, als P., allerdings nur zuweilen, sich auch um die Convergenz der von ihm aufgestellten Reihen zu kümmern beginnt. Dagegen kommt es ihm nicht darauf an, mehrere Reihenglieder „der Einfachheit wegen“ zu vernachlässigen: „Uebrigens steht es frei, auch die Mittelglieder aufzunehmen“ (sic! S. 25). Auf S. 2 bestimmt P. „nach Sturm's Methode“ das allgemeine Integral der oft behandelten Differentialgleichung $y''+x^n y=0$, welches, wie man sich leicht überzeugt, unmöglich richtig sein kann, und nachdem er dann durch seine eigene Methode das längst bekannte richtige Integral gefunden hat, leistet er sich auf der folgenden Seite den tiefsinnigen Ausspruch: „$2n, 3n, \ldots$ ist allgemeiner als n; Sturm's Integral ist daher weniger allgemein.“ — Auch sonst sind grobe Fehler vorhanden, z. B. auf S. 24; sie wiegen indes nicht schwer, da man die ganze Arbeit nicht gut ernst nehmen kann. Wbg.

W. F. Osgood. Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx=f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung. Monatsh. f. Math. **9**, 331-345.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x,y)$ eine reelle stetige Function der beiden reellen unabhängigen Variablen (x, y) in dem Bereiche $|x-a|\leqq R$, $|y-b|\leqq S$ ist, wird folgender Satz bewiesen: Es sei M der Maximalwert von $|f(x,y)|$ in obigem Bereich und ϱ die kleinere der beiden Grössen R, $S:M$, so giebt es stets in dem Intervalle $a-\varrho\leqq x\leqq a+\varrho$ eine Maximallösung $\varphi_1(x)$ und eine Minimallösung $\varphi_2(x)$ der Differentialgleichung mit dem gemeinsamen Wert b für $x=a$; jede andere durch (a, b) gehende Lösung $\varphi(x)$ verläuft in dem Streifen $\varphi_2(x)\leqq\varphi(x)\leqq\varphi_1(x)$. Als hinreichende Bedingung dafür, dass die Maximal- und Minimallösung zusammenfallen, also die Differentialgleichung nur eine Lösung habe, die für $x=a$ den Wert b annimmt, wird eine solche gefunden, welche die Cauchy-Lipschitz'sche Bedingung als speciellen Fall umfasst. Hr.

W. F. Osgood. A new proof of the existence of a solution of the differential equation $dy/dx = f(x, y)$, the Cauchy-Lipschitz condition not being imposed. American M. S. Bull. (2) **4**, 292-293.

Vergl. das vorangehende Referat.

O. Niccoletti. Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. Torino Atti **33**, 746-759.

Zunächst wird gezeigt, dass der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y^{(n)} = \varphi(x)$$

durch das Integral

$$(2) \quad y = \frac{1}{(n-1)!} f(x) \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)(x-a)} \cdot \int_a^x (a-z)^{n-1} \varphi(z) dz \right\}$$

genügt wird, wo

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda \qquad (\alpha+\beta+\dots+\lambda = n)$$

und die Summe sich auf alle Punkte $a, b, \dots, l$ bezieht. Dies Integral hat weiter die Eigenschaft, dass es in den Punkten $a, b, \dots, l$ zugleich mit seinen resp. $\alpha-1, \beta-1, \dots, \lambda-1$ ersten Derivirten verschwindet. Fügt man zu der rechten Seite von (2) noch die in bekannter Weise zu bestimmende ganze Function $F(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade hinzu, die zugleich mit ihren $\alpha-1$ (resp. $\beta-1, \dots, \lambda-1$) ersten Derivirten in $x = a$ (resp. $x = b, c, \dots, l$) vorgeschriebene Werte annimmt, so erhält man ein Integral von (1), das dieselben Bedingungen erfüllt, die im folgenden kurz mit (A) bezeichnet werden. Ist nun eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(3) \qquad y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

gegeben, wo φ eine endliche und stetige Function ihrer Argumente bedeutet, die den Lipschitz'schen Bedingungen

$$|\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - \varphi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})| < M \sum_0^{n-1}{}_k |y^{(k)} - y_1^{(k)}|$$

genügt (M eine positive und endliche Constante), so kann man für den Fall, dass die Punkte $a, b, \dots, l$ und die Variable x in einem hinreichend kleinen Intervalle liegen, auf folgendem Wege zu einem Integral von (3) gelangen, das den Anfangsbedingungen (A) genügt. Man integrire die Gleichung $y_1^{(n)} = \varphi_0(x)$, wo $\varphi_0(x)$ aus φ hervorgeht, indem man $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ durch willkürliche Constanten ersetzt, nach dem Vorhergehenden unter den Anfangsbedingungen (A). Darauf integrire man die Gleichung

$$y_2^{(n)} = \varphi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$$

gleichfalls unter den Anfangsbedingungen (A), u. s. f., so dass y_{k+1} das

Integral der Gleichung

$$y_{k+1}^{(n)} = \varphi(x, y_k, y'_k, \ldots, y_k^{(n-1)})$$

mit den Anfangsbedingungen (A) ist. Dann strebt, wie bewiesen wird, y_{k+1} gleichmässig einer Grenze zu, die das verlangte Integral ist. Das hier bewiesene Existenztheorem, welches das Cauchy'sche als speciellen Fall enthält, wird einerseits auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, andererseits auf eine Klasse partieller Differentialgleichungen ausgedehnt. Zum Schluss wird für das Integral einer linearen completten Differentialgleichung mit constanten Coefficienten unter den Anfangsbedingungen (A) die Endformel explicite gegeben. Hr.

W. Anissimoff. Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation. Math. Ann. **51**, 181-195.

Der Verf. discutirt die gebräuchlichen Methoden der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Euler'sche Methode des Multiplicators für die der ersten Ordnung setzt nicht das Vorhandensein von Derivirten höherer als erster Ordnung bei der Integralfunction voraus und ist stets anwendbar, wenn ein allgemeines Integral der Gleichung existirt. Die Lagrange'sche Methode der Differentiation ist nur dann anwendbar, wenn ein von 2 willkürlichen Constanten abhängiges Integral der abgeleiteten Differentialgleichung 2[ter] Ordnung existirt, das bestimmte Derivirte erster Ordnung besitzt. Die Bemerkung, dass die Lagrange'sche Methode die Integration der gegebenen Differentialgleichung (1) $f(x, y, y') = 0$ auf die des Systems

$$(2) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{dy}{y' \frac{\partial f}{\partial y'}} = -\frac{dy'}{\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y'}}$$

zurückführt, wovon ein Integral $f(x, y, y') = \alpha$ bekannt ist, führt mit Hülfe des Princips des letzten Multiplicators zu dem Satze, dass das allgemeine Integral von (1) durch Quadraturen gefunden wird, wenn der Jacobi'sche Multiplicator J des Systems (2) bekannt ist. Ist J gegeben, so lässt sich im allgemeinen die entsprechende Function $f(x, y, y')$ nicht bestimmen, wohl aber, wie der Verf. zeigt, in den Fällen, wo J nur von zwei der Variablen x, y, y' abhängt. Die Ausführung dieser Bestimmung in den drei hier in Betracht kommenden Fällen führt auf neue Klassen integrabler Gleichungen erster Ordnung. Durch Ausdehnung der Differentiationsmethode auf die Integration der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gelangt der Verf. unter besonderen Annahmen für den Jacobi'schen Multiplicator des dem System (2) analogen Systems von $n+1$ Gleichungen zu interessanten Resultaten. Hr.

W. A. Anissimoff. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Mosk. Math. Samml. **20**, 316-336. (Russisch.)

W. A. Anissimoff. Ueber eine Formel der Determinantentheorie und deren Anwendung in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Warschau Univ. No. I, 1-16. (Russisch.)

§ 1. Die Formel der Determinantentheorie, um die es sich hier handelt, ist folgende: wenn $f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ ist und $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ die lineare Form, welche entsteht, wenn im Producte $f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_n^{i_n}$ $(i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m)$ jedes Glied $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ durch neue Veränderliche $X_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ ersetzt wird, so ist die Determinante u_m der F in Bezug auf X mit der Determinante u_1 der Formen f durch die Beziehung

$$u_m = u_1^{(m+n-1)_n} \qquad \left((m+n-1)_n = \frac{(m+n-1!)}{n!\,(m-1)!}\right)$$

verbunden. — § 2. Diese Formel wird zur (im allgemeinen negativen) Beantwortung der Frage angewandt, ob zwischen dem particularen Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der linearen homogenen Differentialgleichung identische Beziehungen der Form

$$\Sigma C_{i_1 i_2 \ldots i_n} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_n^{i_n}$$

bestehen mögen. Si.

W. Anissimoff. Sur une formule nouvelle relative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires. Math. Ann. **51**, 388-400.

Verf. beweist eine Determinantenrelation, die bereits von Hurwitz (Math. Ann. **45**, 391) gegeben worden ist, und benutzt dieselbe zur Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass die Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung einer homogenen Relation m^{ten} Grades $(m > 1)$ mit constanten Coefficienten genügen (vergl. das vorangehende Referat). Wbg.

P. Stäckel. Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. C. R. **126**, 203-205.

Picard hat in seinem Traité d'Analyse bei einer Vergleichung zweier Theoreme von Cauchy, betreffend die Existenz der Integrale der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$, von denen das erste f als reelle continuirliche Function der reellen Variabeln x, y, das zweite f als analytische holomorphe Function von x und y in einem gewissen Gebiete voraussetzt, die auffallende Thatsache angemerkt, dass dem Integral durch das erste Theorem ein weiterer Convergenzbereich zugewiesen wird, als durch das zweite, das doch durch seine Voraussetzung die Function grösserer Beschränkung unterwirft. Der Verf. hebt die Schwierigkeit dadurch, dass er zeigt, wie durch Ersetzung der Ungleichungen, die dem Beweis des zweiten Theorems zum Ausgangspunkte dienen, durch

andere analoger Art ohne sonstige Aenderung des Beweisganges ein grösserer Convergenzradius erhalten werden kann. Hr.

É. Picard. Sur certains exemples singuliers d'approximations successives. C. R. **126,** 497-500.

Ist in der Differentialgleichung (1) $d^2y/dx^2 = f(x, y)$ f stets positiv und mit y wachsend, so giebt es ein und nur ein Integral, welches für $x = a$ und $y = b$ vorgeschriebene Werte, z. B. Null, annimmt. Die bei der Approximationsmethode in den Gleichungen:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f(x, 0), \ \frac{d^2y_2}{dx^2} = f(x, y_1), \ldots, \frac{d^2y_n}{dx^2} = f(x, y_{n-1})$$

auftretenden Functionen y haben die Eigenschaft, dass die y von geradem und die von ungeradem Index im Intervalle (a, b) gleichmässig den bezüglichen Grenzen v und u zustreben, die als Functionen von x den Gleichungen

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, v), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(x, u)$$

genügen; u und v können verschieden sein. Alsdann ist das fragliche Integral y von (1) eine Function zwischen u und v, so dass $v > y > u$. Mannigfachere Möglichkeiten bietet die Differentialgleichung $d^2y/dx^2 + f(x, y) = 0$ unter den nämlichen Voraussetzungen für f wie oben. Hier kann es vorkommen, dass es mehrere (continuirliche) Integrale oder keines giebt, das in a und b verschwindet. Die Frage, was alsdann die successiven Approximationen ergeben, wird offen gehalten. Hr.

W. F. Durand. Approximate methods for the treatment of differential equations. Annals of Math. **12,** 110-117.

Zwei Annäherungsmethoden zur Integration von Differentialgleichungen, die trapezoidische Regel:

$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta x(y'_0 + y'_1)$$

und die Simpson'sche:

$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{3}\Delta x(y'_0 + 4y'_1 + y'_2),$$

werden behandelt und auf einige Beispiele angewandt, um den Verlauf der Integrale von Differentialgleichungen und Systemen von solchen tabellarisch sowie graphisch zu bestimmen, auch dann, wenn gewisse Grössen in der Differentialgleichung, wie es besonders in physikalischen Problemen vorkommt, durch Curven, deren analytische Gleichung nicht bekannt ist, graphisch gegeben sind. Hr.

M. Pétrovitch. Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles. American J. **20,** 293-300.

Ein fester Körper tauche in eine in einem Gefässe enthaltene Flüssigkeit. Das Niveau der letzteren wird nach einem gewissen von der Form des Körpers und des Gefässes abhängenden Gesetz steigen. Nennt man y die Höhe dieses Niveaus, x die des oberen Endes einer Stange, an welcher der Körper befestigt ist, über der Basis des Gefässes, so erhält man für y als Function von x die Differentialgleichung $\varphi(y)\cdot dy/dx = f(x-y)$, wo φ und f die Flächeninhalte der horizontalen Schnitte resp. des Gefässes und des Körpers bedeuten, deren Form beliebig gewählt werden kann. Die Rolle der Constante der Integration spielt die anfängliche Höhe des Niveaus. Es werden nun verschiedene Vorrichtungen angegeben, durch welche die Höhe des Niveaus mittels eines mit einem Schwimmer verbundenen Stifts, der auf einem gleichmässig rotirenden Cylinder gleitet, registrirt wird. Die graphische Integration von anderen Typen von Differentialgleichungen wird dadurch erhalten, dass man gleichzeitig die im Gefässe enthaltene Flüssigkeit durch eine in der Basis angebrachte Oeffnung fliessen lässt, deren Breite man nach Belieben wählen kann. Hr.

L. Restellini. Generalizzazione d'una formola d'integrabilità. Batt. G. **36**, 262-270.

Das Problem, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, dass das Integral

$$\int F(x,y,y',\ldots,y^{(m)};\; z,z',\ldots,z^{(n)})\,dx$$

einen von den Relationen zwischen x, y und z unabhängigen Wert hat, wird in folgender Weise verallgemeinert: Es sei

$$F = F(x,y,y',\ldots,y^{(m)};\; z, z'_x, z'_y, z''_{xy}, \ldots, z^{(n)}_{y^n}),$$

worin y eine Function von x allein, z eine Function von x und y ist und $z^{(s)}_{x^\alpha y^{s-\alpha}} = \dfrac{\partial^s z}{\partial x^\alpha \partial y^{s-\alpha}}$. Die Bedingungen dafür, dass F integrabel ist, lauten dann:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial F}{\partial y^{(m)}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'_x} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial z^{(n)}_{x^n}} = 0,$$

also formell übereinstimmend mit den bekannten Euler'schen Relationen in dem gewöhnlichen Falle. Nur bedeutet $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$ hier die totale Ableitung von F nach y, also:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{r=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial z^{(r-1)}_{x^s y^{r-s-1}}}\, z^{(r)}_{x^s y^{r-s}}.$$

Auch in dem allgemeineren Falle, dass z ausser von x, y noch von $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ abhängt, bleibt für die Bedingungen der Integrabilität die Euler'sche Form erhalten. Hr.

F. Marotte. Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes. Toulouse Ann. **12**, H. 1-92; auch sep. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 97 S. 4°.

Der erste Teil der vorliegenden Abhandlung, die sich hauptsächlich auf die einschlägigen Arbeiten von Picard und Vessiot stützt, ist dem analytischen Studium der Singularitäten der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten und der Klassification ihrer transcendenten Lösungen gewidmet. Im ersten Kapitel zeigt Verf., dass zu jedem singulären Punkte a einer solchen Gleichung eine lineare Transformationsgruppe gehört, welche bei der Untersuchung der Singularität dieselbe Rolle spielt wie die Galois'sche Gruppe bei der Auflösung einer algebraischen Gleichung oder die Rationalitätsgruppe bei der Integration einer linearen Differentialgleichung. Diese Gruppe wird vom Verf. „Meromorphiegruppe" genannt, weil ihre Differentialinvarianten in der Umgebung des Punktes a meromorphe Functionen sind; sie charakterisirt die Natur des singulären Punktes. Für eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung giebt es so viele Arten singulärer Punkte, als es Typen von Untergruppen in der linearen Gruppe mit n Variabeln giebt. Im zweiten Kapitel werden die Beziehungen festgestellt, welche zwischen der Rationalitätsgruppe, der Monodromiegruppe und den Meromorphiegruppen in Bezug auf die verschiedenen singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung bestehen. Im dritten Kapitel wird das Anwendungsgebiet der Galois'schen Methoden ausgedehnt und gezeigt, wie dieselben zur Monodromiegruppe führen. Die Rationalitätsgruppe kennzeichnet die Stellung der Integrale in der Gesamtheit der rationalen Functionen, die Monodromiegruppe ihre Stellung in der Gesamtheit der eindeutigen Functionen und die Meromorphiegruppe für ein bestimmtes Gebiet ihre Stellung in der Gesamtheit der in diesem Gebiete meromorphen Functionen. Verf. zeigt, welchen Weg man von diesem Gesichtspunkte aus für die analytische Untersuchung der Integrale einschlagen muss. Das vierte Kapitel enthält eine Anwendung der vorhergehenden Resultate auf die Klassification der transcendenten Integrale der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, sowie einige Eigenschaften der Differentialgleichungen derselben Art und eine Methode, um zu erkennen, ob zwei gegebene Differentialgleichungen zu derselben Art gehören oder nicht. — Der zweite Teil der Arbeit ist der Bestimmung der Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung mit rationalen (oder algebraischen) Coefficienten gewidmet. Das fünfte Kapitel enthält die Auseinandersetzung des allgemeinen Problems und giebt den Weg an, den man zur Lösung desselben für eine Differentialgleichung beliebiger Ordnung einschlagen muss. In den folgenden Kapiteln VI, VII und VIII beschäftigt sich Verf. mit den Differentialgleichungen zweiter, dritter und

vierter Ordnung und zeigt durch eine neue Einteilung der homogenen linearen Gruppen, dass man die Bestimmung der Rationalitätsgruppe auf die Lösung des folgenden Problems zurückführen kann: „Zu untersuchen, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten ein Integral besitzt, dessen logarithmische Ableitung rational oder algebraisch ist." Man kann dieses Problem stets lösen und gelangt zu folgendem Schluss: „Die Rationalitätsgruppe einer linearen Differentialgleichung zweiter, dritter und vierter Ordnung kann stets bestimmt oder diese Bestimmung auf die Untersuchung eines Abel'schen Integrals zurückgeführt werden." Man findet so auf die einfachste Weise alle möglichen Fälle der Reduction einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung und kennt in jedem Falle die algebraischen Beziehungen, welche zwischen der unabhängigen Variable und den Elementen eines Fundamentalsystems bestehen. Verf. zeigt auch, wie man diese Beziehungen zur Vereinfachung des Integrationsproblems und zur Reduction desselben auf seine kanonische Form benutzen kann. Die vom Verf. befolgte Methode lässt sich unmittelbar auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung ausdehnen. — Im IX. Kapitel führt Verf. das Problem der Bestimmung der zu einem singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung gehörigen Monodromiegruppe auf die folgende kanonische Form zurück: „Zu untersuchen, ob eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten ein Integral besitzt, dessen logarithmische Ableitung meromorph ist (Normalintegral)." Er zeigt, wie die Arbeiten von H. von Koch die Behandlung dieser Frage ermöglichen. Wbg.

A. Gutzmer. Zum Existenzbeweise des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von Paul Günther. J. für Math. **119**, 82-85.

Zu dem Beweise, den Ref. für die Existenz des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung nach einer Mitteilung von Paul Günther veröffentlicht hat (J. für M. **118**, 354; F. d. M. **28**, 268, 1897), fügt der Verf. in Ausführung einer Andeutung, die sich in dem handschriftlichen Nachlass des letzteren findet, noch die Angabe der Grenze hinzu, unterhalb welcher der durch Abbrechen der Integralreihe begangene Fehler liegt. Hr.

P. Günther. Nachtrag zu der Abhandlung „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten". J. für Math. **119**, 330-338.

In der genannten Abhandlung (J. für Math. **105**, 29; F. d. M. **21**, 308, 1889) wurde als von besonderem Interesse der Fall erwähnt, dass bei einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sämtliche Coefficienten des determinirenden Faktors $e^{G(x^{-1})}$ endliche n-fache Wurzeln v_h der zu ihrer Be-

stimmung dienenden Ableitungsgleichungen sind, und ohne Beweis angegeben, dass alsdann $v_h = -\frac{1}{n}\frac{1}{h!}\left(\frac{d^h p_1(x)}{dx^h}\right)_{x=0}$ sein muss, wobei die Differentialgleichung auf die Form

$$x^{n(m+1)}y^{(n)} + x^{(n-1)(m+1)}p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

gebracht zu denken ist. Ferner wurde bemerkt, dass die Gleichung für $n=2$, wenn sie überhaupt ein Normalintegral besitzt, sogar deren zwei haben müsse. Die Beweise dieser Sätze werden hier gegeben, und auch umgekehrt wird bewiesen, dass, wenn die Differentialgleichung für $y_m = e^{-G(x^{-1})}y$ lauter in der Umgebung von $x=0$ reguläre Integrale besitzt, stets die Grössen v_h n-fache Wurzeln der betreffenden Ableitungsgleichungen sind und auf die angegebene Weise bestimmt werden. Es wird alsdann auf die Beziehung dieser Sätze zu der Frage nach der Existenz logarithmischer Normalintegrale hingewiesen. Hr.

M. Bôcher. Note on some points in the theory of linear differential equations. Annals of Math. **12,** 45-53.

Zunächst wird für den Fall, dass die Coefficienten p der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in y analytische Functionen der complexen Variable x sind, der Beweis der Existenz eines analytischen Integrals nach Frobenius gegeben, doch mit der Modification, dass er auch gültig bleibt, wenn die p reelle analytische Functionen der reellen Variable x sind. Bei gegebenen Werten von $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ für einen nicht singulären Punkt der Differentialgleichung ist die abgeleitete Lösung, wie weiter gezeigt wird, nicht nur die einzige analytische, sondern die einzige Lösung überhaupt. Endlich wird der Beweis für die Existenz eines Integrals in dem Falle, wo die Coefficienten p lediglich als continuirliche reelle Functionen von x in einem gewissen reellen Intervalle gegeben sind, nach der von Peano zuerst befolgten Methode der successiven Approximationen (Torino Atti **22**; F. d. M. **19,** 308, 1887) geführt, nachdem die Eindeutigkeit einer etwaigen Lösung schon durch den vorher erwähnten Beweis, der den in Rede stehenden Fall mit umfasste, festgestellt war. Hr.

E. Beke. Ueber die Fundamentalgleichungen der homogenen linearen Differentialgleichungen. Ungar. Ber. **15,** 273-281.

„Wenn zwei homogene lineare Gleichungen ein gemeinsames Integral besitzen, dann haben die zu einem beliebigen singulären Punkte gehörenden Fundamentalgleichungen eine gemeinsame Wurzel.“ Von diesem Satze wird ein neuer Beweis gegeben mit Hülfe folgenden Determinantensatzes:

Es sei

$$f(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r} \qquad (k_1+k_2+\cdots+k_r = n)$$

und

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2a_1 & 3a_1^2 & \dots & (n-1)a_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6a_1 & \dots & (n-1)(n-2)a_1^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_1!\binom{n-1}{k_1}a_1^{n-k_1-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & a_r & a_r^2 & a_r^3 & \dots & a_r^{n-1} \\ 0 & 1 & 2a_r & 3a_r^2 & \dots & (n-1)a_r^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_r!\binom{n-1}{k_r}a_r^{n-k_r-2} \end{vmatrix};$$

dann ist, von einem numerischen Factor abgesehen, Δ gleich

$$[f^{(k_1)}(a_1)]^{k_1}[f^{(k_2)}(a_2)]^{k_2}\dots[f^{(k_r)}(a_3)]^{k_r},$$

wo $f^{(k_i)}(x)=\dfrac{d^{k_i}f(x)}{dx^{k_i}}$. Hr.

S. Pincherle. Sur la transformée d'Euler. J. für Math. **119**, 347-349.

Die von L. Schlesinger wiederholt behandelte „Euler'sche Transformation“ in der Theorie der linearen Differentialgleichungen wird vom Verf. mit Hülfe der von ihm sogenannten distributiven Functionaloperationen („Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif.“ Math. Ann. **49**; F. d. M. **28**, 347, 1897) auf synthetische Weise dargestellt. Hr.

L. W. Thomé. Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Coefficienten (2. Abhandlung). J. für Math. **119**, 131-147.

In der ersten Abhandlung des Verf. über den genannten Gegenstand (J. für Math. **115**; F. d. M. **26**, 351, 1895) war vorausgesetzt, dass die Zweige der verschiedenen algebraischen Functionen, die rational in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommen, beliebig combinirt werden durften, ohne dass einer der Nenner identisch gleich Null wurde. Hier wird diese Voraussetzung fallen gelassen; es kommen dann nur solche Combinationen der Zweige in Betracht, bei denen kein Nenner identisch verschwindet. Es wird nun zunächst gezeigt, wie eine Combination von Zweigen mehrerer algebraischer Functionen und die mit dieser zusammenhängenden Combinationen rational durch die unabhängige Variable und eine andere algebraische Function mit so viel Zweigen, als die Anzahl der unter einander zusammenhängenden Combinationen beträgt,

ausgedrückt werden kann. Durch die Einführung dieser Darstellung für die Zweige in den Coefficienten treten an die Stelle der ursprünglichen Differentialgleichung eine oder mehrere Differentialgleichungen, in deren Coefficienten nur je eine algebraische Function vorkommt, und bei denen kein Nenner identisch verschwindet. Die Behandlung dieser Differentialgleichungen fällt unter die in der ersten Abhandlung angestellten Untersuchungen. Daselbst war gezeigt worden, dass die linear unabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten die Integrale einer solchen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sind; die Ausdrücke dieser Coefficienten waren aber nur unter einer besonderen Voraussetzung ermittelt. Hier geschieht die Herleitung dieser rationalen Ausdrücke nach einem einheitlichen Verfahren völlig allgemein. Die Anzahl jener linear unabhängigen Integrale kann niedriger sein, als das Product aus der Ordnung der Differentialgleichung und der Anzahl aller Combinationen der Zweige in den Coefficienten beträgt. Es folgen dann Zusätze zu früheren Abhandlungen des Verf. in Bezug auf die Darstellung der Untergruppen in einer Gruppe von Integralen mit Exponenten, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Hr.

J. Horn. Ueber eine Klasse linearer Differentialgleichungen. (Erster Aufsatz.) Math. Ann. **50,** 525-556.

Die Untersuchungen, die der Verf. im ersten Teile des Aufsatzes „Verwendung asymptotischer Darstellungen etc.“ (Math. Ann. **49,** 453; F. d. M. **28,** 286, 1897) für eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durchgeführt hat, werden hier auf die Differentialgleichung

$$(1) \qquad P_0\frac{d^my}{dx^m}+P_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+P_{m-1}\frac{dy}{dx}+P_my=0,$$

deren Coefficienten $P_\mu = a_\mu x^p+\cdots$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ ganze Functionen p^{ten} Grades von x sind, unter der Voraussetzung ausgedehnt, dass a_0 nicht gleich Null ist und die m Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

$$a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\alpha+a_m = 0$$

verschieden sind. Die Laplace'sche Transformirte der Differentialgleichung (1) hat dann im Endlichen die singulären Stellen der Bestimmtheit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ während $z = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit ist. Die zur singulären Stelle α_h gehörige determinirende Gleichung hat die Wurzeln $0, 1, \ldots, p-2$ und λ_h. Indem nun ganzzahlige Werte von λ_h ausgeschlossen werden, erhält man die asymptotische Darstellung der Integrale von (1) durch die Normalreihen

$$S_h = e^{\alpha_h x}x^{-\lambda_h-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{A_{h\mu}}{x^\mu} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Poincaré'schen Untersuchungen über diese Darstellung werden so

weit ergänzt, dass es möglich ist, das Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ zu übersehen, während es sich bei Poincaré nur um das Verhalten der Integrale auf einem bestimmten, nach der singulären Stelle gehenden Wege handelt. Die für den allgemeinen Fall angedeuteten Entwickelungen werden für die Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung ausgeführt, und zuletzt wird die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit linearen Coefficienten behandelt. Hr.

J. Horn. Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. C. R. **126**, 205-208.

Der Verf. zeigt, wie man vermittelst einer Methode successiver Annäherungen, die L. Fuchs (Annali di Mat. (2) **4**, 1870) angewandt hat, zur asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung durch die Thomé'schen Normalreihen gelangen kann. Hr.

L. Schlesinger. Sur un problème de Riemann. C.R. **126**, 723-725.

In der nachgelassenen Abhandlung Riemann's „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen" wird folgendes Problem aufgestellt: „Es sind in der x-Ebene $\sigma+1$ Punkte $a_1, \dots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ gegeben, welche durch die Linien $l_1, \dots, l_\sigma$ mit einander verbunden sind, wobei $l_\varkappa$ von $a_\varkappa$ nach $a_{\varkappa+1}$ führt. Man bestimme n Functionen $y_1, \dots, y_n$ von x, die überall mit Ausnahme der Punkte $a_\varkappa$ sich regulär verhalten, beim Ueberschreiten der Linien l vorgeschriebene lineare Substitutionen $A_1, \dots, A_\sigma$ erfahren und nirgends von unendlich grosser Ordnung werden. Der Verf. zeigt, dass die Lösung dieses Problems, von dem Riemann nicht einmal die Möglichkeit beweist, für den Fall, dass alle Wurzeln der Fundamentalgleichungen bezüglich der Substitutionen A die Einheit zum Modul haben, mit Hülfe der Poincaré'schen Theorie der Fuchs'schen Functionen bewirkt werden kann.

Hr.

A. Boulanger. Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires homogènes intégrables algébriquement. J. de l'Éc. Pol. (2) **4**, 1-122.

Nach einer einleitenden Uebersicht über die bisherigen Leistungen in der Lösung des Problems der algebraischen Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen untersucht der Verf. die linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$(1) \qquad y''' + 3ay'' + 3by' + c = 0$$

und im Zusammenhange damit das System der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(2) \quad r = ap + bq + cz, \quad s = a'p + b'q + c'z, \quad t = a''p + b''q + c''z,$$

worin p, q, r, s, t die Derivirten erster und zweiter Ordnung von z und die a, b, c rationale Functionen von x und y sind, und löst die folgenden Probleme: 1. Alle Gleichungen der Form (1) und alle integrablen Systeme der Form (2) zu bilden, deren allgemeines Integral algebraisch ist. 2. Wenn eine Gleichung von der Form (1) oder ein System der Form (2) gegeben ist, zu entscheiden, ob das allgemeine Integral algebraisch ist. Da hier die in den linearen homogenen Substitutionen von drei Variabeln oder in den linearen nicht homogenen Substitutionen von zwei Variabeln enthaltenen endlichen Gruppen eine Rolle spielen, so beginnt der Verf. damit, von einer gegebenen endlichen Gruppe der letzteren in den Variabeln u, v und den ihnen entsprechenden beiden fundamentalen invarianten Functionen $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ ausgehend, vier Differentialinvarianten zu entwickeln, in denen die Derivirten von u und v bis zur zweiten Ordnung in rationalen Verbindungen auftreten, und die als die Ausdehnung der Schwarz'schen Invariante auf den Fall zweier Variabeln zu betrachten sind. Da sie sich durch die Substitutionen der betrachteten Gruppe nicht ändern, müssen sie rationale Functionen von x und y sein. Die numerische Berechnung dieser Ausdrücke wird für den Fall der Hesse'schen Gruppe von 216 Substitutionen (im ganzen werden nach der Aufzählung von Jordan und Valentiner acht endliche Gruppen unterschieden) vollständig durchgeführt. Im zweiten Abschnitt wird das System (2) unter der Voraussetzung ihrer Integrabilität auf die kanonische Form

$$(3)\quad \begin{cases} r = Mp - Iq + \left[2(M^2+IN) - \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial I}{\partial y}\right] z, \\ s = -Np - Mq + \left[IJ - MN + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial x}\right] z, \\ t = -Jp + Nq + \left[2(N^2+JM) - \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial J}{\partial x}\right] z \end{cases}$$

gebracht, wo I, J, M, N die vorher gebildeten Fundamentalinvarianten bedeuten. Setzt man für diese die einer endlichen Gruppe entsprechenden rationalen Ausdrücke in x und y ein, so ist das System (3) algebraisch integrabel, und sein allgemeines Integral erhält im Falle der Hesse'schen Gruppe die Form

$$A^3 x + 3B = 0, \quad A^3 y - 2D = 0, \quad A^6 z^3 - (\alpha u + \beta v + \gamma)^3 C^2 K = 0,$$

wo A, B, C, D, K Functionen von u, v sind, die explicite gegeben werden. Das allgemeinste algebraisch integrable System (2) geht aus (3) hervor durch die Substitutionen:

$$x = P(\xi, \eta), \quad y = Q(\xi, \eta), \quad z = \sqrt[n]{\chi(\xi, \eta)},$$

wo P, Q, χ drei willkürlich gewählte rationale Functionen von ξ und η sind und n eine ganze Zahl ist. — In der Differentialgleichung (1) werden die beiden Quotienten $U = y_2/y_1$, $V = y_3/y_1$ eingeführt, wo

y_1, y_2, y_3 drei linear unabhängige Integrale bedeuten. Wenn das Integral von (1) algebraisch ist, so bilden die verschiedenen Werte von $U(x)$ und $V(x)$, die einem gegebenen Werte von x entsprechen, eine endliche Gruppe von linearen Substitutionen. Ersetzt man in den dieser Gruppe entsprechenden fundamentalen invarianten Functionen f und g die Variabeln durch U und V, so muss $f(U, V) = P(x)$, $g(U, V) = Q(x)$ sein, wo P und Q rationale Functionen von x bedeuten. Aus (1) werden nun zwei simultane Differentialgleichungen vierter Ordnung in U und V abgeleitet, und indem U und V als Functionen von P und Q ausgedrückt werden, erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$(4) \qquad b-a^2-a' = F(P', Q', \ldots, P^{IV}, Q^{IV}),$$
$$c-b'-3ab+2a(a^2+a') = G(P', Q', \ldots, P^{IV}, Q^{IV}),$$

worin F und G rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen der Differentialinvarianten I, J, M, N (in denen x und y durch P und Q zu ersetzen sind) und ihrer ersten und zweiten Ableitungen sind. Soll (1) algebraisch integrirbar sein, so muss (4) durch zwei rationale Functionen befriedigt werden. Wählt man diese beiden rationalen Functionen willkürlich, so erhält man im Falle der Hesse'schen Gruppe als allgemeinen Typus der algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung die Form

$$y'''+3ay''+3(a^2+a'+F)y'+[G+F'+a''+a(a^2+a') + 3aF]y = 0,$$

wo a eine beliebige rationale Function bezeichnet mit der Bedingung, dass $e^{-\int a dx}$ eine algebraische Function ist. Der dritte Abschnitt ist der Auflösung der zweiten im Eingang gestellten Frage gewidmet. Die Schwierigkeit besteht hier in der Bestimmung einer oberen Grenze für den Grad gewisser in der algebraischen Lösung auftretenden rationalen Functionen, die auf drei verschiedenen Wegen ausgeführt wird. Zum Schluss wird eine Aequivalenz der betrachteten Differentialsysteme mit anderen Systemen, die eine Verallgemeinerung der Riccati'schen Gleichung bilden, nachgewiesen. Hr.

D. Sintzow. Rationale Integrale linearer Differentialgleichungen. Kasan Univ. No. 4, 5-6, 7-8, 9, 184 S. (Russisch.)

Die Abhandlung besteht aus vier Kapiteln. Im ersten wird die Frage der Aufsuchung der ganzen algebraischen Lösungen der linearen Differentialgleichungen und der Systeme von simultanen linearen Differentialgleichungen discutirt. Im Kap. 2 werden die Methoden von Liouville und W. Imschenetzky zur Aufstellung der rationalen Lösungen linearer Differentialgleichungen besprochen, und ihre Beziehung zur Fuchs'schen Theorie wird erklärt. Es wird der Fall untersucht, wenn der Coefficient der höchsten Derivirten in irreductible Factoren zerlegt

gegeben ist. Im Kap. 3 wird nach den ersten Angaben von Liouville und Fuchs gezeigt, wie die Frage über algebraische Lösungen einer gegebenen linearen Differentialgleichung auf die der rationalen Lösungen einer Reihe ebenfalls linearer Differentialgleichungen zurückgeführt wird. Endlich giebt Kap. 4 Anwendungen der Frage auf die rein algebraische und rein logarithmische Integration algebraischer Differentiale, wie auch auf die endliche Integration der Differentiale $e^x y\,dx$. Si.

A. Viterbi. Le equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici integrabili algebricamente, studiate in base alla teoria delle „funzioni fuchsiane" del Poincaré. (Cont. e fine; v. vol. **35**, 150-173.) Batt. G. **36**, 55-67.

In diesem letzten Teile der Arbeit (cf. F. d. M. **28**, 279, 1897) handelt es sich um die Bestimmung der Integrale der als algebraisch integrirbar vorausgesetzten Differentialgleichung (a) als algebraische Functionen der unabhängigen Variable x. Im Vorhergehenden war gezeigt worden, dass x und y Fuchs'sche Functionen von z sind mit den bezüglichen Gruppen G und g, wo g eine Untergruppe von G ist. Ist der Index derselben m, so gelten folgende Sätze: 1) Jedes der Integrale von (a) ist rational durch x und ein anderes der Integrale ausdrückbar. 2) Die irreductiblen algebraischen Gleichungen, denen bezüglich alle diese Integrale genügen, haben sämtlich denselben Grad m. Sie haben die Eigenschaft, dass sich jede ihrer Wurzeln durch x und eine andere Wurzel rational darstellen lässt. Die m Wurzeln verteilen sich in Gruppen derselben Gliederzahl λ, von denen eine die Form hat:

$$u \quad \vartheta(u) \quad \vartheta^2(u) \quad \dots \quad \vartheta^{\lambda-1}(u),$$

wo u eine Wurzel, $\vartheta(u)$ eine rationale Function von x und u vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade in u, und $\vartheta^{\varkappa}(u)$ die Operation $\vartheta\vartheta^{\varkappa-1}(u)$ bedeutet. Hr.

B. Igel. Theorie der Differentialgleichungen. Monatsh. f. Math. **9**, 124-131.

E. Grünfeld. Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn B. Igel. Monatsh. f. Math. **9**, 372.

Igel löst das Problem der Aufstellung gewisser Relationen, welche zwischen den Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung und den Lösungen ihrer i^{ten} Adjungirten stattfinden, bis auf eine Constantenbestimmung, für die er aus Beispielen eine Regel abstrahirt. Am Schlusse seiner Arbeit greift er Grünfeld in ungerechtfertigter Weise an; dieser wehrt in seiner Note den Angriff ab. Wbg.

H. Toussaint. Solutions singulières déduites de l'équation différentielle du Ier ordre. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **13**, 283-300.

Einfache Bemerkungen über das vielbehandelte Thema, ohne Anführung und Beachtung der Arbeiten anderer Forscher. Gz.

J. Bendixson. Sur les points singuliers des équations différentielles. Stockh. Öfv. **55,** 69-85, 139-151, 171-188, 635-658.

In den Untersuchungen über die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

wo X und Y gewöhnliche Potenzreihen von x und y sind, haben Briot und Bouquet zum ersten Mal das Studium derjenigen Integralcurven in Angriff genommen, welche durch eine gemeinschaftliche Nullstelle von X und Y gehen. Sie haben gezeigt, dass man durch eine Methode, welche der Puiseux'schen in der Theorie der algebraischen Functionen entspricht, das Studium dieser Integralcurven in ziemlich allgemeinen Fällen auf dasjenige für Gleichungen von der Form

$$(2) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = ay^m[1 - yf(y)] + x\psi(x, y)$$

(f und ψ sind gewöhnliche Potenzreihen) reduciren kann.

Bezüglich dieser Gleichung sind ihre Untersuchungen ergänzt durch die von Poincaré und Picard, und zwar zu einer vollständigen Erledigung der Frage dieser Integralcurven im Falle $n = m = 1$. Der allgemeine Fall war dagegen nicht erledigt.

Der Verf. tritt nun in diese Forschung ein mit Beschränkung auf die reellen Integrale.

In der ersten Abhandlung behandelt er die Gleichung (2) im Falle $n > 1$, $m = 1$. Diese kann dann geschrieben werden:

$$(3) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) - yf(x, y).$$

Nachdem zuerst die Frage für die Gleichung

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + F(x)$$

durch die Betrachtung des bekannten Ausdrucks des Integrals erledigt ist, wird sie für die Gleichung (3) mittels der Methode der successiven Annäherungen beantwortet. Hierbei ist das System der approximirenden Gleichungen:

$$x^n \frac{dy_1}{dx} = ay_1 - x\varphi(x),$$

$$x^n \frac{dy_n}{dx} = ay_n - x\varphi(x) - y_{n-1}f(x, y_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

In der zweiten Abhandlung wird (2) für den Fall $n = 1$, $m > 1$ behandelt. Die qualitative Bestimmung der Integrale wird durch eine

Methode bewirkt, welche die Frage auf die vorige ($m=1$, $n>1$) zurückführt. Unter quantitativem Gesichtspunkte wird die Frage mittels Anwendung successiver Annäherungen untersucht.

In der dritten Abhandlung wird die Gleichung (2) im allgemeinen mittels einer geometrischen Methode vom qualitativen Gesichtspunkte aus behandelt.

Die vierte Abhandlung ist dem Studium der Reduction der Gleichung (1) gewidmet.

Die oben genannte Methode von Briot und Bouquet ist nicht immer ausführbar, und auch in dem Falle, wo die Reduction ausführbar ist, haben sie keine Methode gegeben, um zu bestimmen, ob man alle Integrale, die durch den Nullpunkt gehen, erhalten kann.

Der Verf. giebt hier eine neue, allgemeine Reductionsmethode (welche analog ist der von Weierstrass in der Theorie der algebraischen Functionen angewandten), durch welche das Studium der genannten Integrale von (1) auf dasselbe Studium in Bezug auf mehrere Gleichungen von der Form (2) zurückgeführt wird, wenn eine der Zahlen m oder n gleich 1 ist (cf. die vorangehenden Abschnitte).

Wenn es wenigstens eine Integralcurve giebt, die durch den Nullpunkt geht und die eine bestimmte Tangente besitzt, so liefert diese Reductionsmethode alle Integrale, die durch den Nullpunkt gehen.

Hmg.

J. Horn. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. (Zweiter und dritter Teil.) J. für Math. **119**, 196-209, 267-290.

Die im ersten Teil (J. für Math. **118**; F. d. M. **28**, 278, 1897) für die Riccati'sche Differentialgleichung gewonnenen Methoden werden hier auf allgemeinere Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen. Im ersten Teil wird die Differentialgleichung

$$(1) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{A_0y^{m+2}+A_1y^{m+1}+\cdots+A_{m+2}}{B_0y^m+B_1y^{m-1}+\cdots+B_m},$$

in der $A_i=a_i+a_i'x+\cdots$, $B_i=b_i+b_i'x+\cdots$ für hinreichend kleine Werte von $|x|$ convergirende Potenzreihen bedeuten, unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten a, b alle reell sind, untersucht und das Verhalten der reellen Integrale, falls x sich als reelle positive Grösse der Grenze Null nähert ($\lim x=+0$), bestimmt. Es ergiebt sich, dass der Grenzwert eines derartigen Integrals, falls ein solcher vorhanden ist, der Gleichung $P(0,\alpha)=0$ genügt. Einer reellen Wurzel α dieser Gleichung entsprechen unendlich viele Integrale oder nur ein einziges Integral mit dem Grenzwerte α, je nachdem $\dfrac{P'(0,\alpha)}{Q(0,\alpha)}$ positiv oder negativ ist. Jedes Integral der Gleichung (1) ($k>0$), das für $\lim x=+0$ den Grenzwert ε_0 besitzt, wird durch die der Gleichung formell genügende, im all-

gemeinen divergente Reihe

$$\eta = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots$$

asymptotisch dargestellt.

Im dritten Teil wird die Differentialgleichung

$$(2) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} = G(x, y) = ay + \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ \mu = 0, \\ \lambda + \mu > 1 \end{pmatrix},$$

wo G eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläre Function mit complexen Coefficienten darstellt und k eine von Null verschiedene positive ganze Zahl bedeutet, untersucht und folgender Satz bewiesen: Je nachdem der reelle Teil von a positiv oder negativ ist, giebt es unendlich viele Integrale oder nur ein einziges Integral der Differentialgleichung (2), welches für $\lim x = +0$ den Grenzwert Null besitzt. Im Falle $R(a) > 0$ sind zwei positive Grössen x_0 und η_0 so vorhanden, dass jedes Integral y, dessen absoluter Betrag für $x = x_0$ kleiner als η_0 ist, für $\lim x = +0$ verschwindet. Dieser Satz führt zur asymptotischen Darstellung der fraglichen Integrale vermittelst der der Gleichung (2) formell genügenden Potenzreihe. Daran schliesst sich die asymptotische Darstellung der Integrale, wenn x mit dem constanten Argument ω zur Grenze 0 geht. Ferner wird unter der Voraussetzung, dass $G(x, y) = ay + \mathfrak{P}(x, y)$, $\mathfrak{P}(0, 0) = 0$ ist, y in eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n$ entwickelt, welche, wenn $R(a)$ positiv ist, in einem Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ (x_0 positiv und hinreichend klein) gleichmässig convergirt. Die Reihenglieder Y_n werden durch successive Integrationen ermittelt. In Verbindung mit dieser analytischen Darstellung von y steht eine asymptotische Darstellung in Form einer divergenten Reihe, die nach Potenzen von x und einem Exponentialausdrucke fortschreitet. Hr.

J. Horn. Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annäherungen. Math. Ann. **51**, 346-359.

J. Horn. Ueber eine Differentialgleichung erster Ordnung. Math. Ann. **51**, 360-368.

Im ersten Aufsatz wird die Differentialgleichung untersucht:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{1}{x}, y\right) = ay + f\left(\frac{1}{x}, y\right) \qquad (f(0, 0) = 0),$$

in der f in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ und y entwickelbar ist, die in der Umgebung von $x = \infty$, $y = 0$ convergirt. Es handelt sich um die asymptotische Darstellung der Integrale y, die sich für $\lim x = \infty$ der Grenze Null nähern. Diese war vom Verf. bereits früher im J. für Math. **118** und **119** (F. d. M. **28**, 278, 1897 und vorangehendes Referat) gegeben. Allein hier wird sie auf Grund der convergenten Reihen ent-

wickelt, die man nach der Methode der successiven Annäherungen für die bezeichneten Integrale erhält. Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern und hat den Vorteil, dass eine convergente Entwickelung neben der zur asymptotischen Darstellung dienenden im allgemeinen divergenten Reihe nach Potenzen von $1/x$ erscheint. In dem zweiten Aufsatz erfolgt eine asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung:

$$x\frac{dy}{dx} = g(y) + xy\,G(x, y),$$

die sich mit x der Grenze Null nähern. Hierin ist $g(y) = a_1 y^2 + a_2 y^3 + \cdots$ (a_1 von Null verschieden) und $G(x, y)$ eine Potenzreihe von x und y. Die Darstellung geschieht im Anschluss an den ersten Aufsatz und lautet:

$$y = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots + x\left(\frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots\right),$$

wo $c_1 = 1/a_1$ und c_2 eine willkürliche Constante ist, von der die folgenden Coefficienten abhängen, und zwischen x und t der Zusammenhang $x = e^{-t} t^{\frac{a_2}{a_1^2}}$ besteht. Die Reihe $\frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots$ ist für hinreichend grosse Werte von (t) convergent, während die Reihe $\frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \cdots$ im allgemeinen divergent ist. Hr.

C. Severini. Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 657-667.

C. Severini. Sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 950-959.

Bedeutet f in der Differentialgleichung erster Ordnung $dy/dx = f(x, y)$ eine reelle, in einem endlichen Gebiete C endliche und continuirliche Function von x, y, und findet sich innerhalb C die Lipschitz'sche Bedingung

$$\left|\frac{f(x, y) - f(x, y')}{y - y'}\right| < K$$

erfüllt (K eine endliche positive Zahl), so besteht folgender Satz:

Es seien $P_1(x, y), P_2(x, y), \ldots, P_\nu(x, y), \ldots$ eine Folge von innerhalb C endlichen und stetigen Functionen, die ferner den Bedingungen

$$|f(x, y) - P_\nu(x, y')| < g_\nu, \qquad \left|\frac{P_\nu(x, y) - P_\nu(x, y')}{y - y'}\right| < K_\nu$$

genügen, wo $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ positive abnehmende Zahlen von der Art sind, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Wert hat und K_ν für jedes ν endlich

ist; bezeichnet dann $y_\nu(x)$ das Integral von $dy/dx = P_\nu(x, y)$, das für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ (x_0, y_0 in C) annimmt, so nähern sich $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots$ in gleichem Grade für jedes x, für welches die Integrale bestimmt sind, einer Grenzfunction $y = v(x)$, die das Integral der gegebenen Differentialgleichung mit den Anfangswerten x_0, y_0 ist. Nimmt man für P_ν ganze rationale Functionen $G_\nu(x, y)$, so kann man nach der Picard'schen Methode der successiven Approximationen die Integrale $y_\nu(x)$ durch ganze rationale Functionen $R_\nu(x)$ ersetzen, so dass $\lim\limits_{\nu=\infty} y_\nu(x) = \lim\limits_{\nu=\infty} R_\nu(x) = v(x)$ ist. Indem man noch $\overline{R}_\nu(x) = R_{\nu+1}(x) - R_\nu(x)$ setzt, erhält man das Integral in Form der Reihe $v(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{R}_\nu(x)$. Dieses Resultat ist eine Ausdehnung der Weierstrass'schen Darstellung einer explicite gegebenen Function von x durch eine Reihe von ganzen rationalen Functionen auf Functionen, die mittels einer Differentialgleichung erster Ordnung definirt sind.

In der zweiten Note wird gezeigt, wie man die ganze rationale Function $G(x, y)$ wählen kann, dass der absolute Wert des Unterschiedes der Integrale $y(x)$ und $\overline{y}(x)$, wo $\overline{y}(x)$ das Integral von $dy/dx = G(x, y)$ ist, für alle Punkte einer bestimmten Umgebung von x_0 kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ist. Hr.

A. Cahen. Sur les équations différentielles du premier ordre. C. R. **127**, 1196-1199.

Painlevé hat zuerst die Aufgabe gestellt, alle Differentialgleichungen der Form $P(y', y, x) = 0$ (wo P ein Polynom von gegebenen Graden in y' und y mit in x analytischen Coefficienten bedeutet) zu bestimmen, deren allgemeines Integral nur eine gegebene Anzahl (n) von Werten beim Umlauf um bewegliche Verzweigungspunkte annimmt. Dieses Problem ist von ihm in dem Falle gelöst worden, wo P vom ersten Grade in y' ist. Der Verf. löst diese Frage für die Gleichungen vom zweiten Grade in y'. Hr.

M. Feldblum. Theorie der Riccati'schen Gleichung und Eigenschaften der sie befriedigenden Function. Aus Warschau Univ. 1898 No. V, VII und 1899, IV + 180 S. 8°. (Russisch.)

Die Abhandlung teilt sich in drei Abschnitte. I. Geschichtliche Einleitung und Litteraturverzeichnis (S. 1—14). Kap. I: Integration der eigentlichen Riccati'schen Gleichung (Integrationsfälle, Kettenbruchentwickelung des allgemeinen Integrales, Integration mittels unendlicher Reihen, durch bestimmte Integrale und durch Bessel'sche Functionen (S. 15-41). Kap. II (S. 42-84). Allgemeine Ansichten von Liouville über die Klassification der Transcendenten und ihre Anwendung zum Beweise des Satzes, dass die bekannten Integrationsfälle die einzigen sind. — Der zweite Abschnitt (Teil I, Kap. III; Teil II, Kap. I, II) wird den Eigenschaften der allgemeinen Riccati'schen Gleichung gewidmet:

nämlich erstens wird angegeben, wie das allgemeine Integral aus 1, 2 oder 3 particularen Lösungen abzuleiten ist, und nach Königsberger wird bewiesen, dass diese Gleichung die einzige Gleichung erster Ordnung ist, deren allgemeines Integral aus particularen Lösungen construirbar ist (Teil I, Kap. III, S. 82 - 90). Es folgt der Satz, dass das anharmonische Verhältnis von 4 particularen Lösungen constant ist, und es wird gezeigt, in welcher Weise das allgemeine Integral von der willkürlichen Constante abhängt (Kap. II, S. 91 - 94). Die Charakteristik der singulären Punkte (es gebe feste singuläre Stellen und ausserdem nur ausserwesentlich singuläre Stellen erster Ordnung) und das Verhalten des Integrals beim Umlauf um eine feste singuläre Stelle bilden den Inhalt des II. Kapitels Teil II (S. 94 - 114). — Der dritte Abschnitt (S. 115 - 180) beschäftigt sich mit einer kurzen Zusammenstellung verschiedener Aufgaben der Analysis (Kap. I), Geometrie (Kap. II) und Mechanik (Kap. III), welche auf Riccati'sche Gleichungen führen. Si.

W. Heymann. Ueber die Differentialgleichung

$$\varphi(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\psi(x)y\frac{dy}{dx}+\chi(x)y^2+\theta(x)=0.$$

J. für Math. **119**, 253-258.

Die von Petrovitsch in den C. R. **122**, 1261 bewirkte Zurückführung der angeführten Gleichung auf die Normalform (F. d. M. **27**, 248, 1896) geschieht hier auf einfachere Weise. Hr.

É. Delassus. Sur les courbes intégrales. Darboux Bull. (2) **22**, 318-320.

Die Bestimmung der Integralcurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die auf einer gegebenen Oberfläche liegen, führt naturgemäss auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Geht man aber bei der Behandlung des Problems von dem vollständigen Integrale aus, so gelangt man zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dieses auffallende Resultat erklärt sich daraus, dass die gesuchten Curven durch singuläre Integrale der letzteren Gleichung gegeben sind, und führt zu einer geometrischen Eigenschaft der Integralcurven überhaupt, unabhängig von der gegebenen Oberfläche. Hr.

G. Wallenberg. Ueber nicht lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. J. für Math. **119**, 87-113.

Die Hauptschwierigkeit in der Behandlung von nicht linearen algebraischen Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung besteht darin, dass nicht nur die Verzweigungspunkte, sondern auch die Unbestimmtheitsstellen mit oder ohne Verzweigung der Integrale mit den Anfangswerten verschiebbar sind. Es bietet sich hier naturgemäss das

Problem, aus den Differentialgleichungen höherer Ordnung diejenigen auszuscheiden, deren Unbestimmtheitsstellen fest sind. Um zu diesem in seiner Allgemeinheit noch nicht angreifbaren Problem einen Zugang zu gewinnen, wählt der Verf. den Fall der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Behandlung dadurch erleichtert wird, dass ihre Integration auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Im ersten Teile wird die homogene Differentialgleichung von der Form (1) $f(y, y', y'') = 0$ untersucht, in der die unabhängige Veränderliche z nicht vorkommt. Die Substitution $y':y = w$ führt zur Differentialgleichung erster Ordnung der Form $g(w, w') = 0$, die keine festen singulären Punkte im Endlichen besitzt. Die verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen von (1) sind dann unter den Polen von w zu suchen, und die Bedingung dafür, dass diese nicht wesentlich singuläre Punkte der Integrale von (1) darstellen, ist die, dass in der Entwickelung von w' nach fallenden Potenzen von w der Exponent der höchsten Potenz von w, falls er grösser als 1 ist, $\geqq 2$ sein muss. Die Bedingungen dafür, dass die Integrale von (1) auch keine Verzweigungspunkte besitzen, also überall eindeutig sind, lassen sich dann mit Benutzung der Resultate der Briot-Bouquet'schen Untersuchung vollständig angeben. Im Anschluss daran wird der functionelle Charakter der diesen Bedingungen genügenden Integrale festgestellt. Im zweiten Teil wird die homogene Differentialgleichung von der Form (2) $f(z, y, y', y'') = 0$, in der z vorkommt, behandelt. Die integrirende Differentialgleichung erster Ordnung lautet $g(z, w, w') = 0$. Hier führt die Heranziehung der Fuchs'schen Bedingungen für die Existenz von nur festen Verzweigungspunkten bei Differentialgleichungen erster Ordnung zur Entscheidung der Frage, wann die Gleichungen der Form (2) nur feste singuläre Punkte besitzen. Zur näheren Charakterisirung der dieser Bedingung genügenden Differentialgleichungen (2) dienen die Resultate der Untersuchungen von Poincaré in der Abhandlung „Sur un théorème de M. Fuchs." Eine Anzahl von Beispielen dient zur Erläuterung der allgemeinen Untersuchung sowie zur Hervorhebung gewisser charakteristischer Eigentümlichkeiten der Integrale, die erst bei algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung auftreten. Hr.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. C. R. **126,** 1185-1188.

P. Painlevé. Sur la détermination explicite des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. C. R. **126,** 1329-1332.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. C. R. **126,** 1697-1700, **127,** 541-544, 945-948.

Ist (1) $y'' = R(x, y, y')$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der R rational in y', algebraisch in y und analytisch in x ist, so handelt es sich darum, alle Gleichungen (1) zu bestimmen, deren

Integrale feste, d. h. mit den Integrationsconstanten nicht veränderliche Verzweigungspunkte besitzen. Die Schwierigkeit der Untersuchung besteht hier in der möglichen Existenz beweglicher wesentlicher Singularitäten. Das ohne Beweis angegebene Resultat ist folgendes: Alle gesuchten Gleichungen lassen sich durch algebraische Transformationen auf eine endliche Anzahl von Typen, die explicite hingeschrieben werden, zurückführen. Unter ihnen giebt es sechs, in denen das Integral eine transcendente Function der Constanten ist, wie man auch diese wählen möge, und die daher auf wahrhaft neue Transcendenten führen.

Hr.

M. Chini. Sull'equazione differenziale del 2° ordine lineare omogenea. Torino Atti **33**, 737-745.

Beweis des Satzes, dass die lineare homogene Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der das Product von m particularen Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, die Eigenschaft hat, ihrer Adjungirten gleich oder entgegengesetzt gleich zu sein, je nachdem m ungerade oder gerade ist. In Anwendung dieses Satzes für $m=2$ wird gezeigt, dass die Integration der Gleichung $ay''+\frac{1}{2}a'y'+by = K/y^3$, wo a und b beliebige Functionen von x sind, und K eine willkürliche Constante ist, von derjenigen der Gleichung $ay''+\frac{1}{2}a'y'+by=0$ in der Weise abhängt, dass jedes Integral der ersten als mittlere Proportionale zweier particularen Lösungen der zweiten dargestellt werden kann. Hr.

M. de Sparre. Note au sujet de l'intégration approchée de certaines équations différentielles linéaires du second ordre. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 111-117.

In vielen Fällen, besonders in der angewandten Mechanik, kommt es vor, dass die in einer Differentialgleichung für y auftretenden Coefficienten nur näherungsweise bekannt sind. Alsdann wird jeder Ausdruck für y, der, in der linken Seite der Differentialgleichung substituirt, dieser einen kleineren Wert giebt, als der Irrtum beträgt, der aus der Unsicherheit der Coefficienten entspringen kann, als eine für den vorliegenden Zweck hinreichende Lösung betrachtet werden können. Von diesem Gesichtspunkte aus behandelt der Verf. folgende zwei Formen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\alpha^2\varphi(x)y=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\alpha f(x)\frac{dy}{dx}+\alpha^p\varphi(x)y=0,$$

wo α eine sehr grosse absolute Zahl ist, x, $f(x)$ und $\varphi(x)$ aber endliche, nicht sehr grosse Werte innerhalb der betrachteten Grenzen haben sollen. Die erste Gleichung entspricht dem Falle, dass der Coefficient von y allein, die zweite (p beliebig) dem, dass die Coefficienten von y und dy/dx beide sehr gross sind. Als hinreichende Lösung wird ein

solcher Wert y betrachtet, der, in den linken Seiten substituirt, einen Ausdruck ergiebt, der $1/\alpha$ als Factor enthält. Eine solche Lösung wird für die erste Gleichung in der Form

$$y = \frac{\left\{ A e^{a\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx + 1/a\int\zeta_2\,dx} + B e^{-a\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - 1/a\int\zeta_2\,dx} \right\} e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}$$

erhalten, wo

$$\zeta_2 = -\frac{\zeta_1^2 + f(x)\zeta_1 + \zeta_1'}{2z}, \qquad \zeta_1 = -\frac{z'}{2z} - \tfrac{1}{2}f(x)$$

und A und B willkürliche Constanten sind. Die zweite der obigen Gleichungen lässt sich auf die erste zurückführen, wird aber auch direct behandelt. Bemerkenswert ist die Anwendung obiger Formel zur Herleitung angenäherter Ausdrücke der Integrale der Gleichung $xd^2y/dx^2 + (2n+1)\,dy/dx + xy = 0$ für sehr grosse Werte von x, da die Substitution $x = \alpha\xi$ zur ersten der obigen Gleichungsformen führt. Man erhält

$$y = \frac{1}{x^n\sqrt{x}}\left(C\cos\left(x + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2x}\right) + D\sin\left(x + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2x}\right)\right).$$

Den Beschluss bilden Bemerkungen für den Fall, dass die lineare Differentialgleichung nicht homogen ist. Hr.

H. Mitchell. The singular solutions of a certain differential equation of the second order. Edinb. M. S. Proc. **16,** 64-67.

Die behandelte Gleichung ist die folgende:

$$(y'^2 - yy'')^2 = n^2(y'^2 + ay''^2).$$

Es werden alle singulären Lösungen, die kaum in den gewöhnlichen Lehrbüchern je berücksichtigt sein dürften, sorgfältig ermittelt.

Gbs. (Lp.)

E. B. van Vleck. On the polynomials of Stieltjes. American M. S. Bull. (2) **4,** 426-438.

Unter einem Stieltjes'schen Polynome versteht der Verf. jedes Polynom, das einer regulären linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda_1}{x-e_1} + \cdots + \frac{1-\lambda_r}{x-e_r}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\varphi(x)}{(x-e_1)\ldots(x-e_r)}\,y = 0,$$

wo $\varphi(x) = A_0x^{r-2} + A_1x^{r-3} + \cdots + A_{r-2}$ ist, die singulären Punkte $e_1, e_2, \ldots, e_r, \infty$ alle reell sind und r Exponenten-Differenzen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (algebraisch) kleiner als 1 sind. Die Untersuchungen sind meist auf den Fall $r = 3$ beschränkt, so dass $\varphi(x) = Ax - B$ gesetzt werden

kann; ausserdem wird $e_1 < e_2 < e_3$ angenommen. Wenn die Lage der drei singulären Punkte im Endlichen, sowie ihre Exponenten-Differenzen gegeben sind, so sind die accessorischen Parameter A und B vollständig durch die Forderung bestimmt, dass eine Lösung der Gleichung ein Polynom n^{ten} Grades sein soll. Der erste Parameter ist das Product der beiden Exponenten für ∞, nämlich $-n$ und $n-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+2$; der Wert des zweiten ergiebt sich aus einer Gleichung n^{ten} Grades. Somit giebt es eine Gruppe von $n+1$ Polynomen, die zu demselben System von Exponenten-Differenzen gehören. Wenn die Exponenten-Differenzen für die drei singulären Punkte im Endlichen alle den Wert $\frac{1}{2}$ haben, so besteht die Gruppe aus Lamé'schen Polynomen. Diese haben bekanntlich die Eigenschaft, dass alle ihre Wurzeln reell sind und zwischen e_1 und e_3 liegen. F. Klein hat ferner (Math. Ann. **18**, 237-246; F. d. M. **13**, 406, 1881) gezeigt, dass sie von einander durch die Art unterschieden werden können, wie ihre n Wurzeln auf die Strecken e_1e_2 und e_2e_3 verteilt sind. Jeder der $n+1$ Arten der Zuordnung der n Wurzeln auf die beiden Strecken entspricht demnach ein und nur ein Polynom. Dieses Resultat gilt, wie Stieltjes bewies (Acta Math. **6**; F. d. M. **17**, 310, 1885), auch wenn die Exponenten-Differenzen beliebige Werte haben, die algebraisch kleiner als 1 sind. Jüngst noch hat F. Klein in seinen Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (F. d. M. **26**, 334, 1895) bemerkt, dass die $n+1$ Werte von $B' = B/A$, die zu einer Gruppe von $n+1$ Lamé'schen Polynomen gehören, alle zwischen e_1 und e_3 eingeschlossen sind. Falls man dieselben in der Folge $B'_1 < B'_2 < \cdots < B'_{n+1}$ anordnet, ist die Anzahl der Wurzeln der entsprechenden Polynome, die in e_1e_2 enthalten sind, der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, n$, in $e_2e_3: n, n-1, \ldots, 1, 0$. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist nun zunächst, diese Schlüsse als gültig zu erweisen für alle Werte der λ_i, die kleiner als 1 sind. Dabei ergiebt sich, dass zwischen zwei Folgewurzeln jedes Polynoms in der Reihe eine und nur eine Wurzel des vorangehenden oder folgenden Polynoms liegt. Diese Sätze beruhen auf einer Anzahl neuer Theoreme bezüglich der Wurzeln der Fundamentalintegrale P^{λ_i}, P^0_i, die zu den singulären Punkten e_i einer Differentialgleichung der obigen Form gehören ($r = 3$). Zum Schlusse wird gezeigt, dass die Wurzeln des accessorischen Polynoms φ in der allgemeinen Differentialgleichung (r beliebig) für ein Stieltjes'sches Polynom alle reell sind und wie die Wurzeln des letzteren zwischen den beiden äussersten singulären Punkten e_1 und e_r liegen. (Bericht nach der Einleitung des Aufsatzes.) Lp.

M. Bôcher. The roots of polynomials which satisfy certain linear differential equations of the second order. American M. S. Bull. (2) **4**, 256-258.

Bericht auf S. 74 dieses Bandes.

M. Bôcher. The theorems of oscillation of Sturm and Klein. American M. S. Bull. (2) **4**, 295-313, 365-376; **5**, 22-43.

Wie in F. d. M. **28**, 409, 1897 berichtet ist, hat Bôcher damals die in Liouville's Journal **1** (1836) veröffentlichte Abhandlung von Ch. Sturm zur Untersuchung der Wurzeln der Bessel'schen Functionen verwertet. In der vorliegenden Arbeit werden die Resultate der Sturm'schen Arbeit auf strengerem Wege hergeleitet und in der von F. Klein angegebenen Richtung ausgedehnt. Um den von Klein stammenden Namen des Oscillationstheorems zu erläutern, setzen wir zunächst das Sturm'sche Oscillationstheorem hierher (S. 305): Wenn $\varphi(x, \lambda)$ unter der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ und $L > \lambda > l$ eine einwertige stetige Function von (x, λ) ist, und wenn unter der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ und $L > \lambda' > \lambda'' > l$ $\varphi(x, \lambda') \geqq \varphi(x, \lambda'')$, wo das Gleichheitszeichen nicht für alle Werte von x in der Umgebung von a gilt, und wenn endlich, wie gross auch die Grösse M und wie klein auch die Grösse m gewählt werden mag, es möglich ist, λ einerseits so nahe an L zu wählen, dass für alle Werte von x im Intervalle (ab) $\varphi(x, \lambda) > M$, und andererseits so nahe an l, dass für alle Werte von x im Intervalle $(a\,b)$ $\varphi(x,\lambda) < m$, dann giebt es einen und nur einen Wert von λ $(L > \lambda > l)$, für den die Differentialgleichung $d^2y/dx^2 = \varphi(x, \lambda)y$ eine Lösung besitzt, die n Wurzeln grösser als a und kleiner als b besitzt und den Bedingungen genügt: (1) $\alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0$, (2) $\beta' y(b) - \beta y'(b) = 0$. Hier ist n eine willkürlich gewählte positive Zahl oder Null und $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ sind willkürlich gewählte reelle Grössen mit der thatsächlichen Beschränkung, dass α und α', sowie β und β' nicht beide Null sein dürfen. — Klein'sches Oscillationstheorem: Es seien $a_1\,b_1$ und $a_2\,b_2$ zwei solche Strecken der x-Axe, für welche $a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2$ ist und keine der Ungleichungen $a_1 < e_i < b$ oder $a_2 < e_i < b_2$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt; man ordne nun jedem der Punkte a_1, b_1, a_2, b_2 eine der Bedingungen $y = 0$ oder $dy/dt = 0$ zu; endlich seien n_1 und n_2 zwei beliebige positive Zahlen oder Null. Dann giebt es nur ein Wertepaar A, B, für welches die Lamé'sche Gleichung eine erste Lösung hat, welche die vorgeschriebenen Bedingungen bei a_1 und b_1 befriedigt und n_1 Wurzeln in der Strecke $a_1 < x < b_1$ hat, und eine zweite Lösung, welche die vorgeschriebenen Bedingungen bei a_2 und b_2 befriedigt und n_2 Wurzeln in der Strecke $a_2 < x < b_2$ hat (S. 311).

In den beiden ersten Paragraphen des ersten Artikels beweist der Verf. diejenigen Resultate von Sturm, welche zur Herleitung seines Oscillationstheorems erforderlich sind; hierbei wird zwar die Ordnung der Sturm'schen Darstellung geändert, seine Methoden werden jedoch im wesentlichen beibehalten. Während das Sturm'sche Theorem sich auf eine Differentialgleichung mit nur einem Parameter bezieht, hat Klein dasselbe auf gewisse Gleichungen mit mehreren Parametern ausgedehnt. Der Verf. beschränkt sich in § 3 auf die Lamé'sche Gleichung und betrachtet auch dann nur den einfachsten, aber gleich-

zeitig den wichtigsten Fall des Klein'schen Oscillationstheorems, dessen Wortlaut oben gegeben ist.

Im zweiten Artikel werden die Resultate von § 3 Art. I nicht benutzt; jene Resultate erweisen sich vielmehr als sehr specielle Fälle der jetzt gefundenen. In § 1 Art. II werden zuerst zwei Sturm'sche Sätze nach einem neuen Verfahren bewiesen, und dann werden sie zur Herstellung einer etwas allgemeineren Form des Sturm'schen Oscillationstheorems verwendet. In § 2 wird das Klein'sche Oscillationstheorem in einer sehr allgemeinen Form bewiesen, obschon die Betrachtung auf den Fall beschränkt ist (wie im ersten Artikel), in dem die Coefficienten der binomischen Differentialgleichungen stetig sind. Die Wahrheit der in § 2 abgeleiteten Theoreme war zum Teil schon von Klein vermutungsweise behauptet und durch geometrische Ueberlegungen wahrscheinlich gemacht worden.

Der Zweck des dritten Artikels ist dann, die soweit gewonnenen Resultate auf einige Fälle auszudehnen, in welchen die Coefficienten der fraglichen Differentialgleichung nicht mehr stetig sind innerhalb des ganzen betrachteten Intervalles. Solche Ausdehnungen werden in den §§ 2 und 3 bewirkt; zu diesem Behufe müssen jedoch in § 1 einige grundlegende Sätze bezüglich linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit unstetigen Coefficienten aufgestellt werden, welche Ergebnisse auch, abgesehen von den besonderen Anwendungen an dieser Stelle, ein selbständiges Interesse haben.

Da einige der Resultate des Verf. mit denen zusammentreffen, die Van Vleck gefunden hat (vergl. das vorangehende Referat), so versichert Bôcher am Schlusse, dass er seine Untersuchungen schon vor dem Erscheinen der Abhandlung „On the polynomials of Stieltjes" beendigt hatte. Lp.

L. Crawford. On the second solutions of Lamé's equation
$$\frac{d^2U}{du^2} = u\{n(n+1)\wp u + B\}.$$
Edinb. M. S. Proc. **16**, 57-60.

Die betrachteten Lösungen haben die Gestalt:
$$(2n+1)\,U_n \int_0^u \frac{du}{(U_n)^2},$$
in der n eine ganze Zahl, U_n eine Lösung in endlicher Gliederzahl bedeutet. Die Lösungen werden durch directe Integration erhalten.

Gbs. (Lp.)

W. A. Anissimoff. Zur Frage nach der Form der Integrale der Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten. Mosk. Math. Samml. **20**, 411-430. (Russisch.)

Berichtigung einiger Fehler in der früheren Arbeit desselben Verf.

„Form der Integrale der Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten“ (Warschau Univ. 1896, No. II u. III; vgl. F. d. M. **27**, 258, 1896 u. **28**, 283, 1897) und Abdruck des diese Arbeit betreffenden Briefwechsels des Verf. mit D. Hilbert. Si.

L. PICART. Sur l'équation de Gyldén-Lindstedt généralisée. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 103-107.

Die Differentialgleichung $d^2x/dt^2+q^2(x)+x\varphi(t)=0$, in welcher $\varphi(t)=q_1\cos 2t+q_2\cos 4t+\cdots+q_n\cos 2nt$ ist ($q_1, q_2, \ldots, q_n$ sehr kleine Constanten), besitzt bekanntlich zwei particulare Lösungen von der Form $e^{iht}f(t)$ und $e^{-iht}f_1(t)$, wo h eine Constante bedeutet, f und f_1 periodische Functionen von t mit der Periode 2π sind. Wenn h reell ist, so sagt man, es finde Stabilität statt. In der Gyldén-Lindstedt'schen Gleichung reducirt sich $\varphi(t)$ auf das erste Glied, $q_1\cos 2t$, und Tisserand hat bewiesen, dass Stabilität stattfindet, wenn q (das immer positiv genommen werden kann) keine der Zahlen 1 oder 2 ist. Der Verf. weist nach, dass Stabilität besteht, wenn q keine Zahl aus der Folge $1, 2, \ldots, 2n$ ist. Lp.

L. POCHHAMMER. Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen vierter Ordnung. Math. Ann. **50**, 285-302.

Die Entwickelungen dieses Aufsatzes schliessen sich nach Inhalt und Form an die in den Math. Ann. **46**, 584-605 veröffentlichte Abhandlung des Verf. an: „Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung“. Nach derselben Methode wie dort werden die Differentialgleichungen der F-Reihen vierter Ordnung durch Substitution eines bestimmten Integrals auf die einer F-Reihe dritter Ordnung zurückgeführt. Da nun die particularen Integrale der letzteren Differentialgleichung in Gestalt bestimmter Doppelintegrale mit complexem Integrationsweg dargestellt werden, so erhält man bei den Differentialgleichungen der F-Reihen vierter Ordnung dreifache bestimmte Integrale als particulare Lösungen. Ueber den Ausdruck der F-Reihen n^{ter} Ordnung, sowie über die Form der Differentialgleichung, der sie genügen, s. das Referat in F. d. M. **25**, 540, 1893. Hr.

O. TEDONE. Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. Annali di Mat. (3) **1**, 283-312.

Das zu integrirende Gleichungssystem lautet:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial\theta}{\partial x_l}-a^2\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2\varpi_{l,i}}{\partial x_i}-X_l=0\quad(l=1,2,\ldots,m)$$

wo

$$\theta=\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\qquad \varpi_{h,k}=\frac{\partial u_h}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

und die X_l gegebene Functionen der $m+1$ Variabeln $x, x_1, \dots, x_m$ bedeuten. Denkt man sich x als die Zeit und $x_1, \dots, x_m$ als orthogonale Coordinaten in einem linearen n-dimensionalen Raume, so stellen die Gleichungen (1) die elastische Bewegung eines isotropen Körpers in diesem Raume dar. Die u_i bedeuten die Componenten der Verrückung, θ die Dilatation und $\varpi_{h,k}$ die Rotation des Körpers um die Schnitte je zweier der Coordinatenebenen. Zum Zwecke der Integration betrachtet der Verf. $x, x_1, \dots, x_m$ als die Coordinaten eines Punktes in einem linearen $(m+1)$-dimensionalen Raume, bezeichnet mit S_{m+1} einen endlichen Teil dieses Raumes, mit Σ_m die ihn begrenzende Mannigfaltigkeit von m Dimensionen und wendet auf den Raum S_{m+1} das Green'sche Theorem an in der Gestalt

$$\int\limits_{S_{m+1}}\left(\sum_1^m{}_i\, X_i u_i' - \sum_1^m{}_i\, X_i' u_i\right) dS_{m+1} + \int\limits_{\Sigma_m}\left(\sum_1^m{}_i\, U_i u_i' - \sum_1^m{}_i\, U_i' u_i\right) d\Sigma_m = 0,$$

wo
$$U_l = \frac{\partial u_l}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - b^2\theta\frac{\partial x_l}{\partial n} - a^2\sum_1^m{}_i\,\varpi_{l,i}\frac{\partial x_i}{\partial n}$$

und n die Richtung der Normale nach dem Innern von S_{m+1} bezeichnet. $u_1', \dots, u_m'$ ist ein zweites, dem System (1) genügendes Functionensystem, wenn in demselben für die X_l andere Functionen X_l' substituirt werden. Die Green'sche Formel dient zum Ausgangspunkte eines Integrationsverfahrens, durch welches die Werte der u_l in einem beliebigen Punkte $(x, x_1, \dots, x_m)$ mittels der Werte bestimmt werden, welche die u_l und ihre Derivirten erster Ordnung in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ_m annehmen, die von allen Parallelen zur x-Axe nur in einem Punkte geschnitten wird, im übrigen aber beliebig ist. Hr.

J. Eiesland. Note on the integration of a certain system of differential equations. American J. **20**, 245-252.

Der Verf. behandelt das folgende, von Craig aufgestellte System von vier linearen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = p_{12}\beta - p_{13}\gamma + p_{14}\delta, & \dfrac{d\beta}{dt} = -p_{12}\alpha + p_{23}\gamma + p_{24}\delta, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = p_{13}\alpha - p_{23}\beta + p_{34}\delta, & \dfrac{d\delta}{dt} = -p_{14}\alpha - p_{24}\beta - p_{34}\gamma, \end{cases}$$

dem durch das Integral $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = \text{const.}$ genügt wird. In dem Falle, dass die Constante von Null verschieden ist, wird das System (1) durch die Substitution $\gamma = \varrho\alpha + \sigma\beta + \tau\delta$ in ein verallgemeinertes Riccati'sches System mit den drei abhängigen Variabeln ϱ, σ, τ transformirt. Ist eine Particularlösung derselben bekannt, so führt die Substitution:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\gamma - \varrho\alpha - \sigma\beta - \tau\delta}, \qquad \mu_1 = \frac{\beta}{\gamma - \varrho\alpha - \sigma\beta - \tau\delta},$$
$$\nu_1 = \frac{\gamma}{\gamma - \varrho\alpha - \sigma\beta - \tau\delta}$$

auf ein lineares Differentialgleichungssystem für λ_1, μ_1, ν_1 als Functionen von t. Die Substitution $\nu_1 = \varrho_1\lambda_1 + \sigma_1\mu_1 + \tau_1$ führt dieses System in ein verallgemeinertes Riccati'sches System mit den zwei Variabeln ϱ_1 und σ_1 über, nach dessen Integration τ_1 durch zwei Quadraturen erhalten wird. Das Riccati'sche System wird durch ein dem obigen analoges Verfahren in ein lineares Differentialgleichungssystem mit zwei Variabeln transformirt, und die Kenntnis einer Particularlösung des letzteren reducirt dann die Integration von (1) auf die einer gewöhnlichen Riccati'schen Gleichung und zwei Quadraturen. Einfacher gestaltet sich das Verfahren, wenn eine Lösung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von (1), die der Bedingung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = 0$ genügt, gegeben ist. Zur vollständigen Integration sind dann nur vier Quadraturen, und falls die p reell sind, sogar nur zwei Quadraturen erforderlich. Hr.

Hj. Mellin. Ueber die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale. Acta Math. **22**, 41-54.

Es wird gezeigt, dass die Methode der Integration linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale auf Systeme simultaner linearer Differentialgleichungen übertragen werden kann. Aus der Reihe der hierfür entwickelten Sätze führen wir zur Charakterisirung der Methode den ersten an: Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\dfrac{d}{dx}\right) x^\nu \varphi + \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\dfrac{d}{dx}\right) x^\nu \psi = 0, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-\dfrac{d}{dx}\right) x^\nu \varphi + \sum\limits_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-\dfrac{d}{dx}\right) x^\nu \psi = 0, \end{cases}$$

und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass die Bedingungen

$$\int\limits_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]dx = 0,$$
$$\int\limits_{(x)} \frac{d}{dx}[F(e^{ux}, \varphi) + G(e^{ux}, \psi)]dx = 0$$

erfüllt werden, wo $f(\chi, \varphi)$, $g(\chi, \varphi)$, $F(\chi, \varphi)$, $G(\chi, \varphi)$ wohl definirte, in χ und φ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, so bilden

$$\varphi(u) = \int\limits_{(x)} e^{ux}\varphi(x)dx, \quad \psi(u) = \int\limits_{(x)} e^{ux}\psi(x)dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(2)\left\{\begin{array}{l}\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\varphi+\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\psi=0,\\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\varphi+\sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\psi=0.\end{array}\right.$$

Umgekehrt lässt sich das System (1) durch Lösungen von (2) mittels bestimmter Integrale integriren. Hr.

H. Grönwall. **Om system af linjära totala differentialekvationer särskildt sådana med $2n$-periodiska koefficienter.** Diss. Upsala. 52 S.

H. Grönwall. **Eine Verallgemeinerung der Lamé'schen Differentialgleichung.** Stockh. Öfv. 1898, No. 6.

H. Grönwall. **Sur les singularités des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales.** Stockh. Bihang **24,** 22 S.

Die Dissertation zerfällt in drei Teile. In der ersten Abteilung derselben wird allgemein ein System der Form

$$(1)\qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\gamma}=\sum_\beta a_{\alpha\beta\gamma}(x_1,\ldots,x_n)z_\beta \qquad \begin{pmatrix}\alpha,\beta=1,2,\ldots,m\\ \gamma=1,2,\ldots,n\end{pmatrix},$$

wo $a_{\alpha\beta\gamma}$ eindeutige analytische Functionen sind, deren Singularitäten durch eine Gleichung $\Phi(x_1,\ldots,x_n)=0$ gegeben sind (Φ eine ganze Function), unter der Annahme in Betracht gezogen, dass das System ein Fundamentalsystem von m linear unabhängigen Particularintegralen $z_{\alpha 1},\ldots,z_{\alpha m}$ besitzt, so dass das allgemeine Integral die Form annimmt

$$z_\alpha=\sum c_\beta z_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots,m).$$

Die einzigen Singularitäten der Integrale sind die Singularitäten der Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$, und bei der Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes stellt es sich als notwendig heraus, die verschiedenen irreductiblen ganzen Functionen $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $f_2(x_1,\ldots,x_n)$, ..., die Factoren von Φ sind, auszuscheiden (unter einer irreductiblen ganzen Function wird dabei eine solche verstanden, die nicht eine Spaltung in zwei ganze Factoren, welche beide Nullstellen besitzen, zulässt). Es wird ausführlich auf die Eigenschaften der Integrale eingegangen, wobei zugleich die Untersuchungen von Fuchs, Horn u. a. (die sich auf den Fall rationaler Coefficienten beziehen) in gewissen Punkten verallgemeinert und ergänzt werden. Namentlich wird die Frage nach dem Bestimmtsein der Integrale an einem irreductiblen singulären Gebilde $f_1=0$ beantwortet, d. h. die Frage nach den Bedingungen, unter welchen sämtliche Integrale, mit gewissen Potenzen von f_1 multiplicirt, in jedem Punkte von $f_1=0$, durch welchen kein von $f_1=0$ verschiedenes singuläres Gebilde hindurchgeht, bestimmte endliche Grenzwerte besitzen, wie auch die Annäherung an diesen Punkt geschieht.

Die Entwickelungen werden erleichtert durch die Reduction des Systems (1) auf eine Normalform, was folgendermassen geschieht. Man kann eindeutige Functionen $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_m(x_1, \ldots, x_n)$ derart bestimmen, dass $z = A_1 z_1 + \cdots + A_m z_m$ ein Gleichungssystem der Form

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^m} + p_{11}\dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \cdots + p_{m1} z = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = p_{1i}\dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \cdots + p_{mi} z \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

befriedigt, welches ein Fundamentalsystem von m Integralen besitzt, und aus jedem Integral von (2) berechnet sich das entsprechende Integral $z_1, \ldots, z_m$ von (1) vermöge der Formel

$$z_a = B_{a1}\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \cdots + B_{am} z \quad (a = 1, 2, \ldots, m),$$

wo die B aus den Coefficienten $a_{a\beta\gamma}$ und $A_1, \ldots, A_m$ leicht zu bildende Grössen sind.

Die zweite Abteilung enthält die Anwendung der allgemeinen Resultate auf den Fall, wo die Coefficienten des Systems $2n$-fach periodisch sind und das allgemeine Integral eindeutig ist. Damit die Singularitäten durch Gleichungen der Form $\Phi = 0$ dargestellt werden können, ist es notwendig und hinreichend, dass gewisse Bilinearrelationen und entsprechende Ungleichungen von den Perioden erfüllt sind (Vgl. Wirtinger, Monatshefte für Math.; F. d. M. **26,** 513, 1895 u. **27,** 364, 1896). Die Gesamtheit der mit $f_1 = 0$ congruenten Gebilde (welche offenbar auch singulär sind), wird durch eine einzige Gleichung $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dargestellt, wo Φ eine „einfache" Jacobi'sche Function ist (vgl. Frobenius in J. für Math. **97;** F. d. M. **16,** 378ff., 1884). Jedes auf diese Weise gewonnene Gebilde spielt bei der fraglichen Untersuchung dieselbe Rolle wie die irreductiblen Gebilde im allgemeinen Teile.

Bei der Reduction auf die Normalform kann man $A_1, \ldots, A_m$ als $2n$-fach periodisch annehmen; infolge dessen ergeben sich auch p und B als $2n$-fach periodische Functionen.

Wenn das allgemeine Integral nun eindeutig ist, so giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen, die sich in Gruppen verteilen, von denen jede die Gestalt hat:

$$\begin{aligned} z_{a1} &= \varphi_{a1}, \\ z_{a2} &= \varphi_{a2} + \varphi_{a1} F_{11}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z_{a\nu} &= \varphi_{a\nu} + \varphi_{a\nu-1} F_{\nu-1,1} + \cdots + \varphi_{a1} F_{\nu-1,\nu-1}, \end{aligned}$$

wo sämtliche φ Multiplicatorfunctionen mit denselben Multiplicatoren sind. $F_{\lambda\mu}$ bedeutet eine ganze homogene Function μ^{ten} Grades von $x_1, \ldots, x_n$, $\dfrac{\partial \log \Phi}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial \log \Phi}{\partial x_n}$, wo Φ eine beliebige Jacobi'sche Function ist; dabei

sind die Coefficienten $2n$-fach periodische Functionen, die für $\lambda = \mu$ constant sind.

Im dritten Abschnitt wird die Frage beantwortet, alle Systeme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + p_{11} \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_{21} z = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_{1i} \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_{2i} z \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

mit nur einem einfachen singulären Gebilde und allgemeinem Integral rationalen Charakters aufzufinden. Es ergiebt sich, dass diese Systeme durch eine gewisse Transformation auf die Lamé'sche Differentialgleichung übergeführt werden können.

In dem zweiten Aufsatz beschäftigt sich der Verf. mit derselben Aufgabe für die Systeme

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x_\gamma} &= a_{11\gamma} z_1 + a_{12\gamma} z_2, \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_\gamma} &= a_{21\gamma} z_1 + a_{22\gamma} z_2. \end{aligned} \right. \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

Der dritte Aufsatz ist der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen (1) gewidmet. Sie enthält Untersuchungen bezüglich des Verhaltens der Integrale in der Umgebung eines Schnittpunktes mehrerer singulären Gebilde. Hmg.

P. Saurel. Note on integrating factors. American M. S. Bull. (2) **4,** 329-331.

Für die Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0 \qquad (n \geqq 3)$$

werden die Bedingungen für die Existenz eines integrirenden Factors aufgesucht, der nur eine der Variabeln enthält, und es wird gezeigt, dass solch ein integrirender Factor, wenn er existirt, einzig ist.

Lp.

A. Guldberg. Sur les équations aux différentielles totales linéaires. C. R. **127,** 1199-1201.

Eine nicht integrable lineare totale Differentialgleichung kann singuläre Integrale zulassen, deren Bestimmung sich ohne Integration ergiebt. Diese vom Verf. für neu gehaltene Bemerkung findet sich bereits in der Abhandlung von Bouquet „Sur l'intégration d'un système etc.“ (Darboux Bull. **3,** 265-274; F. d. M. **4,** 145, 1872), wonach bei der Gleichung mit drei Variabeln $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ die gesuchte singuläre Lösung, falls sie existirt, unter den Functionen z zu suchen sind, die der Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

genügen. Zu dieser Gleichung führt auch das vom Verf. angegebene Eliminationsverfahren, dessen Resultat jedoch nicht explicite angegeben wird. Hr.

Alf Guldberg. Sur la théorie des équations aux différentielles totales de second ordre. Videnskabsselskabets Skrifter. I Mathem.-naturv. Klasse 1898. No. 11. 23 S.

Der Verf. betrachtet totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form:

(I) $d^2z + Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Fdydz = 0$,

wo $A, B, \dots, E, F$ Functionen von x, y, z sind. Die Gleichung (I) wird vollständig integrabel genannt, wenn sie von einer Gleichung $F(x, y, z) = 0$ abgeleitet ist, unvollständig integrabel, wenn sie ein nicht-integrables intermediäres Integral $\omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ besitzt, und nicht-integrabel, wenn sie kein intermediäres Integral zulässt. Es werden erst die Integrabilitätsbedingungen einer vollständig integrablen Gleichung (I) abgeleitet, und danach wird gezeigt, dass ihre Integration sich mit der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen deckt; ist speciell die gegebene Gleichung exact, so verlangt ihre Integration nur Quadraturen. Zunächst wird für eine unvollständig integrable Gleichung gezeigt, wie sich ein lineares nicht-integrables intermediäres Integral bestimmen lässt, und der Fall wird etwas näher untersucht, wo die gegebene Gleichung exact ist. Zuletzt wird der Fall gestreift, wo die Gleichung (I) nicht-integrabel ist. Gbg.

Hadamard. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 17-18.

Bemerkung über Systeme von Differentialgleichungen, wie diese in des Verf. Abhandlung „Sur les mouvements de roulement" vorkommen (F. d. M. **26**, 849, 1895). Lp.

E. Bortolotti. Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 257-265; 7_2, 46-55.

Es handelt sich um die Eigenschaften einer linearen Differenzenform

$$A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \dots + a_n \theta^n y,$$

die ihrer Adjungirten

$$\bar{A}(y) = a_0 y + \theta^{-1} a_1 \theta^{-1} y + \dots + \theta^{-n} a_n \theta^{-n} y$$

äquivalent ist. Wir heben folgende hervor: 1. $A(y)$ lässt sich darstellen in der Form

$$A(y) = G(y) + k\theta^n \bar{G}(y),$$

wo $\bar{G}(y)$ die Adjungirte von $G(y)$ bedeutet, und k für ungerade n gleich -1, für gerade gleich ± 1 ist. 2. Die Coefficienten $a_0, a_1, \dots$ bleiben bei der Operation θ^n unverändert, sind also perio-

dische Functionen von x mit der für alle gleichen Periode n. 3. Die Integrale von A sind auch Integrale einer linearen Differenzenform $C(y)$ mit constanten Coefficienten von der Ordnung n^2, wo

$$C(y) = c_0 y + c_n \theta^n y + c_{2n} \theta^{2n} y + \cdots + c_{n^2} \theta^{n^2} y.$$

Die charakteristische Gleichung der letzteren

$$c_0 + c_n z + \cdots + c_{n^2} z^{n} = 0$$

ist reciprok. In Folge dieser Eigenschaft lässt sich für C eine Zerlegungsformel aufstellen, analog der, welche Jacobi und Darboux für die Differentialformen gegeben haben. Hr.

S. Pincherle. Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 230-234.

Es sei die lineare Differenzengleichung

$$F(\varphi) \equiv \varphi(x+n) + a_1(x)\varphi(x+n+1) + \cdots + a_{n-1}(x)\varphi(x+1) + a_n(x)\varphi(x) = 0$$

gegeben, und $\omega_1, \dots, \omega_n$ sei ein Fundamentalsystem von Integralen derselben; dann wird

$$\mathfrak{F}_1(\varphi) \equiv a_n(x+n)\varphi(x+n) + a_{n+1}(x+n-1)\varphi(x+n-1) + \cdots + a_1(x+1)\varphi(x+1) + \varphi(x) = 0$$

als die „Adjungirte" der ersteren bezeichnet. Die Integrale derselben $\mu_1, \dots, \mu_n$ sind Multiplicatoren von F, so dass $\mu_i F = \Delta G_i$, wo G_i eine lineare Differenzenform $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. Zu jedem System $\mu_1, \dots, \mu_n$ giebt es ein bestimmtes Fundamentalsystem von $F = 0$: $\omega_1, \dots, \omega_n$, welches dem ersteren contragredient ist (vgl. Bortoletti in Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_1, 349; F. d. M. **27**, 262, 1896). Nach einem Theorem von Poincaré ist $\lim\limits_{\nu=\infty} \left|\dfrac{\mu_i(x+\nu+1)}{\mu_i(x+\nu)}\right|$ gleich dem Modul einer der Wurzeln der Gleichung

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + 1 = 0,$$

wo $a_1, \dots, a_n$ die Grenzwerte von $a_1, \dots, a_n$ sind, wenn x in der Richtung der positiven reellen Axe ins Unendliche geht. Unter der Voraussetzung, dass eine der Wurzeln y einen grösseren Modul als alle übrigen habe, möge $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{\mu_1(x+\nu+1)}{\mu_1(x+\nu)}$ diesem Modul gleich sein; dann ist $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{\theta^\nu \mu_i}{\theta^\nu \mu_1} = 0$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, wo $\theta^\nu \varphi(x) = \varphi(x+\nu)$ gesetzt ist.

Bildet man nun den Ausdruck $\lambda_\nu = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \omega_i \theta^\nu \mu_i$, wo $\omega_1, \dots, \omega_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ unter einander contragredient sind, so ist λ_ν nach dem Appell'schen Theorem, das sich auf die Differenzengleichungen aus-

dehnen lässt, rational durch die Coefficienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und die $\theta\alpha_i$, $\theta^2\alpha_i, \dots$ ausdrückbar, und man erhält

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \theta^\nu \mu_i}{\sum_{i=1}^{n} \theta\,\omega_i\,\theta^\nu \mu_i} = \frac{\omega_1}{\theta(\omega_1)}.$$

Somit ist ω_1 auf approximativem Wege als Integral einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit rationalen Coefficienten gegeben. Diese Lösung ist analog der Bernoulli'schen approximativen Auflösung einer algebraischen Gleichung mittels des Quotienten zweier aufeinander folgenden Summen von Wurzelpotenzen. Hr.

L. Saalschütz. Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung: $C\psi(n)\,\psi(n+1) + (A''n + B'')\,\psi(n+1) - (A'(n+1)+B')\psi(n) + A' - A'' = 0$. J. für Math. **119**, 291-312.

Die Grössen A', A'', B', B'', C in der hingeschriebenen Functionalgleichung bedeuten von einander unabhängige beliebige Constanten mit der Einschränkung, dass $A' - A'' = c$ von Null verschieden ist. Die der Gleichung genügenden Functionen $\psi(n)$ zerfallen in zwei Klassen, je nachdem sie für $n = \infty$ dem Werte $1/n$ oder cn/C zustreben. Da sich beide Klassen jedoch auf einander zurückführen lassen, so wird nur die erstere der Betrachtung unterzogen und die Bedingung erforscht, unter der die Gleichung eine rationale Lösung zulässt, die somit die Form

$$(1) \qquad \psi(n) = \frac{n^{\lambda-1} + r_1 n^{\lambda-2} + \cdots + r_{\lambda-1}}{n^\lambda + s_1 n^{\lambda-1} + \cdots + s_\lambda}$$

annehmen muss. Setzt man $C = \gamma/c$, so ergiebt sich, dass λ beliebig gewählt werden darf. Zur Bestimmung von γ erhält man dann eine Gleichung λ^{ten} Grades, deren Coefficienten von A', A'', B', B'' abhängig sind, während die r und s sich linear durch γ ausdrücken. Jeder Wurzel γ entspricht demnach eine bestimmte Lösung in der Form (1), aber nur einer dieser Wurzeln γ_λ eine solche, in der Zähler und Nenner ohne gemeinsamen Factor sind, und zwar ist

$$\gamma_\lambda = (A'B'' - A''B' - A'A'')\,\lambda - A'A''\lambda^2.$$

Die unreducirbare Lösung wird in expliciter Form aufgestellt. Substituirt man in dem Ausdruck für γ_λ nun $-\lambda$ an Stelle von λ, so erhält man ebenfalls rationale Lösungen für die Function $\psi(n)$, die alsdann der zweiten Klasse angehört. Hr.

Weitere Litteratur.

D. A. Murray. Introductory course in differential equations. New York and London: Longmans, Green, and Co. XV + 234 S. 8⁰. [Nature **57**, 340.]

S. F. d. M. **28**, 267, 1897.

J. Morris Page. Ordinary differential equations; with an introduction to Lie's theory of the group of one parameter. London: Macmillan and Co. XVIII + 226 S. 8°. [Nature **57**, 340.]

S. F. d. M. **28**, 266, 1897.

Ch. de la Condamine. Question d'analyse. Bull. math. spéc. **5**, 5-7.

J. Levy. Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Coefficienten, die von einem Parameter abhängen. Diss. Halle. 58 S. 8°.

G. Prévost. Note sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 47-48.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Tome II: La méthode de Laplace. Les systèmes en involution. La méthode de M. Darboux. Les équations de la première classe. Transformations des équations du second ordre. Généralisations diverses. 2 Notes. Paris: A. Hermann. 344 S. 8°. [Nature **58**, 266-268.]

Der vorliegende, das Werk abschliessende zweite Band beginnt mit der Integration der Laplace'schen Gleichungen. Durch einen vom Verf. schon vorher (Amer. Journ. **18**) veröffentlichten fruchtbaren Satz, welcher für die Gliederanzahl der Laplace'schen Reihe bisweilen eine obere Grenze festsetzt, sowie durch Aufstellung entsprechender Sätze für allgemeine lineare (Legendre'sche) Gleichungen werden die bisherigen Darstellungen dieses Gegenstandes (Imschenetzky, Darboux) in willkommener Weise ergänzt.

Der Schwerpunkt des Bandes wie des ganzen Werkes liegt in der den beiden folgenden Kapiteln zugeteilten Auseinandersetzung der Darboux'schen Theorie, zu der die im letzten Kapitel des ersten Bandes dargestellte allgemeine Theorie der Charakteristiken eine Vorbereitung bildete. In der klaren Entwickelung dieser allgemeinen Integrationsmethode, deren erste, allzu condensirte Fassung eine grosse Zahl zum Teil sehr schwer zugänglicher Monographien veranlasst hatte, in den beständigen Hinweisen auf ihre mannigfachen Beziehungen zu specielleren und allgemeineren Problemen, in der vortrefflichen Erläuterung an geschickt ausgewählten, interessanten Beispielen ist das Hauptverdienst des Buches zu erblicken.

Die zum Verständnisse der Darboux'schen Methode erforderliche Theorie der unbeschränkt integrablen und der Involutionssysteme wird auf Grund der Arbeiten von Lie und König erledigt. Die so gewonnenen Resultate werden (immer unter ausgedehnter Anwendung des Begriffes

der charakteristischen Mannigfaltigkeiten und der sich darbietenden geometrischen Interpretationen) dazu benutzt, die gemeinsamen Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer solchen n^{ter} Ordnung zu untersuchen und die Bedingungen dafür aufzustellen, dass diese Gleichungen in Involution sind. Die ganze Untersuchung — um wenigstens ein Resultat anzugeben — gipfelt in dem Satze, dass jede Integralfläche eines Involutionssystems der geometrische Ort von Elementenmannigfaltigkeiten ist, welche nur von einer endlichen Anzahl von Constanten abhängen, und dass das Integral infolge dessen durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden kann.

Die Beziehungen des letzteren zu den der vorgelegten Gleichung zugehörenden Systemen der Charakteristiken n^{ter} Ordnung leiten in einfachster Weise zu der Darboux'schen Problemstellung (Ann. de l'Éc. Norm., 1870) über; und alles Folgende erstreckt sich sodann auf die Frage der Existenz von integrablen Combinationen jener Systeme, wobei der aus der Theorie der Monge-Ampère'schen Gleichungen bekannte Begriff des Zwischenintegrales seine Verallgemeinerung findet und zur Einführung der „Invarianten" Veranlassung giebt, d. h. solcher Functionen u, v von x, y, z und der Ableitungen von z bis zu einer bestimmten Ordnung hin, dass die Gleichung $u = \varphi(v)$, wo φ eine willkürliche Function, im allgemeinen von jedem Integrale der vorgelegten Gleichung erfüllt wird. Hiernach beruht schliesslich alles auf der Bestimmung der Invarianten eines Systems oder beider Systeme der Charakteristiken, von deren Natur sonach die Anzahl und Ordnung der Invarianten abhängt; alle in Betracht kommenden Möglichkeiten werden einer ausführlichen Behandlung unterzogen.

Inwiefern die vor der Darboux'schen Abhandlung bekannten Integrationsmethoden von der Darboux'schen als Specialfälle umfasst werden, findet sich an den geeigneten Stellen mit der wegen der principiellen Wichtigkeit erwünschten Breite auseinandergesetzt; andererseits aber wird an dem Beispiele der Gleichung $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(z)$ im Anschlusse an Lie gezeigt, dass die in Rede stehende Methode keineswegs die allgemeinste ist, indem nur für den Fall $f(z) = Ce^{cz}$ (Liouville'sche Gleichung) ihre Anwendung zum Ziele führt, so dass also beispielsweise die Gleichung $\partial^2 z/\partial x \partial y = \sin z$, auf deren Integration sich die Bestimmung der Flächen constanten Krümmungsmasses zurückführen lässt, nicht der Darboux'schen Klasse angehört. — Endlich lehrt eine Schlussbetrachtung, welche zu einem der folgenden Kapitel hinüberführt, mit Hülfe der continuirlichen Transformationsgruppen beliebig viele nach der Darboux'schen Methode integrirbare Gleichungen bilden.

Das zunächst folgende Kapitel mit dem Titel „Die Gleichungen der ersten Klasse" sucht die Betrachtungen von Ampère über die Allgemeinheit eines Integrales zu beurteilen und die von ihm angegebenen Definitionen zu präcisiren. Die neuen Definitionen führen alsbald zurück zu den Untersuchungen der vorhergehenden Darboux'schen Theorie und zu deren Beleuchtung von einem neuen Gesichtspunkte aus, und weiter

zu Problemen, bei welchen es sich darum handelt, die sämtlichen Formen von Differentialgleichungen aufzustellen, deren Integrale eine vorgeschriebene allgemeine Gestalt besitzen. Die auf diese und verwandte Probleme sich beziehenden Arbeiten, namentlich von Moutard, M. Lévy und von Weber, finden eine eingehende Würdigung.

In dem vorletzten Kapitel wird der Versuch gemacht, die im Laufe der vorangehenden Entwickelungen angewandten Transformationen, welche die Zurückführung der vorgelegten Gleichung auf eine unmittelbar integrable Form bezwecken, auf einige allgemeine Typen zu reduciren. Hier zeigt sich der fundamentale Unterschied gegen die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, weil das dort nie versagende Hülfsmittel der Berührungstransformation bei den Gleichungen zweiter Ordnung ein Analogon nicht zu haben scheint. Zu den allgemeinsten der bekannten hier in Betracht zu ziehenden Transformationen gehören die Bäcklund'schen, deren Wichtigkeit für die Flächentheorie Darboux im dritten Bande seiner „Leçons" ausführlich dargethan hatte; ihre Bedeutung für die Integration der Gleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendbarkeit bei der Lösung vieler noch unerledigten Probleme ist eines der wichtigsten Resultate des anregenden Kapitels.

Die den Band beschliessenden „verschiedenen Verallgemeinerungen" enthalten in der Hauptsache die Ausdehnung der Darboux'schen Methode auf eine Gleichung n^{ter} Ordnung und auf ein System von n Gleichungen erster Ordnung mit n unbekannten Functionen. Dem Verf. scheint der hierbei von ihm eingeschlagene, vom Cauchy'schen Probleme ausgehende Weg „natürlicher und fruchtbarer" zu sein als der früher (J. für Math. **81, 93**) von Hamburger benutzte; bei der Wichtigkeit des Gegenstandes wäre eine Darlegung der nicht ohne weiteres ersichtlichen Gründe erwünscht gewesen.

Zwei Noten: 1) „Ueber die Hülfsgleichung" (vgl. Darboux, C. R. **96,** 766), 2) „Ueber die Charakteristiken der simultanen Gleichungen", sind dem Werke beigegeben. Ot.

E. Goursat. Sur la théorie générale des caractéristiques des équations aux dérivées partielles. C. R. **126,** 1332-1335.

Bezeichnet $F=0$ eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit r unabhängigen Variablen und der unbekannten Function z, und setzt man

$$p_{a_1\dots a_r} = \frac{\partial^{a_1+\dots+a_r} z}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_2^{a_2}\dots\partial x_r^{a_r}} \quad \text{und} \quad P_{a_1\dots a_r} = \frac{\partial F}{\partial p_{a_1\dots a_r}}$$

ist ferner ein Integral $z=\Phi(x_1,\dots,x_r)$ gegeben, so bestimmen die Gleichungen $\frac{dx_1}{\lambda_1}=\frac{dx_2}{\lambda_2}=\dots=\frac{dx_r}{\lambda_r}$, wo $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ bestimmte Functionen von z und seinen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung sind, auf diesem Integral eine Familie von Mannigfaltigkeiten, deren Elemente von

der n^{ten} Ordnung sind. Können die Functionen λ so gewählt werden, dass zu den obigen Gleichungen und den Gleichungen $dF = 0$,

$$dp_{a_1,\dots,a_r} = p_{a_1+1,a_2,\dots,a_r}\,dx_1 + \cdots + p_{a_1,a_2,\dots,a_r+1}\,dx_r$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r \leqq n-1)$$

noch eine gewisse Zahl neuer Differentialgleichungen, die unabhängig von Φ sind, hinzugefügt werden können, so wird jedes einfach unendliche System von Elementen n^{ter} Ordnung, welches der Gesamtheit der so erhaltenen Differentialgleichungen genügt, eine Charakteristik genannt. Damit die gegebene Gleichung Charakteristiken n^{ter} Ordnung besitze, ist hinreichend und genügend, dass die algebraische Form

$$\Sigma P_{a_1 a_2 \dots a_r}\, \xi_1^{a_1} \xi_2^{a_2} \dots \xi_r^{a_r}$$

durch einen in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ linearen Factor teilbar sei.

Ein entsprechender Satz gilt für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Sh.

E. Goursat. Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles. S. M. F. Bull. **26**, 129-134.

Auf einfacherem Wege als Frau von Kowalevski sucht der Verf. den Existenzbeweis der Integrale partieller Differentialgleichungssysteme zu geben.

Zunächst wird gezeigt, dass die Existenz des Integrals der Gleichung $r = F(x, y, z, p, q, s, t)$, welches gewisse Anfangsbedingungen zu erfüllen hat, erwiesen ist, falls die Gleichung:

$$r = bx + cy + dz + ep + fq + gs + ht + \cdots$$

ein im Bereiche des Punktes $x = y = 0$ reguläres Integral besitzt, das ebenso wie seine Ableitung $\partial z/\partial x$ für $x = 0$ verschwindet. Dies wieder ist möglich, wenn

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - B\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2 = \varphi\left(u, z, \frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

wo A und B positive Grössen und $u = x + ay$ $(a < 1)$, durch eine Reihe gelöst werden kann:

$$z = A_3(x+ay)^3 + A_4(x+ay)^4 + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten $A_3, A_4, \dots$ ebenso wie a positive Zahlen sind, und die Richtigkeit dieser Annahme wird bewiesen.

Genau derselbe Gedankengang kann auf das System $\dfrac{\partial^n z_i}{\partial x^n} = F_i$ $(i = 1, 2, \dots, q)$ angewandt werden. Sh.

P. Stäckel. Ueber die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen. J. für Math. **119**, 339-346.

Königsberger hatte in einer früheren Abhandlung (J. für Math. **109**, 261-340; F. d. M. **24**, 319-320, 1892) die Frage nach der

Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung behandelt und gezeigt, dass ein solches System sich in ein System erster Ordnung verwandeln lässt. Ist für Systeme erster Ordnung allgemein das Problem gelöst, so ist dann auch das allgemeinere erledigt. Die Frage bei Systemen erster Ordnung ist aber von Königsberger nur unter gewissen Bedingungen gelöst, unter denen auch die sich befindet, dass eine gewisse Functionaldeterminante für die gegebenen Anfangswerte von Null verschieden ist. Stäckel zeigt nun, dass diese Bedingung einen wesentlicheren Einfluss hat, als zunächst zu vermuten ist, und dass infolge dessen das Königsberger'sche Theorem nicht ausreicht, um die Sätze zu beweisen, die von Cauchy, Frau von Kowalevski und Darboux entwickelt worden sind. Es ist auch nicht anzunehmen, wie Stäckel zeigt, dass die Methode von Königsberger so modificirt werden könnte, dass dadurch eine grössere Allgemeinheit erlangt würde, weil die Königsberger'sche Bedingung bewirkt, dass die Differentialsysteme vollständig integrabel sind, während das durch Transformation aus den höheren Ordnungen entstandene System erster Ordnung sicher nicht vollständig integrabel zu sein braucht.

Sh.

Riquier. Sur l'existence des intégrales d'un système partiel, déterminées par certaines conditions initiales. C. R. **126,** 208-210.

Riquier. Sur les systèmes différentiels, dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. C. R. **127,** 809-810, 1194-1196.

Unter Benutzung der vom Verf. in früheren Arbeiten eingeführten Bezeichnungen wird in der ersten Note gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen, von gegebenen Anfangswerten ausgehend, die Integrale eines partiellen Differentialgleichungssystems in convergente Taylor'sche Reihen entwickelt werden können.

In der zweiten Note wird ein Kriterium dafür angegeben, dass ein partielles Differentialgleichungssystem sich auf die Integration totaler Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen lässt, deren Beweis für eine demnächst erscheinende Abhandlung angekündigt wird, und in der dritten Note wird ein Prioritätsanspruch von Beudon in Bezug auf dieses Kriterium besprochen und darauf hingewiesen, dass dasselbe, wenn auch nicht vollständig, so doch im wesentlichen schon in früheren Arbeiten von Riquier enthalten ist. Sh.

L. Fuchs. Zur Theorie der simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1898, 222-233.

In verschiedenen früheren Abhandlungen (Berl. Ber. aus den Jahren 1888-94, F. d. M. **20-25**) hat der Verf. die Ableitung nach einem Parameter t der Lösung y einer in Bezug auf eine Variable x gebildeten linearen Differentialgleichung als linearen Differentialausdruck

in y dargestellt und die Abhängigkeit des y von t für den Fall erörtert, wo die Coefficienten des Differentialausdrucks ebenso wie die der ursprünglichen Gleichung rationale Functionen von x und t sind. Hier ist der Ausgangspunkt insofern anders, als weder über die Natur der Coefficienten der Differentialgleichung noch über die analytische Bedeutung der Coefficienten in dem Ausdrucke der Ableitung nach dem Parameter etwas vorausgesetzt wird. Diese Klasse von zwei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln wird untersucht, und es werden dabei früher gewonnene Resultate von einem neuen Gesichtspunkte aus hergeleitet, während weitere Ergebnisse für eine folgende Abhandlung angekündigt werden.

Sh.

J. Brill. Suggestions towards the formation of a general theory of systems of Pfaffian equations. Quart. J. **30,** 221-242.

Der Charakter des allgemeinsten Typus eines Integralsystems, das zu einem gegebenen bedingungsfreien Pfaff'schen System gehört, ist bekannt, ebenso wie die Anzahl der Integrale. Ist p die Anzahl der Integrale, die zu einem solchen System von n Gleichungen gehören, so sind $p-n$ nicht bedingungsfreie Systeme in Verbindung mit dem gegebenen System zu betrachten, für die nämlich die Anzahl der Integrale $p-1, p-2, \dots, p-n$ beträgt. Es wird hier eine Methode, die Pfaff'schen Systeme zu behandeln, entwickelt, die auf einer Klassification derselben beruht, welche sich gründet auf die Anzahl der Integrale, die zu einem bedingungsfreien System gehören, und es werden die Bedingungen dafür gegeben und discutirt, dass die Anzahl der Integrale geringer als das normale Minimum ist, wobei stets auf die Analogie mit den entsprechenden Bedingungen bei einer einzigen Gleichung hingewiesen wird. Gerade hierdurch sucht der Verf. die mehrfach ausgesprochene Ansicht zu widerlegen, dass die Methoden von Clebsch und Jacobi nicht auf Systeme Pfaff'scher Gleichungen ausgedehnt werden könnten.

Sh.

G. Vivanti. Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione Pfaffiana. Palermo Rend. **12,** 1-20.

E. von Weber. Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione Pfaffiana. Palermo Rend. **12,** 133-140.

Damit die Pfaff'sche Gleichung $\sum_{i=1}^{n} U_i dx_i = 0$ durch die Transformation $Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ unverändert bleibt, müssen die Relationen bestehen:

$$\sum_{h=1}^{n} V_{ih}\xi_h = \varrho\, U_i - W_i \ (i = 1, \dots, n), \text{ wo } \frac{\partial U_i}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_i} = V_{ih},$$

$\Sigma \xi_h U_h = W$ und $\frac{\partial W}{\partial x_i} = W_i$ gesetzt worden ist und ϱ eine Function

der x bedeutet. Wegen der Bedingungen $V_{ii} = 0$, $V_{ih} = -V_{hi}$ ist die Determinante Δ aus den V eine schiefsymmetrische, für welche teils bekannte, teils neue Eigenschaften abgeleitet werden, auf Grund deren es gelingt, folgenden Satz abzuleiten: Bedeuten R_{ih} die Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Δ, und enthält die Pfaff'sche Gleichung eine gerade Anzahl n von Variabeln, ist ferner Δ nicht identisch Null, so ist die allgemeinste Infinitesimaltransformation, welche die gegebene Gleichung unverändert lässt:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{h=1}^{n} R_{hi} \left(\varrho\, U_h - \frac{\partial W}{\partial x_h} \right) \right],$$

wo W der Gleichung $\sum_h [W_h \sum_i R_{hi} U_i] + \Delta W = 0$ genügt. Auch für den Fall eines ungeraden n wird X ermittelt.

E. von Weber zeigt, dass diese von Vivanti erhaltenen Resultate in verallgemeinerter Form fast unmittelbar aus der Theorie des Pfaff'schen Problems sich ergeben, wie es von Clebsch (J. für Math. **60, 61**), Frobenius (J. für Math. **82,** 230-315; F. d. M. **9,** 249 bis 254, 1877) und Engel (Leipz. Ber. **48,** 413-430; F. d. M. **27,** 269, 1896) entwickelt worden ist. Sh.

E. v. Weber. Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen. Leipz. Ber. **50,** 1898, 207-229.

Ist in den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ das System:

$$V_s \equiv dx_{m+s} - \sum_{i=1}^{m} a_{si} dx_i = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n-m)$$

vorgelegt, und sind $dx_1, \ldots, dx_n$; $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ zwei unabhängige Systeme von Variationen der x, so ist das System $dx_{m+s} = \Sigma a_{si} dx_i$:

$\delta x_{m+s} = \Sigma a_{si} \delta x_i$ und $\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_{iks} dx_i \delta x_k = 0$ invariant mit dem ersten System verknüpft. Hierin bedeutet: $a_{iks} = -a_{kis} \equiv A_i a_{sk} - A_k a_{si}$,

wo $A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n-m} a_{si} \frac{\partial f}{\partial x_{m+s}}$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist. Der Rang K, d. h. die Ordnung der höchsten nicht verschwindenden Minoren, welcher der Matrix $\left\| \sum_{k=1}^{m} a_{iks} \lambda_k \right\|$ $(i = 1, \ldots, m;\ s = 1, \ldots, n-m)$ für beliebige Werte der x und der Grösse λ zukommt, ist eine Invariante des gegebenen Systems. Ist $K = 0$, so ist das System unbeschränkt integrabel; die Untersuchung des nächst höheren Falles $K = 1$ bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung; es wird hierfür eine Reihe von Theoremen aufgestellt, die einzeln anzuführen der Raum nicht gestattet. Sh.

C. Rusjan. Theorie der Pfaff'schen Transformation. II. Teil. Prace mat.-fiz. **9,** 61-102. (Polnisch.)

In der Fortsetzung der Arbeit, deren erster Teil in F. d. M. **27,** 300, 1896 besprochen worden ist, untersucht der Verf. die Eigenschaften der Differentialausdrücke $X_1dx_1+\cdots+X_{2n}dx_{2n}$, $X_1dx_1+\cdots+X_{2n+1}dx_{2n+1}$, deren erster in die Form $\mu_0(U_2dz_2+\cdots+U_{2n}dz_{2n})$, deren zweiter in die Form $dt_1+T_2dt_2+\cdots+T_{2n+1}dt_{2n+1}$ übergeführt werden kann. Indem man diese beiden Transformationen auf den Ausdruck $X_1dx_1+\cdots+X_{2n}dx_{2n}$ anwendet, erhält man eine neue Form $\mu_0(dv_2+\cdots+V_{2n}dv_{2n})$, wo die Anzahl der unabhängigen Variabeln um zwei Einheiten vermindert worden ist. Die $(n-1)$-malige Anwendung dieses Processes führt endlich die gegebene Differentialform in ihre kanonische Gestalt über, in welcher die Anzahl der unabhängigen Variabeln gleich n ist. Ein analoges Verfahren ist für den zweiten Differentialausdruck $X_1dx_1+\cdots+X_{2n+1}dx_{2n+1}$ anwendbar. Der Verf. untersucht dann den allgemeineren Fall, in welchem die Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta_1$ (vergl. das oben citirte Referat) nebst einer Anzahl ihrer Subdeterminanten gleichzeitig verschwinden. Ist der höchste Grad der nicht verschwindenden Subdeterminanten von $\varDelta$ und $\varDelta_1$ bei beiden gleich $2k$, so kann der Differentialausdruck $X_1dx_1+\cdots+X_pdx_p$ auf die Form $X^{(1)}dx^{(1)}+\cdots+X^{(k)}dx^{(k)}$ zurückgeführt werden; ist aber der genannte höchste Grad für die Determinante $\varDelta$ gleich $2k$, für $\varDelta_1$ gleich $2k+2$, so wird die reducirte Form $dx^{(1)}+X^{(2)}dx^{(2)}+\cdots+X^{(k+1)}dx^{(k+1)}$. Es werden die Eigenschaften von $\varDelta$ und $\varDelta_1$ in Bezug auf die unabhängigen Variabeln einer näheren Betrachtung unterzogen, die Invarianz der Anzahl der Glieder der reducirten Form bewiesen und endlich die Kriterien aufgestellt, welche diese Anzahl bestimmen.

Dn.

J. Petersen. Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques sous forme finie. Nouv. Ann. (3) **17,** 6-23.

Uebersetzt aus Gött. Nachr. 1878; vergl. F. d. M. **10,** 246, 1878.

J. Beudon. Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre. S. M. F. Bull. **26,** 77-80.

Eine Differentialgleichung $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)=0$ besitzt lineare Charakteristiken, welche durch die Gleichungen definirt sind:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial p_1}\cdot p_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\cdot p_n}=\frac{-dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Um ein beliebiges Integral zu erhalten, wählt man beliebig eine Mannigfaltigkeit M'_{n-1}, welche die vorgelegte Gleichung befriedigt, und lässt durch jedes Element erster Ordnung dieser Mannigfaltigkeit eine Charak-

teristik gehen. Wenn aber diese Mannigfaltigkeit selbst durch Charakteristiken erzeugt worden ist, so kann dieses Verfahren nicht angewandt werden; es wird gezeigt, dass es in diesem Falle unzählig viele Integraloberflächen giebt, welche diese Mannigfaltigkeit enthalten. Sh.

J. Beudon. Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15,** 229-242; C. R. **126,** 324-325, 388-389.

J. Beudon. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles réductibles aux équations différentielles ordinaires. C. R. **127,** 1003-1004.

Die erste Abhandlung und die folgenden Noten sind dem Studium der Systeme partieller Differentialgleichungen gewidmet, welche eine Function von n unabhängigen Variablen definiren und deren allgemeine Lösung von einer willkürlichen Function von ϱ Argumenten abhängt. Setzt man

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} = Z^k_{\alpha_1\dots\alpha_n} \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=k),$$

so wird im ersten Kapitel der Abhandlung der Satz bewiesen: Wenn ein System partieller linearer Differentialgleichungen p^{ter} Ordnung eine allgemeine Lösung hat, die von einer willkürlichen Function von $n-1$ Argumenten abhängt, so kann man die Gleichungen des Systems in die Form bringen:

$$a_1 Z^p_{\alpha_1+1,\dots\alpha_n} + a_2 Z^p_{\alpha_1,\alpha_2+1,\dots\alpha_n} + \dots + a_n Z^p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n+1} = A_{\alpha_1\dots\alpha_n},$$

wo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ positive ganze Zahlen sind, die alle möglichen Werte derart annehmen können, dass $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=p-1$ ist, wo ferner $a_1, \dots, a_n$ Functionen der unabhängigen Variabeln, der unbekannten Function und ihrer Ableitungen bis zur $(p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und welche für alle Gleichungen unverändert bleiben, während $A_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ Functionen derselben Argumente sind, welche von einer Gleichung zur anderen sich ändern.

Im zweiten Kapitel werden speciell die linearen Systeme zweiter Ordnung besonders hinsichtlich der Integrabilitätsbedingungen behandelt.

In der letzten Note wird auf den Zusammenhang der obigen Resultate mit denen von Riquier (C. R. **125;** F. d. M. **28,** 300, 1897) hingewiesen und das Theorem aufgestellt, dass der Grad der Schwierigkeit der Integration solcher Systeme nicht von der Zahl der unabhängigen Variabeln abhängt, sondern einzig vom Grade der Allgemeinheit der Lösung; zwei beliebige Systeme vom gleichen Grade der Allgemeinheit erfordern zur Integration analoge Operationen. Sh.

E. Delassus. Sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes. Toulouse Ann. **12** F, 1-9.

Die verschiedenen Methoden, welche bei der Behandlung des Cauchy'schen Problems benutzt werden, können nicht, wie in dieser Note gezeigt wird, als wesentlich verschieden betrachtet werden; vielmehr gelingt es, unter Benutzung einer Eigenschaft gewisser Enveloppen zu zeigen, dass die verschiedenen Methoden als verschiedene Interpretationen desselben Systems von Formeln betrachtet werden können. Speciell zeigt sich, dass bei der gewöhnlichen Behandlung des Problems das Darboux'sche Integral gewissermassen unbewusst auftritt. Sh.

E. Delassus. Mémoire sur la théorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Liége Mém. (2) **20**, 84 S.

Diese Arbeit ist auch 1897 als separate Schrift unter dem Titel „Leçons sur la théorie etc." erschienen (vergl. F. d. M. **28**, 299, 1897). 1. Lineare Gleichungen. 2. Kanonische Formen. 3. Eigenschaften der kanonischen Formen. 4-5. Integration der linearen oder nicht linearen kanonischen Formen. (Methoden von Jacobi und von Mayer, Lie'sche Methode.) Die gegenwärtige Abhandlung stellt in systematischer Entwickelung den Inhalt der früheren Artikel des Verf. über den Gegenstand zusammen (vergl. F. d. M. **27**, 267-268, 1896; **28**, 297-299, 1897). Mn. (Lp.)

S. N. Antajew. Bemerkung über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Moskau Math. Samml. **20**, 443-450. (Russisch.)

Um ein Involutionssystem $T_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = c_i$ $(i = 1, 2, \dots, l)$ zu integriren, sind weitere $(n-l)$ Gleichungen aufzustellen: $\varphi_j(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = b_j$ $(j = 1, 2, \dots, n-l)$, welche die Bedingungen $(T_i\varphi_k) = 0$, $(\varphi_i\varphi_k) = 0$ erfüllen. Es kommt auf die Integration von $2n$ Gleichungen zurück:

$$\varDelta dx_m = \Sigma_i dx_i \Sigma_k \frac{dT_k}{dp_m} \varDelta_{ki},$$

$$\varDelta dp_m = -\Sigma_i dx_i \Sigma_k \frac{dT_k}{dx_m} \varDelta_{ki} \quad (m=1,\dots,n), \qquad \varDelta = \frac{\partial(T_1, \dots, T_l)}{\partial(x_1, \dots, x_l)}.$$

Die l ersten dieser Gleichungen sind Identitäten, und es bleiben nur $2n-l$ Gleichungen zu integriren. Si.

D. Th. Egorow. Singuläre Elemente der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Tagebuch X. Vers. Russ. Naturf. 106-107. (Russisch.)

Vorläufiger Bericht über die Entwickelungen betreffend die Lie'sche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in der grösseren Arbeit desselben Verf.: „Partielle Differential-

gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen" veröffentlicht sind (vergl. das folgende Referat). Si.

D. Th. Egorow. Geometrische Interpretation der bilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung und der Differentialgleichungen der Charakteristiken. Tagebuch d. X. Vers. Russ. Naturf., 430-431. (Russisch.)

D. Th. Egorow. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. (Allgemeine Theorie der Integrale. Charakteristiken.) Mosk. Denkschr., phys.-math. Abt. **14**, XV + 392 S.

Die zuerst angeführte Note ist eine vorläufige Mitteilung über die Resultate der zweiten Arbeit. Letztere behandelt im I. Kap. partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die Lie'sche Theorie dieser Gleichungen, den Begriff der Integralmannigfaltigkeit, der Berührungstransformationen und deren Anwendung auf die Theorie. Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sind hier dargestellt, „weil diese Theorien noch wenig Verbreitung in Russland fanden". Nach diesem 95 Seiten umfassenden einleitenden Kapitel kommt der eigentliche Gegenstand der Untersuchung in Betracht. Zunächst giebt der Verf. im Lie'schen Sinne eine Verallgemeinerung des Begriffs der Integralmannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung: (1) $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Diese M_2 besteht aus den Elementen x, y, z, p, q, r, s, t, welche die drei Gleichungen $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$ befriedigen, und welche geometrisch durch den Punkt x, y, z, die Ebene $Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$ und einen in ihr liegenden Kegelschnitt, dessen Projection auf die xy-Ebene $r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(X-y)^2 = k\sqrt{1+p^2+q^2}$ ist, interpretirt werden. — Als Resultat ergiebt sich, dass nur eigentliche Integrale, d. h. die, deren Träger Flächen sind, nicht durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können. Der Frage der Existenz ist Kap. III gewidmet. Das Problem von Cauchy, dargestellt nach S. Kowalevski, führt zu den Integralmannigfaltigkeiten, welche den Integralcurven der Gleichungen erster Ordnung analog sind, sowie auch zu den singulären Mannigfaltigkeiten. Giebt es keine singulären Integralmannigfaltigkeiten, so erscheinen wenigstens „singuläre Elemente", welchen Begriff der Verf. zuerst eingeführt zu haben glaubt. Kap. IV behandelt die Theorie der charakteristischen Mannigfaltigkeiten erster, zweiter und höherer Ordnungen und ihre geometrische Interpretation. Eine etwas verwickelte geometrische Interpretation der Elemente führt nichts desto weniger zu interessanten Resultaten, besonders bei bilinearen Gleichungen. Kap. V enthält zuerst eine Reihe bekannter Sätze über den Zusammenhang der Charakteristiken mit den Integralen (§ 1) und dann eine eigenartige Darstellung der Methode von Darboux. Eine Reihe von Beispielen, zum Teil neue Resultate enthaltend, schliesst die Arbeit. Si.

A. R. Forsyth. Memoir on the integration of partial differential equations of the second order in three independent variables when an intermediary integral does not exist in general. Lond. Phil. Trans. A **191,** 1-86; Abstract: Lond. R. S. Proc. **62,** 283-285.

Die vorliegende Abhandlung betrifft die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variabeln. Die angewandte Methode erweist sich ohne Schwierigkeit als anwendbar auf Gleichungen mit mehr als drei unabhängigen Variabeln und von einer höheren Ordnung als der zweiten. Der Grund, weshalb solche Gleichungen des betrachteten Typus genommen werden, die kein Zwischenintegral besitzen, d. h. eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, der zufolge die ursprüngliche Gleichung befriedigt wird, ist der, dass die anderen Gleichungen, welche ein Zwischenintegral besitzen, eine Klasse für sich bilden und vom Verf. an einem anderen Orte behandelt sind (Cambr. Phil. Trans. **16,** 191-218).

Zur Lösung einer gegebenen Gleichung wird ein System von Hülfsgleichungen (subsidiary equations) construirt; dieses System besteht aus zwei Teilen. Der eine dieser Teile wird aus einer Reihe von simultanen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln und einer Anzahl abhängiger Variabeln gebildet, wobei diese Anzahl diejenige der Gleichungen um 1 übertrifft. Der andere Teil wird aus einer Reihe von Gleichungen mit einer einzigen unabhängigen Variable gebildet; die Reihe der Gleichungen in dem zweiten Teile kann, wie sich zeigt, folgerichtig durch eine Bestimmung der aus dem ersten Teile hervorgehenden unbekannten Grösse befriedigt werden. Nimmt man insbesondere die durch $F(a, b, c, f, g, h, l, m, n, v, x, y, z) = 0$ dargestellten Gleichungen, in denen x, y, z die unabhängigen Variabeln sind, v die abhängige, ferner l, m, n die ersten Ableitungen und a, b, c, f, g, h die zweiten von v, so ergiebt sich, dass diese Gleichungen sich in zwei verschiedene Klassen teilen, je nachdem die Gleichung

$$\xi^2 \frac{\partial F}{\partial a} + \eta^2 \frac{\partial F}{\partial b} + \zeta^2 \frac{\partial F}{\partial c} + 2\xi\eta \frac{\partial F}{\partial h} + 2\xi\zeta \frac{\partial F}{\partial g} + 2\eta\zeta \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

in zwei nach ξ, η, ζ lineare Gleichungen zerlegbar ist oder nicht. Wenn diese Gleichung, die den Namen charakteristische Invariante erhält wegen einer Invarianten-Eigenschaft, welche sie nachweislich besitzt, in zwei lineare Gleichungen zerlegbar ist, so wird das Integrationsverfahren der Hülfsgleichungen sehr vereinfacht.

Der erste der drei Abschnitte, in welche die Schrift zerfällt, beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie und giebt eine Methode an, durch welche Hülfsgleichungen für eine Gleichung $F = 0$ von beliebigem Grade in den Ableitungen zweiter Ordnung gebaut werden können. Wenn integrable Combinationen des Hülfssystems nicht erhaltbar sind, so zeigt eine Ausdehnung der Methode, wie Gleichungen höherer Ordnung (wenn erhaltbar) abgeleitet und mit der gegebenen Gleichung verknüpft werden können.

Der zweite Abschnitt handelt von solchen Gleichungen, deren charakteristische Invariante zerlegbar ist; hierzu werden einige Beispiele gegeben sowohl von Gleichungen, für welche die Integration des anfänglichen Hülfssystems möglich ist, als auch von Gleichungen, für welche die erweiterte Methode gebraucht werden muss.

Der dritte Abschnitt ist denjenigen Gleichungen gewidmet, deren charakteristische Invariante unzerlegbar ist. Von solchen Gleichungen sind (hinsichtlich der Anwendung auf die mathematische Physik) die interessantesten Beispiele die Gleichungen $\nabla^2 v = 0$, $\nabla^2 v = -\varkappa^2 v$ oder in der Bezeichnung der Abhandlung $a+b+c=0$, $a+b+c = -\varkappa^2 v$; die Theorie wird auf diese Gleichungen bis ins Einzelne angewandt. Lösungen, die der Verf. für neu hält, werden für beide Gleichungen erhalten. Jede Lösung schliesst zwei explicite willkürliche functionale Formen ein, und das Argument jeder dieser willkürlichen Functionen schliesst selbst ein willkürliches Element ein. Allein in jedem Falle ist die Lösung nicht die von der weitest möglichen Allgemeinheit, welche die Gleichung, wie bekannt, besitzt. Um nur ein Resultat anzuführen: Eine Lösung der Gleichung $a+b+c=0$ kann, wie folgt, dargestellt werden. Es seien p, q, r drei willkürliche Functionen von u, die nur der Bedingung $p^2+q^2+r^2=0$ unterworfen sind. Man bestimme u als eine Function von x, y, z mit Hülfe der Gleichung $au = xp(u)+yq(u)+zr(u)$, wo a eine Constante ist, ferner sei v definirt durch

$$v = H(u) + \frac{G(u)}{a - xp'(u) - yq'(u) - zr'(u)},$$

wo G und H willkürliche Functionen sind. Dann befriedigt v die Gleichung $a+b+c = \nabla^2 v = 0$. (Nach dem Auszuge in Lond. R. S. Proc. berichtet). Lp.

A. R. Forsyth. The character of the general integral of partial differential equations. Lond. M. S. Proc. **29**, 5-13.

Ampère hat gezeigt, dass die Anzahl der willkürlichen Functionen, die im allgemeinen Integral einer partiellen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen auftreten, gleich m ist unter der Voraussetzung, dass das Integral endlich ist und keine Quadraturen enthält. Unter derselben Voraussetzung wird in dieser Abhandlung gezeigt, dass die Anzahl der willkürlichen Functionen im allgemeinen Integral unabhängig von der Anzahl der unabhängigen Variablen gleich der Ordnung der Gleichung ist, und dass im allgemeinen die Anzahl der Argumente in jeder dieser Functionen um eins geringer ist als die Zahl der unabhängigen Variablen. Sh.

A. R. Forsyth. On those transformations of the coordinates which lead to new solutions of Laplace's equation. Lond. M. S. Proc. **29**, 165-206.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, alle Transformationen der Coordinaten anzugeben, durch die man aus einer allgemeinen Lösung der Laplace'schen Gleichung zu neuen Lösungen gelangt. Die bisher bekannten Transformationen sind die Veränderung des Anfangspunktes, der Axen und die Inversion, d. h. Transformation durch reciproke Radien. Es wird hier gezeigt, dass es keine anderen Transformationen giebt.

Sh.

J. E. Campbell. On the transformations which do not alter the equation $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2=0$. Messenger (2) **28**, 97-102.

In einem Aufsatze der Lond. M. S. Proc. (Transformations of coordinates leading to new solutions of Laplace's equation, Bericht s. oben) beschäftigt sich Forsyth mit dem allgemeinen Problem der Bestimmung aller Substitutionen, die zu neuen Lösungen der Gleichung $\Delta_2(u)=0$ für drei Variabeln x, y, z führen. Der Verf. zeigt, dass sich eine derartige Aufgabe mit Hülfe der Lie'schen Theorie der Berührungstransformationen sehr leicht lösen lässt.

Lp.

W. Burnside. On plane equipotential surfaces. Messenger (2) **27**, 138-146.

Der Aufsatz wurde durch die Forsyth'sche Anwendung der neuen Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen auf den Fall der Laplace'schen Gleichung veranlasst (Messenger (2) **27**, 100-109; vergl. F. d. M. **28**, 314, 1897). Die Beziehung, in welcher die zweite Lösung von Forsyth (a. a. O. S. 107) zu der ersten steht, ist ganz entbehrlich. Diese zweite Lösung ist nämlich der Differentialquotient der ersten in Bezug auf x, y oder auf z. Von dieser Bemerkung ausgehend, hat der Verf. es unternommen, die vollständige Reihe von Lösungen zu bestimmen, welche zu der Forsyth'schen ersten Lösung in derselben Beziehung stehen, in welcher das System der harmonischen Functionen ganzen negativen Grades zu r^{-1} stehen. Ferner ist die erste Forsyth'sche Lösung, soweit sie auf die Laplace'sche Gleichung Bezug hat, in eine geometrische Gestalt gebracht worden; hierbei dient als Ausgangspunkt die Bestimmung aller Systeme ebener äquipotentieller Flächen.

Lp.

E. Goursat. Sur les intégrales intermédiaires des équations du second ordre. C. R. **127**, 603-606.

Existiren für die Gleichung:

$$A(rt-s^2)+Br+Cs+Dt+E=0$$

zwei verschiedene Zwischenintegrale $F(u, v)=0$, so kann die obige Gleichung auf eine der beiden Formen $r=0$ oder $s=0$ reducirt werden.

In dieser Note wird dieses Theorem ausgedehnt auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit beliebig vielen Variablen; als Verallgemeinerung obiger Gleichung wird die Form gewählt:

$$\begin{vmatrix} p_{11}+\alpha_{11} & p_{12}+\alpha_{12} & \cdots & p_{1n}+\alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1}+\alpha_{n1} & p_{n2}+\alpha_{n2} & \cdots & p_{nn}+\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $p_{ik}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ und $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}$ beliebige Functionen von $x_1, \ldots, x_n$, $z, p_1, \ldots, p_n$ bedeuten. Sh.

E. Goursat. Sur quelques types intégrables d'équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **127**, 854-855.

Es werden fünf verschiedene Formen angegeben, auf welche sich, abgesehen von gewissen speciellen Formen, diejenigen Gleichungen $s=f(x, y, z, p, q)$ bringen lassen, für welche die Differentialgleichungen jedes Charakteristikensystems eine integrable Combination zulassen, welche die Ableitungen zweiter Ordnung enthält. Sh.

E. Goursat. Sur l'équation $\Delta\Delta u=0$. S. M. F. Bull. **26**, 236-237.

Durch die Substitutionen $z=x+iy$, $z'=x-iy$ geht die Gleichung $\Delta\Delta u=0$, wo $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist, über in $\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial z'^2}=0$, deren Integral lautet $u=f(z)+\varphi(z')+zz'[f_1(z)+\varphi_1(z')]$; hieraus folgt als Lösung von $\Delta\Delta u=0$ die Form

$$u=v(x, y)+(x^2+y^2-1)v_1(x, y),$$

wo v und v_1 Lösungen von $\Delta v=0$ sind. Für den Fall, dass u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf dem Umfang des Kreises $x^2+y^2=1$ gegebene Werte haben, ergeben sich in besonders einfacher Weise die Functionen v und v_1.

Sh.

T. Levi-Civita. Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 u=0$. Torino Atti **33**, 932-956.

Die Integration der Gleichung $\Delta_2\Delta_2 u=0$ für einen ebenen Bereich bei gegebenen Randwerten ist nur für sehr einfache Formen der Begrenzung völlig durchgeführt. Hier wird gezeigt, dass die Untersuchung stets reducirt werden kann auf die conforme Abbildung des Bereichs auf einen Kreis und auf die Auflösung eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Die Auflösung dieses Systems bietet die Hauptschwierigkeit; unter gewissen Einschränkungen führen successive Approximationen zum Ziel. Alsdann erhält man u

als Summe eines einfachen und eines doppelten Integrals, welche direct von den gegebenen Grössen des Problems und dem Parameter der conformen Abbildung des betrachteten Bereichs abhängen. Sh.

F. H. Safford. Solution of Laplace's equation in toroidal coordinates deduced by a method of imaginary inversion. Annals of Math. **12**, 27-32.

Zweck der Arbeit ist: zu zeigen, dass die für gewöhnliche Polarcoordinaten gültigen Lösungen der Gleichung $V(x, y, z) = 0$ durch eine imaginäre Transformation der Coordinaten übergeführt werden können in die Lösungen der entsprechenden Gleichung in krummlinigen Coordinaten, die sich auf ein ringförmiges System beziehen. Die in den gewöhnlichen Polarcoordinaten auftretende Gleichung der Kegelschar $x^2+y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta$ wird durch die Substitutionen: $x = \frac{kx_3}{N}$, $y = \frac{ky_3}{N}$, $z-a = \frac{k(z_3+b)}{N}$, wo $N = x_3^2+y_3^2+(z_3+b)^2$ und $2ab+k = 0$ ist, nach Weglassung der Indices und Einführung eines neuen Parameters α durch die Gleichung $\operatorname{tg}^2\vartheta = -\operatorname{tgh}^2\alpha$ übergeführt in die Gleichung:

$$(x^2+y^2+z^2-b^2)^2 = -4b^2(x^2+y^2)\operatorname{cotgh}^2\alpha.$$

Diese Gleichung stellt eine Schar Ankerringe dar, worin $\pm bi \cdot \operatorname{cotgh}\alpha$ den Abstand des Mittelpunktes der Schar vom Mittelpunkt eines erzeugenden Kreises und $\pm bi/\sinh\alpha$ den Radius dieses Kreises angiebt. Um reelle Ringe zu erhalten, muss α reell und b rein imaginär sein, so dass reelle Ringe und ebenso Kugeln dieses Systems aus imaginären Kegeln und Kugeln des ursprünglichen Systems entstehen. Sh.

S. Zaremba. Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u+\xi u+f = 0$. S. M. F. Bull. **26**, 70-77.

Bedeutet S eine geschlossene Oberfläche, die einen Bereich D umschliesst, f eine gegebene Function, die in D differentiirbar ist, ξ eine reelle oder complexe Constante und u eine Function, die der im Titel genannten Gleichung in D genügt und auf S den Wert Null annimmt, so hat Poincaré (Palermo Rend. **8**, 57-156; F. d. M. **25**, 1526-32, 1894) gezeigt, dass eine und nur eine derartige Function u existirt. Eine neue Form des Integrals wird in dieser Note gegeben, welche gültig ist für complexe Werte von ξ, deren absoluter Betrag genügend gross ist, und deren Argument zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Sh.

S. Zaremba. Die Anwendung der Picard'schen Methode auf partielle Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Prace mat.-fiz. **9**, 1-27. (Polnisch.)

Vgl. F. d. M. **28**, 309, 1897. Dn.

É. Picard. Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. American J. **20,** 87-100.

Die Methode der successiven Approximation wird auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)$$

angewandt unter den Grenzbedingungen $z=\varphi(x)$ für $y=y_0$ und $z=\psi(y)$ für $x=x_0$. Die Function F wird continuirlich vorausgesetzt, so lange der Punkt (x, y) sich in einem Rechtecke R mit den Seiten α und β parallel den Axen und dem Eckpunkte (x_0, y_0) bewegt, z zwischen $-a$ und $+a$ variirt und u und v zwischen $-b$ und $+b$. $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ sind resp. continuirlich im Intervalle x_0 bis $x_0+\alpha$ von x und y_0 bis $y_0+\beta$ von y. Ist ferner für x, y, z, u, v in diesen Intervallen
$|F(x,y,z',u',v')-F(x,y,z,u,v)|<k_1|z'-z|+k_2|u'-u|+k_3|v'-v|$,
wo die k positive Constanten bedeuten und M das Maximum des absoluten Werts von F innerhalb des genannten Bereichs, so erhält man das Integral von (1) in folgender Weise: Man integrire die successiven Gleichungen

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = F(x, y, 0, 0, 0),\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right), \ldots,$$
$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

unter der Bedingung, dass alle z für $x=0$ bei beliebigem y und für $y=0$ bei beliebigem x verschwinden; dann ist die unendliche Reihe $z=z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$ ein Integral von (1) mit den Grenzbedingungen $z=0$ für $x=0$ und für $y=0$. Die Reihe convergirt, so lange (x, y) innerhalb eines in R enthaltenen Rechtecks mit den Seiten p und p' sich befindet, die den Ungleichheiten $Mpp'<a$, $Mp<b$, $Mp'<b$ genügen. Um daraus das Integral z mit den gegebenen Grenzbedingungen zu erhalten, hat man z durch $z+\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(x_0)$ zu ersetzen. Das Folgende betrifft Anwendungen dieses Satzes, so die Feststellung der Existenz eines integrirenden Factors für den Ausdruck $dy=P(x,y)dx$ unter der alleinigen Voraussetzung, dass $P(x,y)$ continuirlich ist und partielle Derivirte zweiter Ordnung in Beziehung auf y hat. Damit hängt das bemerkenswerte Resultat zusammen, dass für die Möglichkeit der conformen Abbildung einer Fläche auf eine Ebene es nicht notwendig ist, dass die Fläche analytisch sei, sondern es hinreicht, dass die drei Coefficienten E, F, G im Quadrat des Linearelements $ds^2=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ continuirliche Functionen von x und y sind, die partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in Beziehung auf y besitzen. Hr.

E. Picard. Sur l'équation $\Delta u = e^u$. Journ. de Math. (5) **4,** 313-316.

Zusammenfassung und Ergänzung der früheren Noten des Verf.

über den gleichen Gegenstand (vgl. F. d. M. **22**, 357, 1890; **27**, 276, 1896; **28**, 312, 1897). Lsg.

F. v. DALWIGK. Ueber die Integration von $\Delta u = 0$ und die conforme Abbildung. Marburg. 53 S. 8°.

J. LE ROUX. Sur l'intégrabilité des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Laplace. S. M. F. Bull. **26**, 55-56.

Es werden in dieser Note Bedingungen dafür angegeben, dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

durch die Laplace'sche Methode integrabel sei. Sh.

J. LE ROUX. Sur les invariants des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. C. R. **126**, 721-723.

Betrachtet man die Gleichung:

$$\Sigma \frac{n!}{i!k!(n-i-k)!} A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0 \quad (A_{n,0} = 0,\ A_{n-1,1} = 1)$$

und setzt $z \cdot e^{\int A_{n-1} dy} = u$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = u_1$, so kann die Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\Delta(u_1) = \lambda_0 \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} + \frac{n-2}{1}\lambda_1 \frac{\partial^{n-3} u}{\partial x^{n-3}} + \cdots + \lambda_{n-2} u,$$

wo $\Delta(u_1)$ die Ableitungen von u_1 bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält, und worin der Coefficient von $\frac{\partial^{n-1} u_1}{\partial x^{n-1}}$ gleich n ist. Wenn man nun einen Wechsel der Function und der Variablen, nämlich $z = kz'$, $x = \varphi(x')$, $y = \psi(x', y')$ vornimmt, wobei die lineare Form der Gleichung und die Charakteristiken $x = \text{const.}$ gewahrt bleiben, so wird die Determinante

$$h_p = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \lambda_p}{\partial y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^p \lambda_0}{\partial y^p} & \frac{\partial^p \lambda_1}{\partial y^p} & \dots & \frac{\partial^p \lambda_p}{\partial y^p} \end{vmatrix}$$

sich reproduciren, multiplicirt mit der $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)^{\text{ten}}$ Potenz der Functionaldeterminante $\frac{\partial x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'}$. Sh.

J. Le Roux. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles.
Journ. de Math. (5) **4**, 359-408; auch sep. Paris. 50 S. 4°.

Es wird in vorliegender Abhandlung ein eingehendes Studium der linearen partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen unternommen in Anlehnung an die Ergebnisse, die man bei der zweiten Ordnung erhalten hat. Die Resultate sind zum Teil schon vom Verf. in einer früheren Note (C. R. **125**, 1015-1017; F. d. M. **28**, 316, 1897) gegeben worden. Zunächst werden die analytischen Eigenschaften der Integrale zu ermitteln gesucht, für welche auf einer nicht charakteristischen Linie der Anfangswert und die der $n-1$ ersten äusseren Ableitungen (dérivées extérieures) gegeben sind. Diese werden folgendermassen erklärt: werden die Coordinaten der Punkte einer Ebene durch zwei Parameter α und β bestimmt, und ist die betreffende Curve durch die Gleichung $\beta=\beta_0$ gegeben, so sind die gegebenen Anfangswerte Functionen von α; die Kenntnis von z auf β zieht demnach die Kenntnis von $\partial z/\partial\alpha$ mit sich, dagegen sind $\partial z/\partial\beta, \partial^2 z/\partial\beta^2, \dots$ hierdurch nicht bestimmt; diese Ableitungen werden mit dem obigen Namen belegt. Es wird nun, wesentlich gestützt auf die Methode der successiven Approximationen, bewiesen, dass jedem Stück A der Geraden $x=x_0$, welches gewissen Bedingungen genügt, ein gewisser Bereich R zugewiesen werden kann derart, dass jedes Integral, welches durch holomorphe Anfangsbedingungen auf A bestimmt ist, auch in R holomorph ist.

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass ein Integral z gefunden werden kann, wenn auf einer Charakteristik p^{ter} Ordnung die Werte von z und seiner $(n-p-1)$ ersten äusseren Ableitungen gegeben sind und auf einer zweiten Curve, welche die Charakteristik in einem nicht singulären Punkte schneidet, die Werte von z und seiner $(p-1)$ ersten äusseren Ableitungen. Besonders für den Fall einfacher Charakteristiken ist hierbei von Wichtigkeit die Einführung der sogenannten Hauptintegrale, die im Referat über die eingangs erwähnte Note besprochen worden sind. Wenn x eine einfach charakteristische Variable ist, so existirt eine zugeordnete Schar von Hauptintegralen. Jedes derselben ist völlig bestimmt durch die Werte, welche es auf einer beliebigen Curve annimmt, die nicht eine der Charakteristiken der betrachteten Schar ist.

Im dritten Teil werden die zufälligen Singularitäten behandelt, d. h. diejenigen, welche von den Anfangsbedingungen abhängen, und es zeigt sich, dass die zufälligen singulären Curven stets Charakteristiken sind.

Sh.

E. Holmgren. Om differentialekvationen

$$\Sigma A_{ik}(x,y)\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i\partial y^k}=0, \left(\begin{matrix} i=0,1,\dots,p, \\ k=0,1,\dots,q,\end{matrix}\quad p+q=n,\ A_{pq}=1\right).$$

Upsala universitets årskrift 1898.

Im ersten Teil werden einige Resultate von Delassus (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**; F. d. M. **26**, 385, 1895) über diese Gleichung für

den Fall, dass die Coefficienten nicht analytisch sind, in einfacher Weise hergeleitet.

Im zweiten Teile wird die Theorie der Hauptintegrale von Le Roux (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**; F. d. M. **26**, 389, 1895) betreffs der Gleichung zweiter Ordnung auf diese Gleichung angewandt. Hmg.

O. Tedone. Sull'integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0$.
Annali di Mat. (3) **1**, 1-23.

Das von Volterra (Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{1}_2$, 265-277; F. d. M. **24**, 984-988, 1892) angewandte Verfahren für den Fall $m = 2$ ist vom Verf. auf den Fall $m = 3$ ausgedehnt worden (Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 357-360; F. d. M. **27**, 702, 1896). In dieser Arbeit wird dasselbe Verfahren auf den Fall beliebiger Werte von m ausgedehnt. Sh.

O. Niccoletti. Sulla teoria della trasformazione delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti. Torino Atti **33**, 956-968.

In früheren Arbeiten (Torino Atti **32**, 790-816, 970-996; F. d. M. **28**, 310, 1897) hatte der Verf. gezeigt, dass die homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewisse Transformationen zulassen, die „integro - differentiale“ Transformationen genannt wurden. Hier wird das Problem für höhere Ordnungen untersucht; das Resultat ist ein negatives. Wenn nicht besondere Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung bestehen, so existiren derartige Transformationen nicht. Sh.

P. Burgatti. Sulla trasformazione delle equazioni differenziali del secondo ordine con due variabili independenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{7}_1$, 21-27.

Gelingt es, die Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

in eine Gleichung $\varphi(x, y, p, r, s, t) = 0$, in der also z und q fehlen, zu transformiren, so kann aus dieser Gleichung durch Differentiation eine Gleichung $A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + N = 0$ abgeleitet werden, die also in den zweiten Ableitungen von p linear ist, und in der A bis N Functionen von $x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ bedeuten. Kann diese Gleichung integrirt werden, so kann auch mittels Quadraturen das Integral z gefunden werden, welches $\varphi = 0$ befriedigt. Diese Transformationsmethode wird auf verschiedene specielle Gleichungen angewandt, bei denen sie zur völligen Integration oder wenigstens zu bemerkenswerten Resultaten führt. Sh.

P. Burgatti. Sui metodi d'integrazione per l'equazioni differenziali con due variabili indipendenti. Palermo Rend. **12,** 210-221.

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen es möglich ist, dass neben der Gleichung:

$$F = p + f(x, y, z, q) = 0,$$

resp.

$$F = r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

die Identität besteht:

$$\varrho\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

wo ϱ, u und v Functionen der unter f stehenden Grössen sind und die Klammern die totalen Ableitungen bedeuten; ferner auch, unter welchen Bedingungen die allgemeine Gleichung besteht:

$$\varrho\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

wo jetzt ϱ, u, v auch die Ableitungen von z bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten. Bei der Untersuchung zeigt sich, dass man hierbei auf die von Lagrange, Monge und Darboux herrührenden Integrationsmethoden geführt wird, so dass man sagen kann, diese Methoden haben einen gemeinsamen Ursprung, der in der einfachen Idee liegt, die gegebene Differentialgleichung oder eine, die durch Differentiation daraus hervorgeht, auf eine unmittelbar integrable Form durch Benutzung eines Multiplicators zu bringen. Sh.

A. Vaccaro. Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre. Darboux Bull. (2) **22,** 37-64.

Die von Picard für Differentialgleichungen zweiter Ordnung benutzte Methode der successiven Approximationen wird vom Verf. auf die Gleichung

$$\Delta\Delta u = a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + a_4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots + a_{10} u = \Gamma(u),$$

wo $\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ und $a_1, \ldots, a_{10}$ reguläre, in einem gewissen endlichen Gebiete σ, dessen Begrenzung s sei, stets endliche Functionen bedeuten. Man integrire:

$$\Delta\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta\Delta u_1 = \Gamma(u_0), \qquad \Delta\Delta u_2 = \Gamma(u_1), \ldots$$

mit der Bedingung, dass $u_0 = u_s$ und $\frac{\partial u_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ auf s sei, wo u_s und $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ zwei auf s willkürlich gegebene Functionen sind, während

für die übrigen Functionen $u_i = \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0$ auf s sei. Es ergiebt sich dann, dass für hinreichend kleine Gebiete σ ein reguläres Integral der gegebenen Gleichung existirt, welches auf dem Umfang ebenso wie die Ableitung nach der Normale beliebig gegebene Werte annimmt; es lässt sich dieses Integral durch successive Approximationen bestimmen. Ist $F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu$, so zeigt sich, dass das gefundene Integral das einzige ist, welches den erwähnten Grenzbedingungen genügt, immer unter der Bedingung, dass σ hinreichend klein ist. Zum Schluss wird eine Ausdehnung der gefundenen Resultate auf nicht lineare Gleichungen gegeben. Sh.

Hj. Mellin. Ueber die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale. Acta Math. **22**, 19-40.

Es wird gezeigt, dass die vielfachen Integrale mit veränderlichen Parametern bei partiellen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten ebenso verwendet werden können wie die einfachen Integrale bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, und zwar gelingt dies durch Benutzung von Verallgemeinerungen der Lagrange'schen Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken. Diese Beziehungen werden in der Form erhalten:

$$\psi \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = (-1)^{h+k} \sum_{\mu,\nu=0}^{h,k} (-1)^{\mu+\nu} \binom{h}{\mu}\binom{k}{\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}\psi}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}\right]$$

und:

$$\psi \sum_{h,k=0}^{\mu,\nu} P_{h,k}(x,y)\frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} - \varphi \sum_{h,k=0}^{m,n} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}[P_{hk}(x,y)\psi]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} P(\varphi,\psi) + \frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi,\psi),$$

wo P und Q gewisse in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Die partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu,\nu,h,k} C_{\mu,\nu}^{(h,k)} x^\mu y^\nu \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = 0$$

können auf die beiden Formen:

$$\sum_{h,k} x^h y^k f_{h,k}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0$$

und:

$$\sum_{h,k} x^h y^k F_{h,k}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0$$

gebracht werden, wo die Symbole f und F für Ausdrücke der Form

$\sum_{h,k} C^{(h,k)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi$ und $\sum_{h,k} C^{(h,k)} \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi$ gebraucht werden. Setzt man nun $\varphi = e^{ux+vy}$, wendet die obigen Beziehungen auf diese Gleichungen an und integrirt, so erhält man den Satz: Ist ψ eine Lösung von:

$$\sum_{h,k} f_{h,k} \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right) x^h y^k \psi = 0,$$

und sind die Integrationswege so gewählt, dass

$$\int\limits_{(x)} \int\limits_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q\right) dx\, dy = 0$$

identisch erfüllt ist, so genügt $\Psi(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy} \psi(x, y)\, dx\, dy$ der Gleichung:

$$\sum_{h,k} f_{h,k}(u, v) \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} \Psi = 0.$$

Gleichzeitig besteht zwischen den beiden hier auftretenden Differentialgleichungen eine reciproke Beziehung, infolge deren sie sich gegenseitig durch bestimmte Integrale integriren. Aehnliche Sätze werden für andere Formen der gegebenen Differentialgleichungen abgeleitet. Sh.

S. Lie. Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen. Leipz. Ber. **50,** 1898, 113-180.

Die letzte Arbeit, die Lie veröffentlicht hat. Er knüpft darin an die Klassification der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung an, die er schon 1872 in den Göttinger Nachrichten angegeben hatte. In Kapitel 1 (S. 114-144) untersucht er die (Berührungs-) Transformation, die durch $n-1$ Gleichungen $\varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0$ ($\varkappa = 1, \ldots, n-1$) zwischen den beiden Räumen der x und der X definirt wird. Er bespricht eingehend die Beziehung zwischen den beiden Systemen Monge'scher Gleichungen, die durch die Gleichungen $\varphi_\varkappa = 0$ in den beiden Räumen bestimmt werden, und von denen man das eine $f_\mu(x_1, \ldots, x_n, dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n) = 0$ ($\mu = 1, \ldots, n-2$) durch Elimination der X aus den Gleichungen:

$$\varphi_\varkappa = 0, \quad \sum_\nu^{1,\ldots,n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_\nu} dx_\nu = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n-1)$$

erhält, das andere $F_\mu = 0$ ($\mu = 1, \ldots, n-2$) in ähnlicher Weise durch Elimination der x. Jeder Integralcurve des ersten Monge'schen Systems entspricht nämlich eine Integralcurve des zweiten, und dadurch ist zugleich ein Entsprechen zwischen den Linienelementen beider Gleichungen festgestellt. Lie führt nun den Begriff des Flächenstreifens ein, der durch zwei unendlich benachbarte Curven des R_n bestimmt ist, und zwar ver-

steht er darunter die zugehörige Schar von ∞^1 Elementen E_2, deren jedes aus einem Punkte und einer hindurchgehenden zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit besteht. Insbesondere betrachtet er die Flächenstreifen, die durch zwei unendlich benachbarte, einander schneidende Curven K des Raumes X bestimmt sind, wo K irgend eine der ∞^n Curven ist, die vermöge $\varphi_x = 0$ den Punkten des Raumes x entsprechen. Im allgemeinen sind den ∞^1 Elementen eines solchen Streifens ∞^1 verschiedene Elemente e_2 derselben Art im Raume x zugeordnet, wenn aber das Monge'sche System $f_\mu = 0$ aus lauter Pfaff'schen Gleichungen besteht, so entspricht den ∞^1 Elementen jedes der betrachteten Streifen im Raume x nur ein Element e_2, und, was besonders merkwürdig ist, die ∞^1 zu einer festen Curve K unendlich benachbarten Curven K bestimmen mit dieser Curve alle denselben Streifen, so dass die Zahl dieser Streifen nicht wie im allgemeinen ∞^{n+1} beträgt, sondern bloss ∞^n. Ferner ergiebt sich, dass der Inbegriff aller zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des Raumes X, die von je ∞^1 einander schneidenden Curven K erzeugt werden, im allgemeinen durch gewisse partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit $n-2$ unabhängigen und 2 abhängigen Veränderlichen definirt wird, dass aber in dem erwähnten speciellen Falle, wo die Gleichungen $f_\mu = 0$ linear sind, zur Definition dieser Mannigfaltigkeiten schon $2n-5$ solche Differentialgleichungen erster Ordnung genügen. Endlich zeigt Lie noch, dass in diesem speciellen Falle die eben erwähnten Mannigfaltigkeiten auch noch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer abhängigen und $n-1$ unabhängigen Veränderlichen befriedigen, diejenige nämlich, die zu Charakteristiken die ∞^n Curven K hat, und dass sie die einzigen zweifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten dieser Gleichung sind. Er beweist sogar, dass man auf diese Weise die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung des R_n erhält, bei der die Schar der Charakteristiken bloss aus ∞^n Curven besteht. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Gleichungen: $\varphi_x = 0$ in allgemeinster Weise so zu wählen, dass das Monge'sche System: $f_\mu = 0$ linear wird. Am Schlusse des Kapitels zeigt Lie noch, dass jedesmal, wenn beide Monge'sche Systeme $f_\mu = 0$ und $F_\mu = 0$ aus linearen Gleichungen bestehen, diese Systeme unbeschränkt integrabel sind, und leitet daraus als einen Specialfall den Bäcklund'schen Satz her, dass es in der Ebene für $n > 1$ keine Transformationen giebt, bei denen Berührung n-ter Ordnung erhalten bleibt, aber Berührung niederer Ordnung zerstört wird. Kapitel 2 (S. 144-167) behandelt zunächst zweigliedrige, nicht integrable Pfaff'sche Systeme des R_n und zeigt, wie ein solches System integrirt werden kann, wenn es eine sogenannte vollständige Lösung besitzt, die durch drei, vier oder fünf Gleichungen von der Form: $u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$ dargestellt wird. Lie giebt allerdings keine Kriterien, an denen man erkennen kann, wann diese Voraussetzung erfüllt ist; aber seine ganze Betrachtungsweise ist höchst lehrreich und für diese Art von Untersuchungen vorbildlich. Ferner behandelt er $(n-2)$-gliedrige nicht integrable Pfaff'sche Systeme des R_n und zeigt, dass zwischen diesen

Systemen und den $(n-3)$-gliedrigen Monge'schen Systemen im R_{n-1} ein Zusammenhang besteht derart, dass jedem Systeme der einen Art eines der andern Art zugeordnet werden kann, und dass dabei die Integralcurven beider Systeme einander entsprechen. Indem Lie dieses Ergebnis mit denen des ersten Kapitels in Verbindung setzt, erhält er ein neues Verfahren zur Bestimmung aller partiellen Gleichungen erster Ordnung des R_n, die bloss ∞^n charakteristische Curven haben; nämlich jede Schar von ∞^n Integralcurven eines beliebigen $(n-3)$-gliedrigen Monge'schen Systems des R_{n-1} kann zur Aufstellung einer solchen Gleichung des R_n benutzt werden, und in dieser Weise erhält man sie alle. Eine besonders einfache Fassung kann dieses Verfahren im Falle $n=4$ erhalten. Kapitel 3 (S. 167-180) lehrt die Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des R_n, die bloss ∞^{n+1} charakteristische Curven haben. Er betrachtet zu diesem Zwecke ein Gleichungssystem von der Form:

$$\varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n+1}, \; X_1, \ldots, X_n) = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n-1)$$

und untersucht das dadurch definirte Entsprechen zwischen den beiden Räumen x und X. Er zeigt, dass jedesmal, wenn die Gleichungen $\varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n+1}, \; C_1, \ldots, C_n) = 0$ mit den willkürlichen Constanten C_ν ein $(n-3)$-gliedriges, nicht integrables Pfaff'sches System befriedigen, die Gleichungen: $\varphi_\varkappa(c_1, \ldots, c_{n+1}, X_1, \ldots, X_n) = 0$ die ∞^{n+1} charakteristischen Curven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung des R_n darstellen, und dass man auf diese Weise die allgemeinste Differentialgleichung dieser Art erhält. Die Betrachtungen, die Lie dabei benutzt, sind denen des Kap. 1 analog. Den Schluss bilden einige Beispiele für die wirkliche Aufstellung solcher Differentialgleichungen erster Ordnung. El.

P. Medolaghi. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali. Annali di Mat. (3) **1**, 229-263.

Der Verf. knüpft an die von Lie skizzirte allgemeine Integrationstheorie von Differentialgleichungen des R_3 an, die eine unendliche Gruppe gestatten, und will einen Teil des Lie'schen Programms ausführen. Er beschränkt sich auf Gruppen von Punkttransformationen und vereinfacht die Untersuchung zunächst durch folgende Bemerkung: Wenn eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eine unendliche Gruppe G gestattet, in der eine ebenfalls unendliche Gruppe g enthalten ist, so gestatten die Hülfsgleichungen erster Ordnung, auf deren Integration alles hinauskommt, ihrerseits eine gewisse Gruppe, die endlich oder unendlich sein kann. Demnach ist es zweckmässig, zunächst nur nach solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu fragen, die eine unendliche Gruppe G gestatten, in der keine ebenfalls unendliche Untergruppe enthalten ist. Ja, durch die Bestimmung aller dieser Differentialgleichungen ist sogar die Ausführung jenes Lie'schen Programms so weit gefördert, dass nur noch Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung,

die eine endliche oder unendliche Gruppe gestatten, übrig bleiben. Denn, wie der Verf., allerdings ohne den Beweis auszuführen, mitteilt: Jede unendliche Gruppe G enthält eine unendliche Untergruppe g, deren allgemeine infinitesimale Transformation nur von einer willkürlichen Function mit einem Argumente abhängt, nicht aber von einer willkürlichen Constante, so dass also in g keine durch Differentialgleichungen definirbare unendliche Untergruppe vorhanden ist. Ueberdies lässt sich jede Gruppe g von dieser Beschaffenheit durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf die Form bringen:

$$\text{(I)} \qquad \xi(x_1)X_0f+\sum_i^{1,\dots,s}\frac{d^i\xi}{dx_1^i}X_if,$$

wo $\xi(x_1)$ die willkürliche Function ist und die X_if bestimmte infinitesimale Transformationen sind.

Der Verf. bestimmt nun im R_3 alle unendlichen Gruppen von der Form (I) und findet in dem Falle, dass nicht alle (X_iX_k) verschwinden, dass also die Gruppe mit der unendlichen Gruppe aller Transformationen des R_1 gleichzusammengesetzt ist, 9 Typen von solchen Gruppen (die Zahl s ist $\leqq 5$), in dem Falle aber, dass alle (X_iX_k) verschwinden, dass also die Gruppe mit der unendlichen Gruppe: $\xi(x)q$ der Ebene gleichzusammengesetzt ist, 14 Typen. Zu den gefundenen Typen berechnet er dann die zugehörigen invarianten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die, nebenbei bemerkt, alle von r frei sind. El.

P. Medolaghi. Sui gruppi isomorfi al gruppo di tutte le trasformazioni in una variabile. Memoria I[a]. Palermo Rend. **12**, 188-209.

Der Verf. behandelt die Bestimmung aller unendlichen Gruppen von der Form:

$$\xi(x_1)X_0f+\sum_{i=1}^{s}\frac{d^i\xi}{dx_1^i}X_if,$$

wo ξ eine willkürliche Function und die X_if infinitesimale Transformationen in n Veränderlichen $x_1,\dots,x_n$ sind. Er zeigt, dass, wenn $s>2$ ist, die Transformationen X_0f, X_1f, X_2f eine ganz bestimmte Normalform erhalten können, während für X_sf noch fünf verschiedene Normalformen möglich sind. In drei dieser fünf Fälle ist $n\overline{\geqq}4$, in den beiden übrigen $\overline{\geqq}3$. Die beiden letzteren Fälle erledigt er für beliebiges n vollständig und zeigt, dass sie nur auf Gruppen des R_3 und des R_4 führen. Der Verf. gelangt so wieder zu den Gruppen des R_3, die er in der im vorangehenden Referate besprochenen Arbeit: Classificazione etc. bestimmt hat. Die Untersuchung der drei übrigen Fälle wird nur bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt und in einer weiteren Arbeit fortgesetzt werden mit besonderer Rücksicht auf die Gruppen des R_4.

El.

P. Medolaghi. Sur les groupes qui se présentent dans la généralisation des fonctions analytiques. C. R. **126**, 1188-1190.

Picard hatte gezeigt, wie man gewisse Systeme von partiellen Differentialgleichungen bilden kann, die eine Verallgemeinerung der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen liefern, und die überdies gewisse continuirliche Gruppen im Sinne Lie's definiren (s. F. d. M. **24**, 331, 1892). Der Verf. bemerkt, dass alle diese Gruppen die Gruppe der Translationen enthalten, ja dass sie durch diese Eigenschaft geradezu definirt sind. Er deutet sodann an, wie man die Picard'sche Methode so verallgemeinern kann, dass sie alle Gruppen des R_n liefert, mit Ausnahme von dreien, die leicht angebbar sind. El.

R. von Lilienthal. Zur Theorie der Berührungstransformationen. Math. Ann. **50**, 303-313.

Der Verf. bestimmt alle Transformationen, bei denen die Integralcurven einer beliebigen Pfaff'schen Gleichung: $\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0$ derart unter einander vertauscht werden, dass die Berührung erhalten bleibt. Dabei benutzt er als Coordinatenlinien erstens die Integralcurven des simultanen Systems: $dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta$ und zweitens zwei hierzu und zu einander orthogonale Scharen von je ∞^2 Curven und stützt sich auf die in seinem Buche: „Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen“ (F. d. M. **27**, 503, 1896) entwickelten Formeln. Es handelt sich auf diese Weise um Transformationen in vier Veränderlichen x, y, z, τ, wo τ die Tangente des Winkels ist, den eine durch x, y, z gehende Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung mit einer durch x, y, z gehenden Coordinatenlinie bildet. Der Verf. stellt zunächst die Bedingungen auf, denen die gesuchten Transformationen genügen müssen, wenn sie endlich sind, sodann sucht er alle infinitesimalen Transformationen dieser Art und findet, dass sie, wenn die Pfaff'sche Gleichung nicht integrabel ist, erweiterte Punkttransformationen sind. Ist die Pfaff'sche Gleichung integrabel, und beschränkt man sich auf Transformationen, bei denen jede einzelne ihrer Integralflächen invariant bleibt, so erhält man genau dieselben Formeln, wie für die infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene. El.

W. de Tannenberg. Sur un théorème de M. Lie. Bordeaux Procès-verbaux, 1897/98, 49-55.

Der Vortrag soll den Leser rasch mit den Elementen der Lie'schen Theorie der Berührungstransformationen bekannt machen und zeigt die Möglichkeit an dem Beweise eines der grundlegenden Sätze dieser Theorie, der dann sofort auf eine Monge'sche partielle Differentialgleichung angewandt wird. Lp.

E. O. Lovett. Sur une classe de transformations de contact. C. R. **127**, 480-482.

Directe Bestimmung aller Berührungstransformationen des R_{n+1}, bei

denen die Differentialgleichung:

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 z_n}{\partial x_n^2} = 0$$

invariant bleibt. Es ergiebt sich das von vorn herein selbstverständliche Resultat, dass diese Transformationen in der Form: LQL darstellbar sind, wo Q eine beliebige Punkttransformation ist und L eine Legendresche Transformation. El.

E. O. Lovett. Sur les invariants différentiels d'un système de $m+1$ points par rapport aux transformations projectives. C. R. **127,** 346-349.

Der Verf. teilt eine Anzahl Differentialinvarianten zweiter Ordnung mit, die ein System von $m+1$ Punkten gegenüber der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n+1} besitzt, und deutet diese geometrisch, indem er die von Kronecker herrührende Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses benutzt. El.

E. O. Lovett. Infinitesimal transformations of concentric conics. American M. S. Bull. (2) **4,** 520-524.

Die allgemeinste infinitesimale Punkttransformation, welche die Familie aller concentrischen Kegelschnitte invariant lässt, ist:

$$Uf \equiv \left\{ax(x^2+y^2)+\varkappa x+\frac{\lambda}{x}\right\}\frac{\partial f}{\partial x}+\left\{ay(x^2+y^2)+py+\frac{\nu}{y}\right\}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Lp.

E. O. Lovett. Note on the infinitesimal projective transformations. American M. S. Bull. (2) **4,** 515-519.

Der Aufsatz bezweckt die Aufstellung der allgemeinsten infinitesimalen projectiven Transformation des gewöhnlichen Raumes auf directem Wege aus der einfachsten charakteristischen geometrischen Eigenschaft. Lp.

E. O. Lovett. Note on contact transformations. American M. S. Bull. (2) **4,** 402-404.

Die Note soll eine beiläufige Bemerkung von Mehmke in Schlömilch Z. **37,** 186-189 (vergl. F. d. M. **24,** 725, 1892) modificiren, um Missverständnissen vorzubeugen. Lp.

W. Ahrens. Ueber discrete Scharen von continuirlichen Transformationen. Math. Ann. **50,** 518-524.

Es handelt sich um die Gruppen, die Lie in Ermangelung eines besseren Namens als gemischt bezeichnet hat, und die aus einer Anzahl von discreten Scharen bestehen, von denen jede für sich continuirlich

ist. Der Verf. stellt über diese Gruppen eine Reihe von Sätzen auf, die sich durch Uebertragung allgemeiner substitutionentheoretischer Sätze auf den vorliegenden Fall ergeben. Namentlich zeigt er, wie man eine möglichst kleine Anzahl von der Gruppe angehörigen Scharen finden kann, durch deren Angabe die Gruppe vollständig bestimmt ist. El.

J. E. Campbell. On a law of combination of operators. (Second paper.) Lond. M. S. Proc. **29**, 14-32.

Es wird die Formel gesucht, welche der Formel $e^y e^x = e^{y+x}$ entspricht, falls die Operatoren x und y den Distributions- und Associationsgesetzen, nicht aber den Commutationsgesetzen gehorchen. Bedeutet $y_1 = yx - xy$, $y_r = y_{r-1}x - xy_{r-1}$, $(p, q) = y_p y_q - y_q y_p$ etc., so wird folgende Formel bewiesen: Sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ die Reihe numerischer Constanten, die schon in einer früheren Abhandlung des Verf. eingeführt wurden (Lond. M. S. Proc. **28**, 381; F. d. M. **28**, 321, 1897), und welche mit den Bernoulli'schen Zahlen durch die Gleichung $a_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-1}}{2n!}$ verbunden sind, und b_{pq}, b_{pqr} etc. andere durch die a bestimmte Zahlen, so gilt die Gleichung:

$$e^y e^x = e^w, \text{ wo } w = x + y + a_1 y_1 + \cdots + \Sigma b_{pq}(pq) + \cdots.$$

Diese Formel wird dann noch verallgemeinert in $e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_3}$, wo

$$w_1 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{pq}(pq) + \cdots + a_{pqr}(pqr) + \cdots$$

und w_2 und w_3 hieraus durch Vertauschung von a mit b und c entstehen, wo a und b beliebige und c hiervon abhängige Constanten bedeuten. Sh.

Kapitel 7.

Variationsrechnung.

H. Hancock. Calculus of variations: Further discussion of the first variation and the solution of the differential equation $G = 0$ for several interesting examples. Annals of Math. **12**, 33-44.

Dieser Aufsatz bildet die Fortsetzung von vier früheren Abhandlungen desselben Verfassers, welche den Zweck hatten, eine Einführung in die Weierstrass'sche Theorie der Variationsrechnung hauptsächlich für amerikanische Studirende zu geben [vgl. die Referate in F. d. M. **26**, 413, 1895 und **27**, 291, 1896]. Als Grundlage dienten Nachschriften von Weierstrass'schen Vorlesungen und eine Vorlesung von H. A. Schwarz, welche der Verf. im Sommer 1891 gehört hatte.

In der vorliegenden Abhandlung werden zunächst die allgemeinen Untersuchungen und Betrachtungen weiter geführt und deren Ergebnisse dann auf drei Probleme angewandt. Es sind dies: 1. die Bestimmung

der Rotationsfläche (Catenoid), welche ein Minimum des Flächeninhalts besitzt; 2. das Problem der Brachistochrone und 3. das der kürzesten Linie auf einer gegebenen krummen Fläche; von dem letzteren wird aber nur der besondere Fall der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten einer Kugelfläche erledigt. Alle drei Probleme hat Weierstrass in seinen Vorlesungen behandelt; ihm und Schwarz sind auch die von dem Verf. mitgeteilten Resultate zu verdanken. Hau.

F. Rudio. Ueber die Principien der Variationsrechnung und die geodätischen Linien des n-dimensionalen Rotationsellipsoides. Zürich. Naturf. Ges. **43,** 340-353.

Die vorliegende Mitteilung ist eine gekürzte Wiedergabe der aus dem Jahre 1881 stammenden Habilitationsschrift des Verf., welche einer Anregung Weierstrass', die von ihm im Jahre 1879 zum ersten Male vorgetragenen neuen Grundlagen der Variationsrechnung auf n Dimensionen zu verallgemeinern, ihre Entstehung verdankt. Die Arbeit zerfällt in drei Teile, von denen der erste Teil eine Uebersicht über die vorgenannten Weierstrass'schen Untersuchungen und der zweite Teil deren Verallgemeinerung auf n Dimensionen giebt. Der letzte Teil behandelt dann als Beispiel die Aufgabe, die n Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$, welche mit einander durch die Gleichung

$$f = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} - 1 = 0$$

verbunden sind, so als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t zu bestimmen, dass das Integral

$$J = \int_{t'}^{t''} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2}\, dt$$

ein Minimum wird. Es wird gezeigt, dass und wie sich das n-dimensionale Problem auf das analoge dreidimensionale zurückführen lässt.

Hau.

A. Kneser. Ableitungen hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation. Math. Ann. **51,** 321-345.

Während man es früher als selbstverständlich ansah, dass, wenn die erste Variation eines Integrales J verschwindet, der unendlich kleine Zuwachs ΔJ desselben mit der zweiten Variation gleiches Vorzeichen habe, und infolge dessen eine Reihe von Forschern sich bemüht hat, die zweite Variation so umzuformen, dass ihr Vorzeichen möglichst leicht erkennbar sei, hatte man seit längerer Zeit erkannt, dass der Schluss vom Vorzeichen der zweiten Variation auf das von Δ nicht einwandsfrei ist. Dadurch aber war die ganze Theorie der zweiten Variation von Grund aus erschüttert worden, und sie musste, um brauchbar zu bleiben, so ergänzt werden, dass sie zu einer strengen Ableitung hin-

reichender Bedingungen des Extremums führt. Eine solche Ergänzung giebt der Verf. in der vorliegenden Abhandlung, in welcher er zu dem folgenden Ergebnisse gelangt.

„Um das Integral $J = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)dx$ bei den Bedingungsgleichungen (A): $\varphi_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ zu einem Extremum zu machen, werde Folgendes vorausgesetzt. 1. Setzt man $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r$, so seien $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_r$ im Intervall von a bis b reguläre Functionen von x, welche den Gleichungen (A) und

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_\nu} = 0 \;\; (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; die Substitution $y_\nu = \overline{y}_\nu$, $\lambda_\varrho = \overline{\lambda}_\varrho$ werde allgemein durch Ueberstreichen angedeutet. 2. Die Functionen f und φ_ϱ seien analytisch und in der Umgebung der Stelle $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n, \overline{y}'_1, \ldots, \overline{y}'_n)$ regulär, wenn $a \leq x \leq b$; an jeder dieser Stellen sei mindestens eine Functionaldeterminante der r Functionen φ_ϱ nach r Argumenten y' von Null verschieden. 3. Für eben diese Stellen habe die quadratische Form $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\overline{\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu}}u_\mu u_\nu$ ein festes Vorzeichen bei den Bedingungsgleichungen $\sum_{\nu=1}^{n}\overline{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu}}u_\nu = 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ und verschwinde unter diesen Bedingungen nur, wenn alle Argumente verschwinden. 4. Bezeichnet man die unter den Bedingungen (2), (3) in der allgemeinen Lösung der Gleichungen (A), (B) auftretenden $2n$ Integrationsconstanten durch $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ und setzt für $x = a$ allgemein $y_\nu = y_\nu^0$, so sei die Functionaldeterminante $\overline{\frac{\partial(y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial(c_1, \ldots, c_{2n})}}$ für $a < x \leq b$ von Null verschieden.

Alsdann giebt es eine positive Constante ε von der Beschaffenheit, dass das Integral $\overline{J}$ einen Zuwachs von unveränderlichem Vorzeichen erhält, wenn man $\overline{y}_\nu$ durch $\overline{y}_\nu + \delta y_\nu$ ersetzt und annimmt, dass letztere Grössen, für y_ν gesetzt, den Gleichungen (A) genügen, dass ferner die Grössen δy_ν, ebenso wie ihre Ableitungen $\delta y'_\nu$, stetige Functionen von x sind; dass endlich für $x = a$ und $x = b$ die Gleichungen $\delta y_\nu = 0$, in dem ganzen Integrationsintervalle aber die Ungleichungen $|\delta y_\nu| < \varepsilon$, $|\delta y'_\nu| < \varepsilon$ bestehen." Hau.

G. v. ESCHERICH. Die zweite Variation der einfachen Integrale. I., II., III. Mitteilung. Wien. Ber. **107**, 1191-1250, 1267-1326, 1383-1430.

Der Verf. verfolgt, um zu den Kriterien für die Permanenz des

Vorzeichens der zweiten Variation zu gelangen, den von Clebsch zuerst betretenen Weg ihrer Transformation, und es gelingt ihm auf diese Weise, einen klaren Einblick in die obwaltenden Verhältnisse zu eröffnen.

Um diesen Weg gehen zu können, ist es zunächst nötig, die Integration eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung zu erörtern und genügend allgemeine Bedingungen aufzufinden, unter denen diese Integrale nach den Integrationsconstanten oder Parametern differentiirbar sind. Die gewonnenen Resultate werden hiernach auf die Differentialgleichungen der ersten Variation angewandt, wobei sich die Notwendigkeit herausstellt, die zwei Fälle zu unterscheiden, dass jede Bedingungsgleichung auch Derivirte der gesuchten Functionen enthält oder nicht. Für den ersteren Fall wird dann die fundamentale Formel für die Untersuchung der zweiten Variation abgeleitet, woran dann die Behandlung des andern Falles geknüpft wird. Nachdem noch die conjugirten Systeme betrachtet sind, werden die Consequenzen aus den abgeleiteten Sätzen gezogen und die Kriterien für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation aufgestellt.

Die nachstehend skizzirten Resultate, zu denen der Verf. gelangt ist, geben nicht nur hinreichende, sondern auch die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Extremwertes des Integrals J und reichen deshalb in ihrer Bedeutung weiter, als die Resultate der vorstehend besprochenen Abhandlung. Der Kürze wegen sind im Folgenden die Grössen, welche die gleiche Bedeutung wie in dem vorhergehenden Referate haben, nicht von neuem definirt.

1. Die sämtlichen zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Zeichen haben, wenn die quadratische Form

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu}\zeta_\mu\zeta_\nu,$$

wo die ζ den r Bedingungsgleichungen $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial y'_\nu}\zeta_\nu = 0$ (für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$) genügen, an jeder Stelle des Integrationsintervalles definit von demselben Zeichen ist. 2. Bezeichnet $\frac{\partial y_\nu^0}{\partial c_k}$ den Wert von $\frac{\partial y_\nu}{\partial c_k}$ an der unteren Grenze $x = a$ des Integrales, und setzt man $\frac{\partial(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})}$ $= \varDelta(x, a)$, so sind, wenn man den Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bez. die Variationen $\varepsilon u_1, \varepsilon u_2, \ldots, \varepsilon u_n$ erteilt, wo die u von ε unabhängige, nebst ihren ersten Differentialquotienten im Integrationsintervalle eindeutige, stetige Functionen von x sind, die sämtlichen zugehörigen zweiten Variationen des Integrals dann und nur dann von Null verschieden und haben einerlei Vorzeichen, wenn $\varDelta(x, a)$ ausserhalb a nirgends im Integrationsintervalle Null wird. Verschwindet $\varDelta(x, a)$ auch innerhalb der Integrationsgrenzen, so bestehen verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals. Verschwindet $\varDelta(x, a)$ ausser an der unteren nur noch an der oberen Grenze, so sind nicht mehr sämtliche zweite Variationen von

Null verschieden. 3. Ist entweder (1) nicht erfüllt oder $\Delta(x, a) = 0$ im Innern des Integrationsintervalles, so hat das Integral keinen Extremwert. Hau.

W. DE TANNENBERG. **Sur une question relative au calcul des variations.** Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 105-109.

Es handelt sich um die Aufgabe, alle Bogen AB zu bestimmen, die durch $X = F(t)$, $Y = G(t)$, $Z = H(t)$ $[t_0 < t < t_1]$ dargestellt werden, so dass

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z'')dt = c$$

im Inneren eines hinreichend kleinen Bereiches ist. „Das benutzte Verfahren liefert ganz natürlich die dem Anscheine nach künstliche Lösung, die Jordan in seinem Cours d'analyse **3**, 482 angiebt.“ Lp.

E. TH. SABININ. **Zur Frage über die Unstetigkeitscurven in der Variationsrechnung.** Moskau. Math. Samml. **20**, 255-292. (Russisch.)

Kritische Bemerkungen über die Arbeit von Zimmermann: Unstetigkeitscurven in der Variationsrechnung (F. d. M. **27**, 294, 1896). Der Begriff der Variation sei daselbst nicht allgemein genug erklärt im Vergleich mit der Erklärung von Lagrange. Man vermisse die Kriterien der Unterscheidung von Maximum und Minimum. Si.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

J. Puzyna. Theorie der analytischen Functionen. I. Band. Lemberg 1898, 549 S. 8°. (Polnisch.)

Dieses ausführliche Lehrbuch der Theorie der analytischen Functionen wird aus zwei Bänden bestehen. Der Verf. beabsichtigt damit, den Studirenden ein Buch in die Hand zu geben, welches eine erschöpfende Darstellung der genannten Disciplin mit allen einführenden Lehren aus den verwandten Gebieten enthält; durch zweckmässig gewählte Uebungsaufgaben und ziemlich reiche Litteraturnachweise will er den Leser zu selbständiger Arbeit und weiteren Studien anspornen.

Der erste Band zerfällt in sechs Teile. Im ersten Teil finden wir eine Zusammenstellung der wichtigsten Begriffe und Sätze aus der Mengenlehre, der Reihentheorie und aus der Theorie der complexen Zahlen. Im zweiten Teil werden die wichtigsten Sätze aus der Algebra der rationalen ganzen und der rationalen gebrochenen Functionen, die Interpolationsformeln, die Sätze über die nach gegebenen Moduln genommenen Mittelwerte dieser Functionen vorgetragen. Der dritte Teil behandelt die symmetrischen Functionen, die Elemente der Substitutionen- und Gruppentheorie nebst Anwendungen auf die Theorie der Drehungen regulärer Körper und ihrer Functionen. Der vierte Teil ist der Theorie der Elimination aus zwei und mehreren algebraischen Gleichungen und der Invariantentheorie gewidmet. Der fünfte Teil behandelt die Theorie der Potenzreihen als Vorbereitung zur Theorie der analytischen Functionen. Im sechsten Teil finden wir die Sätze über die Fortsetzung der Potenzreihen, die Erklärung des Begriffes einer analytischen Function und die Einteilung analytischer Functionen. Dn.

J. Petersen. Vorlesungen über Functionstheorie. Kopenhagen: Höst & Sohn. VI + 328 S. gr. 8°.

Die Vorlesungen von Petersen über die Functionentheorie zeigen die Vorzüge der übrigen von diesem kenntnisreichen Mathematiker geschriebenen Lehrbücher: knappe Form, so dass bei kleinem Umfange ein grosser Inhalt gegeben wird; lichtvolle Darstellung trotz der Bündigkeit der Sprache, unterstützt durch Veranschaulichung der abstracten Betrachtungen an concreten Beispielen; übersichtliche Gliederung des Stoffes, äusserlich durch augenfällige Ueberschriften hervorgehoben. Wenn in der Vorrede gesagt wird, dass keine erschöpfende Behandlung der Functionentheorie auf ihrem gegenwärtigen Standpunkte gegeben wird, so wird das kein verständiger Mathematiker erwarten. Die vom Verf. ausgesprochene Absicht, einen Ueberblick über das Wesentlichste zu verschaffen und die notwendigste Grundlage für selbständige Arbeiten zu geben, ist sicher erreicht. Dabei ist das Werk nicht etwa eine blosse Compilation; man fühlt überall den denkenden Autor, der alle Teile zu einem Ganzen zusammengefügt hat und an vielen Stellen durch die ihm eigentümlichen Gedanken sich als selbständig schaffend ausweist.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die allgemeine Functionentheorie enthält, der zweite (S. 227-328) specielle Functionen betrachtet. Der Gang erhellt aus den Kapitelüberschriften: I. Conforme Abbildung. Monogene Functionen. II. Ein- und mehrwertige Functionen. Riemann'sche Flächen. III. Complexe Integrationswege. IV. Zusammenhang und Normalform der Flächen. V. Abel'sche Integrale. Abel'scher Satz. VI. Additionstheoreme. VII. Unendliche Reihen und Producte. VIII. Cauchy'sches Integral. Reihenentwickelungen. IX. Andere Anwendungen von Cauchy's Integral. X. Bestimmung der Functionen durch ihre Nullpunkte und singulären Punkte. XI. Die Riemann'schen Existenztheoreme.

Im zweiten Abschnitt findet man: I. Die Functionen $\Gamma(z)$ und $\zeta(z)$. II. Doppeltperiodische eindeutige Functionen. III. Jacobi's Thetafunctionen. IV. Die elliptischen Functionen. V. Transformation der elliptischen Integrale. VI. Die elliptischen Modulfunctionen.

Um die Herstellung des deutschen Textes hat sich, wie bei den früheren Werken Petersen's, v. Fischer-Benzon verdient gemacht; doch ist in Bezug auf den Ausdruck „Functionstheorie" zu bemerken, dass allgemein statt desselben „Functionentheorie" gebräuchlich ist.

Lp.

L. Bianchi. Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. Anno 1898-99. Pisa: Enrico Spoerri. 8°. Parte prima: Funzioni monodrome di variabile complessa. 326 S. Parte seconda: Funzioni ellittiche. 480 S. (autographirt.)

Die Vorlesungen von Bianchi über die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und über die Theorie der elliptischen

Functionen würde man im Vergleich zu andern Werken, die dieselben Gegenstände behandeln, wohl am besten dadurch charakterisiren können, dass man sie als eine Einleitung in die Theorie der automorphen Functionen bezeichnete, wenn das Wort Einleitung nicht das Missverständnis erregen könnte, als seien die Vorlesungen nur für Liebhaber der automorphen Functionen von Wert, während in Wahrheit die Betrachtung von einem solchen höheren Gesichtspunkte aus den alten Stoffen neuen Reiz verleiht und die Lectüre der beiden Bände für alle vorgerückteren Mathematiker anregend und genussreich macht.

In dem ersten Teil, der sich auf die eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen bezieht, werden der Reihe nach folgende Gegenstände behandelt: Kapitel I. Functionen einer complexen Veränderlichen nach Cauchy-Riemann. Potenzreihen und ihre Eigenschaften. Conforme Abbildungen. Kapitel II. Lineare Substitutionen. Discontinuirliche Gruppen linearer Substitutionen und ihre geometrische Darstellung. Kapitel III. Transformation von Doppelintegralen in einfache Integrale. Harmonische Functionen und ihre fundamentalen Eigenschaften. Das Problem von Dirichlet und seine Lösung für den Fall eines kreisförmigen Gebietes. Kapitel IV. Integrale von Functionen einer complexen Veränderlichen. Das Fundamentaltheorem von Cauchy. Folgerungen. Entwicklung einer Function in eine Taylor'sche Reihe. Laurent's Entwicklung. Begriff einer analytischen Function nach Weierstrass. Reihen, deren Glieder analytische Functionen sind. Kapitel V. Singuläre Punkte eindeutiger Functionen. Pole und wesentlich singuläre Punkte. Residuen. Der logarithmische Indicator. Umkehrung von Potenzreihen. Kapitel VI. Functionen, die in der ganzen complexen Ebene eindeutig sind. Ihre Entwicklung in Partialbrüche. Theorem von Mittag-Leffler. Entwicklung der ganzen transcendenten Functionen in unendliche Producte. Kapitel VII. Analytische Functionen von mehreren complexen Veränderlichen. Implicite Functionen. Die fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Functionen.

Da es hierbei sich im wesentlichen um bekannte Dinge handelt, möchte der Referent nur zwei Bemerkungen machen. Die erste betrifft die Grundsätze, nach denen Bianchi die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen aufgebaut hat. Bekanntlich stehen sich hier zwei verschiedene Methoden gegenüber, die von Cauchy-Riemann und die von Weierstrass. Wie man sie auch werten mag, die eine Thatsache lässt sich nicht bestreiten, dass ein jeder, der in die modernen Untersuchungen auf dem Gebiete der Functionentheorie eindringen will, mit beiden Methoden vertraut sein muss. Es ist daher durchaus zu billigen, dass Bianchi die Grundzüge beider Methoden darlegt. Allein dem Referenten will es scheinen, als ob dabei Weierstrass nicht zu seinem vollen Recht gekommen sei; denn die Sätze über die Fortsetzung einer analytischen Function erscheinen in den Vorlesungen als Folgerungen aus dem Cauchy'schen Integralsatz, dessen strenge Begründung übrigens gewisse Schwierigkeiten bietet, die Bianchi wenigstens hätte andeuten sollen. Gewiss ergeben sich diese Sätze daraus mit grosser

Leichtigkeit und Eleganz; allein der methodische Vorzug der Weierstrass'schen Theorie, der elementare Charakter aller Beweise, geht dabei vollständig verloren. Die Weierstrass'schen Sätze als Corollare des Cauchy'schen Integralsatzes herzuleiten, das heisst wahrlich mit Kanonen nach Spatzen schiessen. Der Einwand, dass eine selbständige Begründung der Weierstrass'schen Theorie zu viel Raum erfordert haben würde, hätte früher vielleicht eine gewisse Berechtigung gehabt; allein nach den Vereinfachungen, die diese Theorie in jüngster Zeit durch die ausgezeichneten Arbeiten von Pringsheim erfahren hat, kann man ihn nicht mehr gelten lassen.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Theorie der analytischen Functionen von mehreren Veränderlichen. Bianchi begeht dabei (S. 284 bis 285) einen Fehler, der sich auch in andern Darstellungen dieser Theorie findet und deshalb um so mehr zur Sprache gebracht zu werden verdient.

Wenn eine Potenzreihe einer einzigen Veränderlichen:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

für einen von Null verschiedenen Wert x_0 der Veränderlichen x convergirt, so ist notwendig (für $m = \infty$) $\lim a_m x_0^m = 0$, und es giebt daher eine endliche positive Grösse g von der Beschaffenheit, dass für alle Werte von m $|a_m x_0^m| \leqq g$ ist. Hieraus folgt dann, dass $\mathfrak{P}(x)$ für alle Werte von x, die den Ungleichheiten $|x| \leqq \xi < |x_0|$ genügen, unbedingt und gleichmässig convergirt.

Diesen Satz hat man ohne weiteres auf Potenzreihen von zwei Veränderlichen übertragen, indem man folgendermassen schloss: Convergirt die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}\, x^m y^n$$

für die von Null verschiedenen Werte x_0 und y_0 der Veränderlichen x und y, so ist notwendig (für $m,n = \infty$) $\lim a_{mn} x_0^m y_0^n = 0$, und es giebt daher eine endliche positive Grösse g von der Beschaffenheit, dass für alle Wertsysteme m,n $|a_{mn}\, x_0^m y_0^n| \leqq g$ ausfällt, woraus wiederum folgt, dass $\mathfrak{P}(x,y)$ für alle Wertsysteme x,y, die den Ungleichheiten

$$|x| \leqq \xi < |x_0|, \qquad |y| \leqq \eta < |y_0|$$

genügen, unbedingt und gleichmässig convergirt.

Es ist jedoch nicht erlaubt, in dieser Weise vorzugehen; denn wenn man von einer unendlichen Doppelsumme

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}$$

nur weiss, dass sie convergirt, so folgt daraus zwar, dass wenn m und n **gleichzeitig** unendlich werden, $\lim u_{mn} = 0$ sein muss, aber durchaus nicht, dass alle Glieder u_{mn} unter einer bestimmten endlichen Grenze liegen. Setzt man z. B. fest, dass $u_{00} = 0$, $u_{m0} = m$, $u_{0n} = -n$ und, für $\alpha, \beta > 0$, $u_{\alpha\beta} = 0$ ist, und dass die Doppelsumme in der

Form $u_{00}+(u_{10}+u_{01})+(u_{20}+u_{02})+\cdots+\Sigma u_{\alpha\beta}(\alpha,\beta>0)$ geschrieben wird, so findet **bedingte** Convergenz der Doppelsumme statt, während (für $m=\infty$) $\lim u_{m0}=\infty$ ist. Damit jene Schlussweise angewandt werden darf, muss man vielmehr voraussetzen, dass $\mathfrak{P}(x_0, y_0)$ unbedingt convergirt, eine Voraussetzung, die bei einer Potenzreihe einer einzigen Veränderlichen nicht erforderlich war. Es findet also in dieser Beziehung ein fundamentaler Unterschied zwischen Potenzreihen von einer und von mehr als einer Veränderlichen statt, und es wäre zu wünschen, dass die bedingt convergenten Potenzreihen von zwei Veränderlichen, die ja in Weierstrass' Lehre von der Fortsetzung analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen eine wichtige Rolle spielen, einmal genauer untersucht würden.

Ausserordentlich reichhaltig ist der zweite Teil der Vorlesungen, in dem die elliptischen Functionen mit Einschluss der Elemente der elliptischen Modulfunctionen behandelt werden; wobei auch ihre Beziehungen zur Zahlentheorie und Algebra eingehende Berücksichtigung finden. Es ist hier nur möglich, den Inhalt der einzelnen Kapitel kurz anzugeben. Kapitel VIII. Die fundamentalen Functionen σu und $\wp u$ von Weierstrass. Ausdruck der allgemeinen elliptischen Function mittelst der Function σu. Differentialgleichung für die elliptische Function $\wp u$: $\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$. Kapitel IX. Zerlegung einer elliptischen Function in einfache Elemente. Additionstheorem für ζu und $\wp u$. Die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$. Multiplication und Division des Argumentes in $\wp u$. Kapitel X. Die fundamentalen Eigenschaften der elliptischen Modulfunction $J(\tau)$ (absolute Invariante). Die Function $\wp(u; g_2, g_3)$ mit gegebenen Invarianten. Die elliptischen Integrale erster Gattung und ihre Umkehrung. Die allgemeinen elliptischen Integrale. Kapitel XI. Die drei geraden σ-Functionen und die elliptischen Functionen von Jacobi $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$. Die Modulfunction $k^2(\tau)$. Additionstheoreme für die Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$. Kapitel XII. Die Functionen $\wp u$, σu, $\sigma_\alpha u$ für reelle Werte der Invarianten und die Jacobi'schen Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ für reelle Werte des Moduls k zwischen 0 und 1. Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung. Kapitel XIII. Entwicklungen der elliptischen Functionen in unendliche Producte und in trigonometrische Reihen. Die ϑ-Reihen. Kapitel XIV. Theorie der Transformation der elliptischen Functionen. Transformationen vom Primzahlgrad von $\wp u$ und σu. Die Transformation von Landen und das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauss. Kapitel XV. Die elliptischen Modulfunctionen. Kapitel XVI. Die Modulargleichungen für die absolute Invariante $J(\tau)$ und für die Modulfunction $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$. Hermite's Methode für die Auflösung der Gleichung fünften Grades. Kapitel XVII. Elliptische Functionen mit complexer Multiplication. Klasseninvarianten. Kapitel XVIII. Die Composition der quadratischen Formen und die Galois'sche Gruppe der Gleichung für die Klasseninvarianten. Genera der quadratischen Formen nach Gauss; die Theoreme von Kronecker. St.

J. Thomae. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. 2. Aufl. Halle a. S.: L. Nebert. VIII + 150 S. gr. 4°.

Als die „Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen" von Thomae im Jahre 1880 erschien, existirte, wie in dem Berichte F. d. M. **12**, 306, 1880, mit Recht bemerkt wurde, noch keine zusammenhängende Darstellung der Sätze von Weierstrass, und es wurde daher „mit Dank begrüsst, dass Thomae auf eigene Hand eine derartige Ausarbeitung der elementaren Functionentheorie unternommen hatte". Seitdem sind zwar mehrere Werke erschienen, die eine ähnliche Tendenz verfolgen, und es ist auch 1887 eine Bearbeitung der Weierstrass'schen Vorlesungen über Functionentheorie von Biermann unternommen worden; allein was Strenge der Begründung und Klarheit der Darstellung betrifft, so ist das Werk von Thomae, das sich allerdings auf die Elemente der Theorie beschränkt, an der Spitze geblieben und wird auch in seiner erneuerten Gestalt die freundliche Aufnahme finden, die der ersten Auflage zu Teil geworden ist.

Der Plan des Werkes ist derselbe geblieben, nur wurde das Kapitel über doppeltperiodische Functionen weggelassen; dafür stellt der Verf. in Aussicht, diesen Gegenstand sowie die hypergeometrischen Reihen in einem besonderen Bande zu behandeln. Die wichtigste Aenderung und Verbesserung besteht darin, dass jetzt die Theorie der ganzen rationalen Functionen in einem Zuge vor der Theorie der transcendenten Functionen erledigt wird, während in der ersten Auflage dieses Kapitel in zwei Teile gespalten war, weil zur Erledigung einiger Hauptfragen die Darstellung der Einheitswurzeln durch trigonometrische Functionen benutzt wurde.

Ausserdem ist das Buch im einzelnen vielfach erweitert und umgearbeitet worden, teils auf Grund eigener Untersuchungen des Verf., teils indem die neuere Litteratur berücksichtigt wurde. Gerade weil der Referent das vorliegende Buch hochschätzt, möchte er hierzu einige Bemerkungen machen, die vielleicht bei einer dritten Auflage Beachtung finden. Aus der neueren Zeit sind neben den ausgezeichneten Arbeiten von Pringsheim, dem wir wesentliche Vereinfachungen der Weierstrass'schen Theorie verdanken, von denen auch Thomae in seinem Buche Gebrauch macht, in erster Linie die Untersuchungen von Hadamard zu nennen, die sich auf die Convergenz der Potenzreihen und die Bestimmung der singulären Punkte aus der Natur der Coefficienten beziehen, und diese hat Thomae leider ganz übergangen. Ebenso vermisst man eine Erwähnung der wichtigen Untersuchungen über höhere complexe Zahlen, die seit 1884 erschienen sind, und die gezeigt haben, dass die Einführung solcher Zahlen, allerdings in beschränkten Anwendungsgebieten, sehr wohl von Nutzen sein kann.

In der ersten Auflage hatte der Verf., wie das bei Lehrbüchern durchaus angebracht und üblich ist, von Citaten fast ganz abgesehen. Anders verfährt er in der zweiten Auflage, indem er die neu hinzu ge-

kommene Litteratur ausdrücklich anführt. Diese Ungleichmässigkeit des Verfahrens hat eigentümliche Consequenzen gehabt. Während z. B. der Leser von Weierstrass nur erfährt, dass wir ihm (Vorrede zur ersten Auflage) die Abhandlung „Zur Theorie der analytischen Facultäten" (1854) und (S. 125) die Abhandlung „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" (1876) verdanken, werden auf SS. 26, 28, 73, 74 und 115 Arbeiten von Pringsheim citirt, so dass ein Student (und für Studenten ist doch das Buch bestimmt) leicht zu einer falschen Auffassung der Bedeutung von Weierstrass kommen wird. Noch stärker wird die historische Gerechtigkeit auf S. 1 verletzt. In der Einleitung des Abschnittes „Zahlentheorie" (gemeint ist die Lehre von den reellen und complexen Grössen) wird als Litteratur über den Begriff der Zahl angeführt: „Frege, Die Grundlagen der Arithmetik", Breslau 1884, und „Dedekind, Was sind und was wollen (richtig ist: sollen) die Zahlen?" Braunschweig 1887 (richtig ist: 1888). Der unkundige Leser würde hieraus entnehmen, dass Frege zuerst die Frage der Irrationalzahlen behandelt hat, und es muss daher als eine bedauerliche Unterlassung bezeichnet werden, dass an dieser Stelle Dedekind's Schrift: „Stetigkeit und irrationale Zahlen", Braunschweig 1872, keine Erwähnung gefunden hat. St.

J. Harkness and F. Morley. Introduction to the theory of analytic functions. London: Macmillan & Co. XV + 336 S.

In der Vorrede wird erklärt, dass diese „Einleitung" nicht etwa als eine verkürzte und elementarere Bearbeitung des „Lehrbuchs" derselben Verfasser zu betrachten ist (F. d. M. **25**, 653, 1893). Das Buch ist vielmehr dazu bestimmt, eine folgerichtige und elementare Darlegung der grundlegenden Begriffe und Processe zu geben, die in der Functionentheorie gebraucht werden, und es stellt solche Partien des Gegenstandes, die beiden Werken gemeinschaftlich sind, von einem unabhängigen Gesichtspunkte aus dar. Die Anordnung in dem gegenwärtigen Buche ist in gewissem Grade aus den Titeln der Kapitel zu ersehen. I. Das System der Ordinalzahlen. II. Die geometrische Darstellung der complexen Zahlen. III. Die bilineare Transformation. IV. Die geometrische Theorie des Logarithmus und der Exponentialfunction. V. Die bilineare Transformation einer Ebene in sich selbst. VI. Grenzen und Stetigkeit. VII. Die rationale algebraische Function. VIII. Die Convergenz unendlicher Reihen. IX. Die gleichmässige Convergenz reeller Reihen. X. Potenzreihen. XI, XII. Operationen mit Potenzreihen, Fortsetzung. XIII. Analytische Theorie der Exponentialfunction und des Logarithmus. XIV. Singuläre Punkte analytischer Functionen. XV. Das Weierstrass'sche Factortheorem. XVI. Integration. XVII. Laurent's Theorem und die Thetafunctionen. XVIII. Functionen, die aus einem Netz entspringen. XIX. Elliptische Functionen. XX. Einfache algebraische Functionen auf Riemann'schen Flächen. XXI. Algebraische Functionen. XXII. Das Cauchy'sche Theorem und das Potential.

Es ist fast überflüssig, besonders auszusprechen, dass die Ausführung eine vollständige Beherrschung des behandelten Gegenstandes zeigt, und dass dies ebensowohl durch dasjenige bekundet wird, was ausgeschlossen ist, wie durch dasjenige, was einbezogen ist. Die Behandlung ist ungemein frisch, und für den Anfänger ist der Weg durch beständige Veranschaulichung allgemeiner Sätze an wohl gewählten Beispielen geebnet. In gewisser Hinsicht dürften nach der Meinung des Ref. die besten Ergebnisse durch den gleichzeitigen Gebrauch der Einleitung neben dem grösseren Lehrbuche erzielt werden. So könnte das erste Kapitel der Einleitung durch das zweite Kapitel des Lehrbuches nutzbringend ergänzt werden; denn die Gesetze der Operationen mit rationalen Zahlen scheinen kaum hinreichend erörtert zu sein, obwohl die Darstellung in der gewählten Beschränkung ganz angemessen und durchsichtig ist. Einige der geometrischen Erörterungen in den Anfangskapiteln sind von besonderer Schönheit, und der Vortrag ist durchweg nicht nur gründlich, sondern auch anregend. Eine eingehende Besprechung kann in American M. S. Bull. (2) **6**, 63-74 nachgelesen werden. Gbs. (Lp.)

É. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars et Fils. IX + 136 S. gr. 8°.

Das Buch enthält die vom Verf. im Frühjahre 1897 an der École Normale gehaltenen Vorträge mit einigen bei der Abfassung für den Druck getroffenen Aenderungen und ist dem Subdirector dieser Schule, Jules Tannery, gewidmet, der in Darboux Bull. (2) **22**, 242-250 eine recht eingehende Besprechung der Schrift voll warmer Anerkennung geliefert hat. Der Hauptzweck der Vorträge besteht in einer Darstellung der Mengenlehre, so weit dieselbe in der Functionentheorie nützlich ist. Von den sechs Kapiteln des Buches sind die drei ersten der Entwickelung der Grundbegriffe dieser Lehre gewidmet: I. Allgemeine Begriffe über die Mengen. Mächtigkeit, abzählbare Mengen, Vergleichung der abzählbaren Mengen mit den anderen; Mengen mit der Mächtigkeit des Stetigen. II. Die algebraischen Zahlen und die Approximation der incommensurablen Zahlen. III. Die perfecten und die messbaren Mengen. In den drei folgenden Kapiteln werden die Anwendungen der Mengenlehre in der Functionentheorie besprochen. Kapitel IV handelt von der analytischen Fortsetzung, Kapitel V von der Convergenz gewisser reeller Reihen, und Kapitel VI erörtert den Begriff der Function einer complexen Veränderlichen. Wir führen aus dem Schlussworte dieses Kapitels die Stelle an, mit der es endigt: „Wir würden befriedigt sein, wenn wir unsere Leser überzeugt hätten, dass weder die grundlegenden Arbeiten von Weierstrass, noch die weiteren Arbeiten von Mittag-Leffler, Appell, Poincaré, Runge, Painlevé die Frage nach den Beziehungen zwischen dem Begriffe einer analytischen Function und des analytischen Ausdrucks völlig beantworten. Man kann sogar ohne Uebertreibung sagen, dass die Erforschung und die Klassification

der analytischen Ausdrücke, die nicht fähig sind, die Null darzustellen, ohne identisch Null zu sein, fast ganz noch zu bewerkstelligen ist."

An diesen Hauptinhalt schliessen sich drei umfangreiche Noten (S. 102-134). Die erste erörtert den Begriff der Mächtigkeiten: die Gleichheit und Ungleichheit der Mächtigkeiten, die Bildung von Mengen mit immer grösseren Mächtigkeiten, die Mächtigkeit der Functionenmengen. Die zweite Note beschäftigt sich mit dem Wachstum der Functionen und den Zahlen zweiter Klasse. Das Theorem von P. du Bois-Reymond, die Bildung einer Scala wachsender Typen und die Zahlen von G. Cantor werden der Reihe nach betrachtet. Die dritte Note erörtert den Begriff der Function im allgemeinen. Die unstetigen Functionen, die durch abzählbare Bedingungen definirten Functionen und der Begriff einer willkürlichen Function werden verglichen und in ihren Unterschieden gekennzeichnet. Lp.

A. Breuer. Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen einer complexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie. Ein Handbuch für Lehrer und Freunde der Mathematik. Wien: C. Daberkow's Verlag. VIII + 205 S. 8°.

In der geometrischen Deutung complexer Zahlen herrscht bekanntlich eine grosse Mannigfaltigkeit. Der Verf. obiger Schrift erblickt in diesem Umstande ein Anzeichen dafür, dass es an einer allseitig befriedigenden, einheitlichen Deutung noch fehle, und unternimmt es, eine solche aufzustellen und für zahlreiche Anwendungen des Imaginären auf die einfacheren Gebiete der Geometrie durchzuführen. Zu diesem Zwecke geht er von der gewöhnlichen Darstellung rationaler Zahlen durch Strecken und deren Endpunkte auf einer Geraden aus, gelangt mittels eines Schnittkreises dieser Geraden unter Anwendung des Pythagoras zur Darstellung der Irrationalzahlen auf derselben Geraden und dehnt dieses Verfahren dadurch, dass die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden imaginär werden, auf complexe Zahlen aus. Hierbei werden auch die complexen Strecken durch Strecken auf der ursprünglichen Geraden und schliesslich die complexen Zahlen durch die Endpunkte dieser Strecken veranschaulicht. Die hierin liegende Auffassung, dass bei imaginären Schnittpunkten der Charakter des Imaginären nicht an den Punkten selbst, sondern nur an der Thatsache des Schneidens haftet, deckt sich nach Ursprung und Inhalt mit der vom Ref. schon in seinem „System der Raumlehre" II, S. 110 und 111, gegebenen Darstellung imaginärer Punkte, die u. a. ihren Ausdruck in dem Satze fand: „Wird ein System von Kreisen, die sich in zwei Punkten schneiden, von einem anderen Kreissysteme orthogonal geschnitten, so hat das zweite System dieselben Schnittpunkte wie das erste; aber diese Schnittpunkte sind für das eine System reell, für das andere imaginär." Nur sind die Kreisdurchmesser, deren Endpunkte vom Verf. und vom Ref. zur Darstellung conjugirter complexer Zahlen gewählt werden, nicht dieselben, sondern stehen auf einander senkrecht. — Nach einer kurzen vergleichenden Kritik der

Gauss'schen Darstellung des Imaginären kehrt sich der Verf. den einzelnen analytischen und geometrischen Anwendungsgebieten desselben zu und wendet seine Darstellung in consequentem Aufbau und grosser Ausführlichkeit auf die trigonometrischen Functionen und ihre Inversen, auf kubische und biquadratische Gleichungen, auf die Geometrie der Kreise und Kegelschnitte und die Theorie der Involutionen an. Hierbei laufen allerdings allerlei, zum Teil aus vergriffenen Arbeiten des Verf. wiederholte Abschnitte und Ausführungen mit unter, die zwar an sich von Interesse, aber für den eigentlichen Zweck der Arbeit entbehrlich sind. Nützlicher und für die Vorzüge der vorgetragenen Theorie überzeugender würde es sein, wenn es der Verf. unternähme, zu zeigen, wie die wichtigeren sonstigen Deutungen des Imaginären mit der seinigen zusammenhängen, bezw. durch dieselbe überholt(?) sind. Es ist aber anzuerkennen, dass das hier Gebotene auch ohne Vergleich als eine wohlgeeignete Grundlage zu einer einheitlichen geometrischen Deutung der imaginären Zahlen angesehen werden kann. Schg.

A. Hurwitz. Ueber die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit. Verh. des intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 91-112.

Die Theorie der analytischen Functionen wird in dem vorliegenden Berichte wesentlich unter dem Gesichtspunkte betrachtet, dass sie zu den allgemeinen Grundlagen aller Grössenforschung zurückgeleitet und die Fundamente befestigt und vervollkommnet hat, auf denen die gesamte Analysis aufgebaut ist. Das zeigt sich zunächst in der Weierstrass'schen Theorie; denn die singulären Stellen definiren eine Punktmenge, deren Beschaffenheit das wichtigste Einteilungsprincip für die eindeutigen Functionen abgiebt, und daher bilden die Voraussetzung aller tiefer gehenden Untersuchungen G. Cantor's Arbeiten zur Mengenlehre, deren Ergebnisse Hurwitz in musterhaft klarer Weise darstellt. Während man gegen Weierstrass' Definition der analytischen Functionen den Einwand erheben kann, dass sie eine specielle Darstellungsweise, nämlich die durch Potenzreihen, bevorzugt, leidet Cauchy's Definition an dem Uebelstand, dass von vorn herein die Heranziehung des Grenzbegriffs in seinen schwierigsten Formen notwendig wird; so erfordert z. B. die einwurfsfreie Begründung des Cauchy'schen Integralsatzes, dass die Frage beantwortet wird, was rein analytisch unter der Integration über eine einfache geschlossene stetige Curve zu verstehen ist.

Es folgen einige Bemerkungen über die noch wenig ausgebildete Theorie der analytischen Functionen mehrerer Variabeln und über neuerdings versuchte Verallgemeinerungen des Begriffs der analytischen Function. Den Schluss bildet ein sehr dankenswertes ausführliches Litteraturverzeichnis. St.

W. F. Osgood. Selected topics in the general theory of functions. American M. S. Bull. (2) **5**, 59-87.

In sechs Vorlesungen behandelt der Verf. hier die folgenden Gegenstände:

1. Der Satz von Picard über die Zahl der Werte, welche eine eindeutige Function in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle nicht annehmen kann.
2. Der Satz von Poincaré, nach welchem jede beliebige analytische Function $y = f(x)$ als Resultat der Elimination von z zwischen $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ erhalten werden kann, wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ eindeutige analytische Functionen von z bedeuten.
3. Die Sätze von Hadamard über die Bestimmung der Pole einer meromorphen und des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function, wenn nur die Potenzentwickelung der Function an der Stelle $z = 0$ als bekannt vorausgesetzt wird.
4. Ueber die Anwendung der G. Cantor'schen Mengenlehre auf die Verschärfung des Cauchy'schen Begriffes einer monogenen Function.

Hz.

W. P. Nekrassow. Zur Theorie der Functionen einer reellen Veränderlichen. Tagebuch X. Vers. Russ. Naturf. in Kiew, 427-430. (Russisch.)

Ausführlicher Beweis einer Aeusserung in Dini-Lüroth's Grundlagen für eine Theorie der Functionen etc. S. 260. Si.

E. Study. Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 147-183.

Imaginäre Grössen im 17. und 18. Jahrhundert. Rechnen mit Grössenpaaren. Gemeine complexe Grössen. Absoluter Betrag, Amplitude, Logarithmus. Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene. Darstellung gewisser Transformationsgruppen mit Hülfe gewöhnlicher complexer Grössen. Allgemeiner Begriff eines Systems complexer Grössen. Typen, Gestalten, Reducibilität. Systeme mit zwei, drei und vier Einheiten. Specielle Systeme mit n^2 Einheiten. Bilineare Formen. Specielle Systeme mit commutativer Multiplication. Complexe Grössen und Transformationsgruppen. Klassification der Systeme complexer Grössen. Ansätze zu einer Functionentheorie und Zahlentheorie der Systeme höherer complexer Grössen. St.

E. Study. Beweis eines von Herrn Dedekind angegebenen Satzes. Gött. Nachr. 1898, 1-8.

Nach Weierstrass (F. d. M. **16**, 330, 1884) kann in einem Systeme complexer Grössen mit commutativer Multiplication eine Gleichung $c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \cdots + c_\nu = 0$ dann unendlich viele Wurzeln haben, wenn die c_i aus einem und demselben „Teiler der Null“ durch Multiplication mit anderen Grössen des Systems hervorgehen. Weierstrass fragt daher nach

allen Systemen complexer Grössen mit commutativer Multiplication, bei denen nur solche Gleichungen unendlich viele Wurzeln zulassen können, deren Coefficienten alle den nämlichen Teiler der Null als Factor enthalten. Aber erst Dedekind (F. d. M. **17**, 365, 1885) hat die allgemeine Antwort gegeben: „Nur die Systeme, deren Multiplicationsregeln sich (durch Einführung geeigneter Einheiten) auf die Form $e_i^2 = e_i$, $e_i e_k = 0$ bringen lassen, genügen der gestellten Forderung.“ Der Verf. erbringt für diesen Satz zwei von einander verschiedene, ganz einfache Beweise.

Der erste Beweis benutzt nur solche Thatsachen, die schon mit dem Begriff eines Systemes complexer Grössen mit associativer und commutativer Multiplication unmittelbar gegeben sind. Der zweite Beweis, der nur skizzirt wird, beruht auf dem Begriffe und Kriterium der Reducibilität eines Systems complexer Grössen mit Haupteinheit.

My.

E. Bortolotti. Sul teorema di moltiplicazione delle operazioni funzionali distributive a determinazione unica. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 16-21.

Bezeichnet A eine functionale Operation von der Beschaffenheit, dass für alle analytischen Functionen $\varphi(x)$ auch $A(\varphi(x))$ eine analytische Function ist und mit φ einen gemeinsamen Convergenzbereich hat, so hat man eine Multiplicationsregel in der Formel

$$A(\varphi\psi) = \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=0}^{r} \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{n} a_{r.s}^{n.m} \varphi^{r-s} \psi^{n-m} \overline{A(\varphi)^s} \, \overline{A(\psi)^m}.$$

Die Coefficienten $a_{r.s}^{n.m}$ können als numerische Constanten oder als analytische Functionen von x vorausgesetzt werden, die mit φ, ψ, $A(\varphi)$, $A(\psi)$ einen gemeinsamen Convergenzbereich besitzen. Von obiger Formel ausgehend, untersucht der Verf. das Multiplicationstheorem für den Fall distributiver Functionaloperationen.

Gz.

E. Bortolotti. Le operazioni equivalenti alle loro aggiunte. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 74-82.

Der Verf. führt im wesentlichen die Untersuchungen von Pincherle (Sulla operazione aggiunta, Rendiconti Acc. di Bologna, Seduta del 17 aprile 1898) über adjungirte Operationen weiter, indem er näher die Eigenschaften der Operationen studirt, die ihren adjungirten äquivalent sind; er kommt dabei auf eine Unterscheidung derartiger Operationen in zwei Typen, nämlich je nachdem die Operation ihrer adjungirten direct gleich: $A(\varphi) = \bar{A}(\varphi)$ oder entgegengesetzt gleich: $A(\varphi) = -\bar{A}(\varphi)$ ist. U. s. f.

Gz.

F. Paolino. Alcune proprietà delle operazioni funzionali distributive. Nota. Acc. Peloritana **13**, 189-217.

Diese Notiz lehnt sich an die Untersuchungen Pincherle's über die distributiven Functionaloperationen an und entwickelt einige neue

Eigenschaften der letzteren. Im Teil I wird der Quotient zweier Operationen behandelt. Im Teil II betrachtet der Verf. die Transformirte einer Operation vermittelst einer Operation; diese wird so definirt: Besteht zwischen drei distributiven Operationen mit eindeutiger Bestimmung die Relation $A_3 = A_2^{-1} A_1 A_2$, so wird A_1 als „trasformanda", A_2 als „trasformante" und A_3 als „trasformata" bezeichnet. Aus dieser Definition ergeben sich mehrere Sätze, auf die hier der Weitläufigkeit wegen nicht eingegangen werden kann. Im III. Teile wird die adjungirte Operation einer gegebenen nach Pincherle eingeführt, während die Teile IV und V specielle Operationen studiren; und zwar werden in IV die involutorischen und normalen Operationen, in V die cyklischen Operationen n^{ter} Ordnung untersucht. Gz.

F. Paolino. Sui gruppi e sugli insiemi di operazioni funzionali distributive ad unica determinazione. Memoria. Acc. Peloritana **13,** 495-535.

Aus einer Operationengruppe (A), die aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von distributiven Operationen A besteht, wird mittels einer erzeugenden Operation X eine neue Gruppe (B) hergeleitet, indem zu jeder einzelnen Operation A die „trasformata" (vgl. vorstehendes Referat) gebildet wird. Es werden nun unter speciellen Voraussetzungen Eigenschaften der Gruppen von Operationen untersucht; insbesondere wird auch der Fall betrachtet, dass die transformirte Gruppe mit der ursprünglichen identisch ist. Ist dies der Fall, so heisst die Operation X (bezw. eine Gruppe (X) derartiger Operationen) intransitiv in Bezug auf die Gruppe (A), und zwar absolut intransitiv, wenn jede Operation A in sich selbst übergeführt wird, schlechthin transitiv, wenn jede Operation A in eine andere der Gruppe (A) übergeht. Die Untersuchung derartiger Beziehungen enthält der erste Teil der Arbeit. Im zweiten werden Gruppen betrachtet, welche einen Parameter enthalten. Der dritte Teil behandelt Gruppen mit r Parametern, und im letzten Teile beschäftigt sich der Verf. mit Operationen, die nicht eine Gruppe, sondern eine Mannigfaltigkeit (insieme) bilden, d. h. mit Operationen A von der Beschaffenheit, dass das Product zweier Operationen keine Operation A liefert. Gz.

A. Viterbi. Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito considerata come elemento d'un calcolo. Annali di Mat. (2) **26,** 261-342.

Die umfangreiche Arbeit stellt eine Ausführung und Erweiterung früherer kurzer Mitteilungen dar, über welche bereits unter Hervorhebung des Ausgangspunktes von anderer Seite berichtet worden ist (F. d. M. **28,** 244, 1897). Gz.

P. Fulco. Sulle operazioni rappresentate da polinomi. Messina: Salvaggio e Capone. 11 S. 8°.

Untersuchungen über diejenigen distributiven Functionaloperationen, welche ganze rationale Functionen einer und derselben solchen Operation sind. Man vergleiche darüber Pincherle, Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif, Math. Ann. **49**, 325-382; F. d. M. **28**, 347, 1897.
Vi.

C. Bourlet. Sur le problème de l'itération. Toulouse Ann. **12**, C 1-12.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe: Wenn $\varphi(z)$ eine gegebene Function der Variable z und $\varphi_k(z)$ die k-mal iterirte Function bedeutet, so dass für positive und negative Werte der Indices p und q die Gleichung $\varphi_p[\varphi_q(z)] = \varphi_{p+q}(z)$ stattfindet, eine Function $\psi(k,z)$ der Variable z und des Parameters k zu finden, so dass man für ganzzahliges p die Gleichung (A) $\psi(p,z) = \varphi_p(z)$ hat, und dass die Relation (B) $\psi[k,\psi(k',z)] = \psi(k+k',z)$ für beliebige Zahlen k und k' erfüllt ist. Zu diesem Zwecke bildet er die Reihe

$$\psi(k,z) = z + \frac{k}{1}(\varphi(z)-z) + \frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}[\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + z] + \cdots$$
$$+ \binom{k}{p}\left[\varphi_p(z) - \binom{p}{1}\varphi_{p-1}(z) + \binom{p}{2}\varphi_{p-2}(z) - \cdots \pm z\right] + \cdots,$$

wo

$$\binom{k}{p} = \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{1.2\ldots p},$$

deren Identität mit $\varphi_k(z)$ für ganzzahlige k bereits von Schröder (Math. Ann. **3**, 296; F. d. M. **2**, 200, 1870) bemerkt worden ist. Es wird gezeigt, dass diese Reihe für beliebiges k in der Umgebung einer Grenzstelle x der Function $\varphi(z)$ (für welche $\varphi(x) = x$ ist) convergirt, sobald $|\varphi'(x) - 1| < 1$ ist, und somit eine in z reguläre Function $\psi(k,z)$ definirt, und dass diese Function den Bedingungen (A) und (B) genügt, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. Lsg.

C. Bourlet. Sur l'itération. C. R. **126**, 583-585.

Mitteilung über die Untersuchungen des Verf. über Iterationen, über welche man das vorangehende Referat vergleiche. Lsg.

L. Leau. Sur un problème d'itération. S. M. F. Bull. **26**, 5-9.

Der Verf. untersucht eindeutige analytische Functionen $f(x)$, welche nach n-facher Iteration zur Variable x zurückführen, so dass $f_n(x) = x$ ist. Wenn eine solche Function in der ganzen Ebene eindeutig definirt ist, so kann sie nur eine lineare ganze oder gebrochene Function von x von wohlbekannter Form sein. Ist die Function nur in einem Gebiete A der Ebene vom Charakter der ganzen Functionen, so wird der Satz be-

wiesen, dass die Gleichung

$$f_d(x) - x = 0,$$

wo d einen Teiler von n bedeutet, eine einfache Wurzel hat. Lsg.

D. Gravé. Sur les expressions dites „surpuissances“. Nouv. Ann. (3) **17,** 80-91.

E. M. Lémeray. Sur un mémoire d'Euler. — Correspondance. Nouv. Ann. (3) **17,** 139.

In der Abhandlung: „De formulis exponentialibus replicatis“ (Acta Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, 1777. Pars prior, p. 38) giebt Euler die Grenzfunction $\Omega(x)$ an, gegen welche die Function $\omega_n(x)$ convergirt, wenn die positive ganze Zahl n unendlich gross wird und

$$\omega_n(x) = a^{\omega_{n-1}(x)}, \qquad \omega_1(x) = a^x$$

ist, ohne aber den Beweis für sein Resultat mitzuteilen. Gravé liefert für die Euler'schen Resultate die Beweise unter der Voraussetzung, dass x nur reelle Werte annehmen kann.

Durch die Gravé'sche Arbeit hat Lémeray erst Kenntnis von der Existenz der oben genannten Euler'schen Abhandlung erhalten, wie er in der vorliegenden Note constatirt; hauptsächlich soll dieselbe aber daran erinnern, dass er in zwei früheren Arbeiten $\Omega(x)$ für reelle und imaginäre Werte der Veränderlichen x bestimmt hat. Hau.

E. M. Lémeray. Le quatrième algorithme naturel. Edinb. M. S. Proc. **16,** 13-35.

Der Gegenstand dieser Schrift ist in dem Referate F. d. M **27,** 311, 1896 berührt worden, ebenso **28,** 345, 1897. Setzt man nun

$y = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^{y_0}}}}}}$ wo a x-mal wiederholt ist, so kann y durch die Bezeichnung $y = \overset{x}{\dot{a}}\Big|^{y_0}$ dargestellt werden, und die Angemessenheit dieser Bezeichnung des Algorithmus wird durch Vergleich mit den Substitutionen $(y_0, a + y_0)$, (y_0, ay_0) gezeigt, die nach einer Wiederholung von je x Malen bezw. $y = ax + y_0$, $y = a^x y_0$ geben. So giebt die Substitution (y_0, a^{y_0}), x-mal wiederholt, die obige Function. Der erste Teil des Aufsatzes giebt die Definitionen und Bezeichnungen für die Superpotenz (surpuissance), die superexponentiale Function u. s. w. und erörtert ihre Operationsgesetze. Dann werden Anwendungen gegeben auf den Ausdruck der Wurzeln gewisser transcendenter Gleichungen, wobei der letztere Ausdruck graphisch erläutert wird. Andere Anwendungen schliessen die Integration einer gemischten Differenzengleichung ein.

Gbs. (Lp.)

E. M. Lémeray. Sur quelques algorithmes et sur l'itération. S. M. F. Bull. **26**, 10-15.

Iterirt man eine Function $N(a,x)$ für den Wert $x=i$ x-mal, so dass $y=N^x(a,i)$, so ist es möglich, dass man eine neue Function $y=(N+I)(a,x,i)$ findet, welche für ganzzahlige x mit der vorigen übereinstimmt. Der Verf. bezeichnet die zweite Function als die „Iterirte von $N(a,x)$“ und giebt einige Beziehungen an, welche zwischen zwei solchen einander zugeordneten Functionen bestehen. Lsg.

E. M. Lémeray. Sur la convergence des substitutions uniformes. Nouv. Ann. (3) **17**, 75-80.

In Ergänzung einer früheren Untersuchung (Nouv. Ann. (3) **16**, 306; vergl. F. d. M. **28**, 345, 1897) beweist der Verf. den Satz:

Es sei a eine Wurzel der Gleichung $f(x)-x=0$, wobei $f(x)$ eine in der Umgebung von a holomorphe Function von x bedeutet. Bezeichnet man alsdann mit f^n die n^{te} Iterirte von $f(x)$, mit p ein Multiplum von n, mit $a_1, a_2, \dots$ die Werte der Derivirten von $f(x)$ für $x=a$, mit $A_1, A_2, \dots$ die Werte der Derivirten von $f^n(x)-x$ für $x=a$, und nimmt man zwischen den a_i solche Relationen an, dass die p Grössen $A_1, A_2, \dots, A_p$ verschwinden, so hat die Erfüllung der weiteren Bedingung $A_{p+1}=0$ auch die Gleichungen $A_{p+2}=0, \dots, A_{p+n}=0$ zur Folge; damit also die ersten p Ableitungen von $f^n(x)-x$ für $x=a$ verschwinden, sind p/n Relationen notwendig und hinreichend. Lsg.

Lémeray. Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération. C. R. **126**, 510-512.

Mitteilung über die Untersuchungen des Verf. über Iterationen, über welche in den vorangehenden Referaten berichtet ist. Lsg.

Lémeray. Sur certaines équations fonctionnelles linéaires. C. R. **126**, 949-950.

Mitteilung über die Untersuchungen des Verf. über die Functionalgleichung:

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1} y' + A_n x = 0,$$

in welcher $y^{(i)}$ die i^{te} iterirte Function der gesuchten Function y von x und die Coefficienten A_i gegebene Functionen von x bedeuten. Lsg.

Ch. L. Bouton. Examples of the construction of Riemann's surfaces for the inverse of rational functions by the method of conformal representation. Annals of Math. **12**, 1-26.

Ist $w=R(z)$ eine rationale Function von z, so lässt sich die Verzweigung von z in Bezug auf w auf folgende Weise in der z-Ebene

veranschaulichen. Man bringe in der w-Ebene Schnitte an, welche die Verzweigungspunkte mit einander verbinden, aber die w-Ebene nicht zerstückeln. Dadurch wird, wenn n die Zahl der Werte von z bezeichnet, die einem Werte von w entsprechen, die Function z in n getrennte Zweige zerlegt. Jeder Zweig bildet die w-Ebene auf ein Stück der z-Ebene ab, so dass die z-Ebene, den n Zweigen entsprechend, in n Stücke geteilt erscheint. Diese Einteilung der z-Ebene giebt nun ein anschauliches Bild der Verzweigung. In der vorliegenden Arbeit erläutert der Verf. diese namentlich von Klein vielfach verwendete Ueberlegung durch eine grosse Zahl von Beispielen. Hz.

L. Baur. Ueber die Verzweigung der dreiblätterigen Riemann'schen Flächen. J. für Math. **119**, 171-174.

Behufs Erläuterung einiger allgemeiner Sätze von Hensel wendet der Verf. seine früheren Untersuchungen über kubische Functionenkörper an, um allgemein die Verzweigung der durch die Gleichung $y^3+f_2 y+f_3=0$ definirten Function y zu bestimmen. Dabei bezeichnen f_2, f_3 beliebige ganze rationale Functionen von x. Hz.

G. Landsberg. Algebraische Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz. Math. Ann. **50**, 333-380.

G. Landsberg. Ueber das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen. Math. Ann. **50**, 577-582.

Die bisherigen Begründungen des Riemann-Roch'schen Satzes sind entweder transcendenter Natur, oder sie sind algebraisch-geometrisch. Im ersten Falle wird die Theorie der Integrale vorangestellt, und zur Abzählung der linear unabhängigen Integrale erster oder zweiter Gattung muss das Dirichlet'sche Princip als bewiesen angenommen werden; im zweiten Falle muss man sich zunächst auf gewöhnliche Singularitäten beschränken und die umständlichen Processe zur Auflösung höherer Singularitäten anwenden, um zu allgemein gültigen Sätzen zu gelangen.

Verf. zeigt nun, dass beides sich durch Heranziehung der arithmetischen Begriffsbildungen vermeiden lässt, welche durch die allgemeine Theorie der Körper an die Hand gegeben werden, und er gelangt so zu einer ganz directen Aufstellung jenes Satzes und der mit ihm zusammenhängenden Anzahlbestimmungen auf rein algebraischer Grundlage. Eine kurze Uebersicht über diese Untersuchungen hat Verf. in Gött. Nachr. 1897, 91-101 veröffentlicht (F. d. M. **28**, 86, 1897).

Wird y als algebraische Function von x durch eine irreducible Gleichung n^{ten} Grades

$$(1)\quad y^n+a_1(x)y^{n-1}+a_2(x)y^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(x)y+a_n(x)=0$$

mit rationalen Coefficienten definirt, so spaltet zunächst der Verf., um die unendlich fernen Punkte der Riemann'schen Fläche von vorn herein

in die Betrachtung einzubeziehen, die unabhängige Variable x durch die Substitution $x = \frac{x_1}{x_2}$ in zwei homogene Variablen x_1, x_2 und untersucht nun die sämtlichen Formen:

$$u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \cdots + u_{n-1} y^{n-1}$$

($u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ rationale binäre Formen von x_1, x_2 gleicher Dimension), deren Gesamtheit einen Körper bildet. Eine derartige Form der Dimension m wird ganz genannt, wenn sie in keinem Punkte der Riemann'schen Fläche unendlich wird. Dividirt man eine solche Form durch x_2^m, so erhält man eine auf der Riemann'schen Fläche einwertige Function, welche nur in den n Polen der Variable x je von der m^{ten} Ordnung unendlich wird.

Die Gesamtheit der ganzen Formen des Körpers besitzt ein Fundamentalsystem $H_1, H_2, \ldots, H_n$ der Art, dass jede ganze Form auf eine und nur eine Weise sich in der Gestalt

$$u_1 H_1 + u_2 H_2 + \cdots + u_n H_n$$

darstellen lässt, worin $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ganze rationale Formen von x_1, x_2 bedeuten. Die Elementarteiler der Determinante

$$\left| H_g^{(h)} \right| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

stehen nach Hensel in einfachem Zusammenhange mit den Windungszahlen der Riemann'schen Fläche in den Verzweigungspunkten; hieraus erschliesst der Verf. sogleich den wichtigen Satz (III): Die Riemann'sche Verzweigungszahl ist gleich der doppelten Summe der Dimensionszahlen eines absoluten Fundamentalsystems:

$$\frac{w}{2} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n.$$

Neben dem System $\left| H_g^{(h)} \right|$ betrachtet der Verf. nun das reciproke System

$$\left| Z_g^{(h)} \right|,$$

welches aus den sämtlichen Conjugirten der n Formen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ besteht, die ihrerseits (Satz IV und V) ein Fundamentalsystem für die „Formen erster Gattung“ bilden. Das letztere sind solche Formen, welche nur in den Verzweigungspunkten, und zwar in einem α-blätterigen Verzweigungspunkte höchstens von der Ordnung $\alpha - 1$, unendlich werden.

Die Formen erster Gattung stehen übrigens in einfachem Zusammenhange mit den von Noether durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ bezeichneten Integranden erster Gattung; ist nämlich ζ eine Form erster Gattung, deren Dimension gleich -2 ist, so ist

$$\int \zeta (x_2 \, dx_1 - x_1 \, dx_2) = \int (\zeta . x_2^2) dx$$

ein Integral erster Gattung, also ζx_2^2 eine Function φ_h (Satz VIII).

Zu dem Riemann-Roch'schen Satze gelangt nun der Verf. durch eine Verallgemeinerung der Reciprocitätsbeziehung, die zwischen den Fundamentalsystemen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ und $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ besteht. Darin liegt der Kern der weiteren Untersuchung. Wird auf der Riemann'schen Fläche ein System $\mathfrak{G}$ von m Punkten gewählt, welches auch einzelne Punkte mehrfach enthalten darf, so giebt es (Satz X) ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Formen des Körpers, welche in $\mathfrak{G}$ verschwinden, d. h. es giebt n Formen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ von der Beschaffenheit, dass jede ganze Form θ des Körpers, welche in $\mathfrak{G}$ verschwindet, auf eine und nur eine Weise durch einen linearen Ausdruck

$$\theta = u_1\theta_1 + u_2\theta_2 + \cdots + u_n\theta_n$$

dargestellt werden kann, in welchem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ganze rationale binäre Formen bedeuten.

Zwei Punktsysteme $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ nennt der Verf. reciprok, wenn sie zusammengenommen das Nullpunktsystem einer ganzen rationalen binären Form

$$P = c_0 x_1^\lambda + c_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + \cdots + c_\lambda x_2^\lambda$$

bilden. Wenn man sich nun zu der Determinante

$$\left|\theta_g^{(h)}\right| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

das reciproke System $\left|\Xi_g^{(h)}\right|$ bildet, so stellen die Formen $PX_1, PX_2, \ldots, PX_n$ ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung dar, welche in der reciproken Punktgruppe $\mathfrak{H}$ verschwinden. Hierin besteht der Hauptsatz (XII) der Untersuchung; derselbe wird in der Arbeit übrigens auf zwei Arten bewiesen. Diesem allgemeinen Theorem ordnet sich nun der Riemann-Roch'sche Satz unter; ebenso fliessen daraus durch Abzählung unmittelbar weitere Sätze, welche die Anzahlbestimmungen für die zum Körper gehörigen Functionen und Integrale ergeben.

Die Einführung des Begriffes der reciproken Punktgruppe kann auch ganz vermieden werden, wenn man statt des Fundamentalsystems $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die durch P dividirten Formen betrachtet. Alsdann kann dem Hauptsatze (XII) eine andere Gestalt gegeben werden, wie dies zu Beginn der zweiten Arbeit geschieht. In der letzteren zeigt der Verf., dass dieser Hauptsatz in der Theorie der algebraischen Zahlen ein vollkommenes Analogon hat, und er beweist dieses daselbst mit den hier zur Verfügung stehenden Methoden. Der Satz XII erweist sich also als ein Fundamentalsatz für die Theorie der Körper und ist daher als das wichtigste Ergebnis der tiefgehenden Untersuchung des Verf. zu betrachten. Gz.

L. Königsberger. Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen. Berl. Ber. 1898, 735-741.

In Erweiterung seiner früheren Untersuchung „Ueber den Eisen-

stein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen" (J. für Math. **115**; vergl. F. d. M. **26**, 116, 1895) giebt der Verf. einige allgemeinere Sätze über den gleichen Gegenstand. Besitzt eine algebraische Gleichung

$$(1) \qquad y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)y + f_n(x) = 0$$

für $x = \alpha$ eine ν-fache Wurzel $y = 0$, und kennt man die Exponenten der Anfangsglieder der ν zugehörigen Reihenentwickelungen, so kann man hieraus Schlüsse über die Ordnungszahlen der Functionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ für $x = \alpha$ ziehen. Umgekehrt kann man, wenn Gleichungen (1) der so erhaltenen Form vorliegen, auf die Gruppirung der Riemann'schen Fläche in Cyklen schliessen und die so erhaltenen Sätze zur Aufstellung von Irreductibilitätskriterien verwenden. Ersetzt man den Factor $x - \alpha$ durch eine Primzahl p und ganze Functionen von x, die in α nicht verschwinden, durch ganze, durch p nicht teilbare Zahlen, so erhält man analoge Sätze über ganze ganzzahlige Functionen. Eine ausführliche Darstellung der zunächst ohne Beweis angegebenen Sätze ist seither im Journ. für Math. **121** erschienen. Lsg.

K. Hensel. Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form. (2. Abhandlung.) J. für Math. **119**, 114-130.

In seiner ersten Abhandlung (J. für Math. **118**, 234-250; vergl. F. d. M. **28**, 87, 1897) hatte der Verf. die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form rein logisch geleistet, ohne ein Verfahren anzugeben, um das zu einem vorgegebenen Modulsystem gehörige reducirte System wirklich aufzufinden; die zweite Abhandlung giebt ein solches Verfahren. Jedes Modulsystem $(M) = (F_1(x), \ldots, F_\mu(x))$, dessen Elemente ganze ganzzahlige Functionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind, kann zunächst als ein Product von „einfachen" Modulsystemen dargestellt werden; ein einfaches Modulsystem ist ein solches, welches nur durch ein Primmodulsystem (P, p) teilbar ist, wobei p eine Primzahl und P eine nach dem Modul p unzerlegbare ganze Function von x bedeutet. Jedes einfache Modulsystem kann sodann durch eine endliche Anzahl von Operationen auf die folgende reducirte Form gebracht werden:

$$(\Phi_0(P),\ \Phi_1(P),\ \Phi_2(P),\ \ldots,\ \Phi_\nu(P));$$

hierin bedeutet $\Phi_i(P)$ eine Function der Form:

$$\Phi_i(P) = p^{d_i}(P^{n_i} + B_1^{(i)} P^{n_i - 1} + B_2^{(i)} P^{n_i - 2} + \cdots),$$

wobei die B ganze, mod. P reducirte und durch p teilbare Functionen von x bedeuten, während $n_0, n_1, \ldots, n_{\nu-1}, n_\nu = 0$ eine Reihe abnehmender, $d_0, d_1, \ldots, d_\nu$ eine Reihe zunehmender Zahlen sind. Ferner ist, wenn $d_i - d_{i-1} = e_i$ gesetzt wird,

$$p^{e_i}\Phi_{i-1} = b_{ii}\Phi_i + b_{i,i+1}\Phi_{i+1} + \cdots + b_{i\nu}\Phi_\nu,$$

wobei b_{ii} primäre Functionen von P ohne Zahlenteiler und die Func-

tionen b_{ik} $(k > i)$ für das Modulsystem (p^{e_i}, b_{kk}) auf ihren Rest reducirt sind. Die so erhaltene Normalform ist für jedes Modulsystem eine eindeutig bestimmte. Lsg.

G. Marenghi. Sovra un teorema del Kronecker. Ven. Ist. Atti (7) **9,** 1688-1698.

Der Verf. giebt einen neuen Beweis für eine von Koenigs im Journ. de Math. (5) **2,** 41 (vergl. F. d. M. **27,** 313, 1896) aufgestellte Erweiterung einer Kronecker'schen Integralformel für Charakteristiken. Lsg.

A. Bassi. Studio sulle funzioni di genere qualunque e in particolare sulle funzioni di genere zero o di genere uno. Batt. G. **36,** 100-144.

Der Verf. giebt eine zusammenhängende Darstellung seiner Untersuchungen über transcendente ganze Functionen von endlichem Geschlecht. Er richtet sein Augenmerk hauptsächlich auf die Frage, in wie weit das Rolle'sche Theorem sich auf solche Functionen übertragen lässt, und (hieran anschliessend) welche Abhängigkeit zwischen den Nullstellen einer solchen Function und denen ihrer Ableitung bestehen. (Vergl. F. d. M. **26,** 428, 1895). Hz.

Karagiannidès. Sur une extension d'une formule de M. Léauté. Nouv. Ann. (3) **17,** 539-541.

Verallgemeinerung der F. d. M. **12,** 330, 1880 mitgeteilten Formel von Léauté auf Functionen von zwei Veränderlichen. F.

L. Autonne. Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 224-226.

Kurzer Ueberblick über die Arbeiten des Verf. über die Fundamentalpunkte der Transformationen des n-dimensionalen Raumes aus den Jahren 1895-97 (vergl. F. d. M. **26,** 757, 1895; **27,** 315, 1896; **28,** 365, 1897). Lsg.

É. Picard. Sur les fonctions de plusieurs variables et en particulier les fonctions algébriques. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 200.

Kurzer Bericht über den Vortrag, welchen der Verf. auf dem internationalen Mathematiker-Congress in Zürich in der Section für Analysis gehalten hat. Hz.

J. Drach. Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. Ann. de l'École Norm. (3) **15,** 243-384; auch sep. Thèse. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 150 S. 4°.

Die weitschichtige Abhandlung bemüht sich, den Gedanken von E. Galois zu verwirklichen, der in den Schlusszeilen des berühmten Briefes an A. Chevalier ausgesprochen ist: „Il s'agissait de voir, a priori, dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes, quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données, sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense." Wie die Theorie von Galois Mittel an die Hand giebt, um alle zwischen den Wurzeln eines Systemes von Gleichungen bestehenden rationalen Beziehungen aufzustellen, so sollen auch in der Theorie der Differentialgleichungen Methoden ausfindig gemacht werden, um alle zwischen den Lösungen des Differentialgleichungssystemes und ihren Ableitungen bestehenden algebraischen Beziehungen aufzustellen und zu beherrschen.

Demgemäss giebt der erste Teil der in drei Abschnitte zerfallenden Abhandlung eine Darstellung der Theorie von Galois, wobei der Verf. merkwürdiger Weise bis auf die Elemente zurückgeht. Der zweite Teil setzt die Begriffe der vollständig integrablen Systeme und der logischen Integration auseinander. Ein System von Differentialgleichungen wird vollständig integrabel genannt, wenn die sämtlichen Gleichungen mit einander verträglich sind und zur Aufstellung aller zwischen den Lösungen und ihren Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung hin bestehenden algebraischen Beziehungen ausreichen. Unter logischer Integration versteht der Verf. die Zurückführung eines gegebenen Differentialgleichungssystemes auf ein vollständig integrables und irreducibles System. Im dritten Teile überträgt sodann der Verf. die Methoden der Galois'schen Substitutionentheorie auf die Lehre von den linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bilden $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

so besteht zwischen diesem und einem anderen Fundamentalsystem irgend eine Substitution der allgemeinen Gruppe Γ_n aller Punkttransformationen. Besteht aber überdies zwischen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine algebraische Beziehung, so dürfen alsdann nur solche Substitutionen einer Untergruppe Γ angewandt werden, welche jene algebraische Gleichung intact lassen. Man gelangt so zum Begriff der Rationalitätsgruppe, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: Alle rationalen Differentialinvarianten von Γ drücken sich, wenn man $z_1, \ldots, z_n$ als Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ betrachtet, rational durch die x aus; jede Function der z, welche sich rational durch die x ausdrückt, ist eine Function der Differentialinvarianten. Durch successive Adjunction von Transcendenten kann man, analog wie in der Theorie von Galois, die Rationalitätsgruppe Γ auf einfache, d. h. auf solche Gruppen zurückführen,

welche keine invariante Untergruppe besitzen. Die Ausführungen des Verfassers sind durchweg ganz allgemein gehalten, und eine Darlegung der Anwendbarkeit der eingeführten Begriffsbildungen auf wirklich interessante Einzelprobleme wäre sehr wünschenswert. Lsg.

Ernst Lindelöf. Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques. Acta Soc. Sc. Fennicae **24,** 39 S. 4°.

Wenn eine analytische Function $f(x)$ der complexen Variable x in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T sich regulär verhält und man mit Hülfe des Dirichlet'schen Principes das Gebiet T durch eine analytische Function $x = \psi(t)$ conform auf den Einheitskreis um den Nullpunkt abbildet, so geht die Function $f(x)$ in eine Function $F(t)$ über, welche, nach Potenzen von $t = \varphi(x)$ entwickelt, durch eine Reihe dargestellt wird, deren Convergenzkreis mindestens gleich 1 ist. Kennt man die singulären Punkte der Function $f(x)$, so kann man vermöge des dargelegten Princips die Function durch gut convergirende Reihen oftmals auch in solchen Gebieten darstellen, welche sonst von dem ursprünglich gegebenen Functionselement aus erst durch analytische Fortsetzung erreicht werden können. Kennt man die singulären Punkte der Function nicht, so kann gelegentlich stetige Aenderung des Gebietes T und passende Wahl der Transformation $x = \psi(t)$ zur Ermittelung der singulären Stellen führen. Mit Hülfe des Cauchy-Hadamard'schen Theorems über den Radius des Convergenzkreises gelangt der Verf. hier zu dem allgemeinen Satze: Damit $x = 1$ ein singulärer Punkt für die durch die Reihe mit dem Convergenzradius 1

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

definirte Function sei, ist notwendig und hinreichend, dass man, wenn ε eine beliebig kleine Grösse bezeichnet, für unendlich viele Werte von n die Ungleichung hat:

$$\text{mod.} \left| a_n + (n-1)\, a_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\, a_{n-2} + \cdots + a_1 \right|^{\frac{1}{n}} > 2(1-\varepsilon)$$

oder allgemeiner, wenn α eine beliebige positive Zahl ist,

$$\text{mod.} \left| a_n \alpha^n + (n-1) a_{n-1} \alpha^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\, a_{n-2} \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \alpha \right|^{\frac{1}{n}} > (\alpha+1)(1-\varepsilon).$$

Der Nutzen der Transformation $x = \psi(t)$ für die wirkliche Darstellung und Berechnung von Functionen wird an einer Reihe von Beispielen dargelegt. Es sind dies die Transformationen:

$$x = \frac{\alpha t}{1+t}, \qquad x = 1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n, \qquad x = 1 - e^{-t},$$

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad x = 2\left(\frac{t}{a}\right)^6 - 3\left(\frac{t}{a}\right)^4 + 1,$$

welche auf einige elementare Functionen, auf das vollständige elliptische Integral erster Gattung, auf die hypergeometrische Function und auf die Function

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{dx}{x} \log(1-x)$$

angewandt werden. Lsg.

E. Borel. Sur les types de croissance et sur les fonctions entières. C. R. **126**, 321-324.

Eine mit r ins Unendliche wachsende Function $\varphi(r)$ wird zum Exponentialtypus gehörend genannt, wenn eine positive Zahl ϱ existirt, so dass für beliebig kleines ε die Ungleichungen $e^{r^{\varrho-\varepsilon}} < \varphi(r) < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$ bei hinreichend grossem r gelten. Ordnet man nun einer ganzen Function von endlichem Geschlecht eine positive wachsende Function $M(r)$ zu, welche den Maximalwert des absoluten Betrags der Function für $|z| = r$ angiebt, und setzt man den absoluten Betrag a_n der n^{ten} Nullstelle gleich $\theta(n)$, so gilt der Satz: „Wenn die Function $M(r)$ zum Exponentialtypus gehört, so ist das Gleiche mit $\theta(n)$ der Fall und umgekehrt“, mit einer einzigen von Picard (Ann. de l'Ec. Normale 1880) angegebenen Ausnahme. Die Beweise der angegebenen Sätze sind seither in dem Buche „Leçons sur les fonctions entières“ 1900 erfolgt. Lsg.

Lebesgue. Sur l'approximation des fonctions. Darboux Bull. (2) **22**, 278-287.

Der Verf. giebt einen elementaren Beweis des von Weierstrass aus einer Integralformel abgeleiteten Satzes (vgl. F. d. M. **17**, 384, 1885): „Wenn eine in einem Intervalle (a, b) endliche und stetige Function gegeben ist, so kann man ein Polynom finden, welches sich von ihr im ganzen Intervalle um weniger als eine beliebig vorgegebene positive Grösse unterscheidet“, und erweitert diesen Satz auf Functionen mehrerer Veränderlichen. Lsg.

Z. Krygowski. Zur Theorie der lacunären Functionen. Prace mat.-fiz. **9**, 213-221. (Polnisch.)

Anknüpfend an die bekannte Poincaré'sche Methode (vgl. F. d. M. **15**, 341, 1883), giebt der Verf. einige Beispiele lacunärer Functionen, in denen er das Poincaré'sche Element $\frac{1}{z-a_i}$ durch etwas allgemeinere Ausdrücke ersetzt. So entsteht z. B. die Function

$$\varphi(z) = \sum_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m A_i \frac{e^{-n\frac{ia_i}{a}}}{z-a_i-ma},$$

wo die Reihe $\sum A_i$ absolut convergent ist. Dn.

A. Viterbi. Sulla continuazione analitica delle funzioni monogene uniformi rappresentate col metodo del Mittag-Leffler. Palermo Rend. **12**, 95-110.

Lässt man die Menge der singulären Stellen einer monogenen eindeutigen Function, für welche die Mittag-Leffler'sche Darstellung (Acta Math. **4**) zu Grunde gelegt wird, variiren, so ändert sich zugleich der Bereich der regulären Stellen der Function. Verf. untersucht, unter welcher Bedingung für die neue Menge singulärer Punkte und den neuen Bereich regulärer Stellen sich eine eindeutige analytische Function construiren lässt, welche (abgesehen von einer eindeutigen analytischen Function, die in allen Stellen des zweiten Bereiches regulär ist) die analytische Fortsetzung der ursprünglichen Function giebt. Gz.

W. F. Osgood. Example of a single-valued function with a natural boundary, whose inverse is also single-valued. American M. S. Bull. (2) **4**, 417-424.

W. F. Osgood. Note on the generalization of Poincaré and Goursat's proof of a theorem of Weierstrass's. American M. S. Bull. (2) **5**, 14-17.

W. F. Osgood. Supplementary note on a single-valued function with a natural boundary, whose inverse is also single-valued. American M. S. Bull. (2) **5**, 17-18.

Nachdem der Verf. die Existenz von Functionen von der im Titel der ersten Note genannten Beschaffenheit mit Hülfe der conformen Abbildung bewiesen hat, giebt er als explicites Beispiel die Function

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{a^n+2}}{(a^n+1)(a^n+2)},$$

wo $a>1$ eine ganze Zahl bedeutet. Der vom Verf. geführte Nachweis, dass diese Function, deren Existenzbereich der Kreis $|z|=1$ ist, eine eindeutige Umkehrung besitzt, lässt sich durch einen wesentlich kürzeren ersetzen, wie der Verf. in dem Zusatz zur zweiten Note nach einer Angabe des Referenten zeigt. Ein anderes Beispiel ist von Fredholm in der Reihe $\sum_0^\infty a^n z^{n^2}$ gegeben worden. Die Existenz solcher Functionen ermöglicht dem Verf. den Nachweis, dass eine analytische Function von einer analytischen Function nicht notwendig wiederum eine monogene analytische Function vorstellt.

In der zweiten Note handelt es sich um den Satz von Weierstrass, nach welchem zu jedem beliebigen Continuum A eindeutige analytische Functionen gehören, deren Existenzbereich mit A zusammenfällt, ein Satz, der zuerst von Runge (vgl. F. d. M. **17**, 379, 1885) bewiesen worden ist. Einen nur für specielle Continua A gültigen Beweis von Poincaré und Goursat ergänzt der Verf. so, dass er allgemein gültig wird. Hz.

D. Gravé. Sur les lignes composées de parties rectilignes. C. R. **127**, 1005-1007.

Bezeichnet $n=2m-1$ eine ungerade Zahl >1, und entwickelt man einen echten Bruch x in einen systematischen Bruch mit der Basis n:

$$x=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\cdots,$$

so sind die „Ziffern" $a_1, a_2, a_3, \ldots$ entweder sämtlich gerade Zahlen, oder es kommt unter ihnen eine erste Ziffer a_k vor, welche ungerade ist. Im ersten Falle setze man

$$f(x)=\frac{a_1}{2m}+\frac{a_2}{2m^2}+\frac{a_3}{2m^3}+\cdots,$$

im zweiten Falle

$$f(x)=\frac{a_1}{2m}+\frac{a_2}{2m^2}+\cdots+\frac{a_k+1}{2m^k}.$$

Die hierdurch im Intervalle $0\leqq x\leqq 1$ definirte Function $f(x)$ hat einige merkwürdige Eigenschaften. So besitzt z. B. die Curve $y=\int\limits_0^x f(x)\,dx$, welche sich aus geradlinigen Stücken zusammensetzt, in jedem Punkte eine bestimmte Tangente, die sich stetig mit der Lage des Punktes auf der Curve ändert. Auf ähnliche Weise erhält man Flächen von entsprechender Beschaffenheit. Hz.

C. Severini. Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale. Torino Atti **33**, 1002-1023; Bologna: Gamberini e Parmeggiani. 14 S. 8⁰.

Der Verf. knüpft an einen Satz von Weierstrass an, nach welchem eine reelle stetige Function $f(x)$ der reellen Variable x, deren Werte, absolut genommen, unter einer endlichen Grenze bleiben, in jedem endlichen Intervalle als gleichmässige Grenze einer ganzen rationalen Function darstellbar ist. Lässt man die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ fallen, so bleibt der Satz von Weierstrass unter der Annahme der Integrabilität von $f(x)$ noch gültig, falls man die Variable x auf geeignet gewählte Bereiche einschränkt. Nach dem Vorgange von Weierstrass benutzt der Verf. zur Begründung seiner Sätze Integrale der Gestalt $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$, wo k eine positive Grösse und ψ eine gewissen Bedingungen unterworfene Function einer reellen Variable bedeutet. Hz.

T. Cazzaniga. Funzioni olomorfe nel campo ellittico. Torino Atti **33**, 808-823.

Die Darstellungssätze von Weierstrass und Mittag-Leffler für eindeutige analytische Functionen sind, wie schon Weierstrass in seinen

Vorlesungen zu bemerken pflegte, auf solche Functionen übertragbar, welche auf einer Riemann'schen Fläche von beliebigem Geschlechte p eindeutig sind. Der Verf. behandelt in der vorliegenden Arbeit den Fall $p = 1$ und beschäftigt sich insbesondere mit der Productdarstellung einer eindeutigen doppeltperiodischen Function $F(u)$, die im Periodenparallelogramm eine wesentlich singuläre Stelle $u = 0$ besitzt. Bezeichnet u_n die einzelne Nullstelle von $F(u)$ im Periodenparallelogramm, so ist der Ausdruck des Primärfactors, den der Verf. verwendet, dieser:

$$\frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)} e^{u_n \zeta(u) + \frac{1}{2!} u_n^2 p(u) - \frac{1}{3!} u_n^3 p'(u) + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!} u_n^m p^{(m-2)}(u)},$$

wobei $\sigma(u), \zeta(u), p(u)$ die bekannten Weierstrass'schen Functionen sind. Einige Anwendungen und Verallgemeinerungen der in Rede stehenden Productdarstellung beschliessen die Arbeit. Hz.

T. Cazzaniga. Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico. Torino Atti **33,** 983-1002.

Im ersten Teile der Arbeit giebt der Verf. einige Folgerungen aus den Sätzen von Borel über die Möglichkeit von Identitäten der Gestalt $G_1(x)e^{H_1(x)} + G_2(x)e^{H_2(x)} + \cdots + G_n(x)e^{H_n(x)} = 0$, wo $G_i(x), H_i(x)$ ganze Functionen bezeichnen. Im zweiten Teile folgt eine angebliche Verallgemeinerung eines Satzes von Picard auf eindeutige doppeltperiodische Functionen, die eine wesentlich singuläre Stelle im Periodenparallelogramm besitzen. Da aber nach einem Satze von Picard eine Function in der Umgebung einer isolirten wesentlich singulären Stelle jeden Wert mit eventueller Ausnahme von zweien annehmen kann, so sind die Sätze des Verf. gänzlich bedeutungslos. Hz.

U. Dini. Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. Annali di Mat. (3) **1,** 39-76.

Bezeichnen a_0, a_1, a_2 Functionen eines Parameters ξ, ferner μ eine beliebige Constante und z eine complexe Variable, so stellen die Coefficienten $Z_{\mu,n}$, resp. Z_n des allgemeinen Gliedes in der Entwickelung von $(a_0z^2 + a_1z + a_2)^\mu$, resp. $\lg(a_0z^2 + a_1z + a_2)$ nach ganzen positiven Potenzen von z gewisse Functionen von ξ vor, die als ganz speciellen Fall die Legendre'sche Kugelfunction $X_n(\xi)$ umfassen. Die Functionen $Z_{\mu,n}$ und Z_n fasst der Verf. in bekannter Weise als Cauchy'sche Residuen auf. Durch Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes findet der Verf. sodann eine Fülle von Integraldarstellungen und Entwicklungen der Functionen $Z_{\mu,n}$ und Z_n. Hz.

A. Pringsheim. Ueber eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen. Math. Ann. **50,** 442-461.

Es handelt sich hier um solche singulären Stellen auf dem Convergenzkreis einer Potenzreihe, für welche die letztere und ihre sämtlichen Ableitungen endlich und stetig bleiben. Nach einer gegen Lerch gerichteten Einleitung polemischer Natur giebt der Verf. zunächst neue Beispiele von Potenzreihen, bei denen jeder Punkt des Convergenzkreises eine singuläre Stelle von dem angegebenen Charakter ist. Es sind dies Reihen, welche für $|x|\leqq 1$ gewisse Summen von der Gestalt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{a-x^{n_\nu}}$ darstellen $\left(\text{z. B. } \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{1}{a-x^{\nu!}}\right)$. Singuläre Stellen der in Rede stehenden Art können aber auch völlig isolirt auftreten. Die Function $e^{-[\lg(1-x)]^2} = e^{-\left(\sum\frac{x^\nu}{\nu}\right)^2}$ bleibt in dem Bereiche $|x|\leqq 1$, ebenso wie alle ihre Ableitungen, endlich und stetig; die einzige singuläre Stelle der Function ist die Stelle $x=1$. Den Schluss der Arbeit bilden einige Bemerkungen über die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\nu}}x^\nu$, von der P. du Bois-Reymond glaubte, dass sie über den Kreis $|x|=1$ nicht fortsetzbar sei. Dies hat Lerch schon als einen Irrtum nachgewiesen, indem er die Fortsetzung über die ganze Zahlebene durch Darstellung des Reihenwertes in Form eines bestimmten Integrales gab. Der Verf. bemerkt, dass die Fortsetzbarkeit auch aus einem älteren Theoreme von Hadamard folgt. Den speciellen Fall dieses Theoremes, der hier in Frage kommt, beweist der Verf. schliesslich noch auf elementare Weise mit Hülfe der Euler'schen Transformation der Potenzreihen. Hz.

S. Pincherle. Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche. Bologna Rend. 1897-98, 12 S.

Zwei Potenzreihen φ_1, φ_2 mit gleichem Convergenzradius r sollen „gleichsingulär“ heissen, wenn man eine solche Constante k angeben kann, dass der Convergenzradius der Potenzreihe $\varphi_1-k\varphi_2$ grösser als r ist. Manche auf gleichsinguläre Potenzreihen bezügliche Sätze werden hier vom Verf. mit Hülfe seines Operationscalcüls bewiesen. Vi.

É. Borel. Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor. C. R. **127,** 751.

Auszug aus einer Abhandlung, die inzwischen im S. M. F. Bull. erschienen ist (vergl. auch S. 210 dieses Bandes). Hz.

E. Lindelöf. Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor. C. R. **126,** 632-634.

Die hier mitgeteilten Resultate hat der Verf. seither ausführlich in den Acta Soc. Fennicae dargestellt. Hz.

Le Roy. Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. C. R. **127**, 348-350.

Betrachtet man in der Reihe $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$, deren Convergenzradius gleich 1 vorausgesetzt wird, den Coefficienten a_n als Function von n, so ergeben sich aus gewissen Annahmen über die Natur dieser Function a_n Sätze über die analytische Fortsetzung von $f(z)$. Wir führen als Beispiel den Satz an: Wenn a_n nach Potenzen von $t=\frac{n}{n+1}$ in eine Reihe entwickelbar ist, die noch für $t=1$ absolut convergirt, so ist $f(z)$ in der ganzen Ebene nach Ausschluss des Stückes $z=1\cdots+\infty$ der reellen Axe holomorph. Der Beweis beruht auf der Darstellung von $f(z)$ durch ein bestimmtes Integral der Gestalt $\int_0^1 \varphi(y)\frac{dy}{(1-zy)^\nu}$. (Vergl. auch S. 212 dieses Bandes.) Hz.

É. Borel. Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. C. R. **127**, 1001-1003.

Sei $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ eine Reihe mit dem Convergenzradius 1. Bestimmt man nun, was auf mannigfaltige Weise möglich ist, die ganze transcendente Function $\psi(x)$ so, dass $a_n=\psi(n)$ wird, so steht das Verhalten von $\psi(x)$ im Unendlichen in engem Zusammenhange mit der Natur der Singularitäten der analytischen Function $f(z)$. Der Verf. erläutert diese Thatsache unter der speciellen Annahme, dass $\sum|a_n|$ convergirt, in welchem Falle $\psi(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}\sum\frac{(-1)^n a_n}{x-n}$ angenommen werden kann. Hz.

Ch. Riquier. Sur la forme que prend, par la suppression de certains termes, un développement en série entière. C. R. **126**, 1558-1560.

Es handelt sich um eine übersichtliche Darstellung der Gesamtheit derjenigen Glieder einer mit völlig unbestimmten Coefficienten geschriebenen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0, y-y_0, \ldots)$, welche übrig bleiben, wenn man in der Reihe alle diejenigen Glieder unterdrückt, deren Coefficienten in gewissen in endlicher Anzahl gegebenen Ableitungen der Reihe auftreten. Hz.

F. Bucca. Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie. Palermo Rend. **12**, 260-277.

Bewegt sich der Punkt x auf einem Curvenbogen C, und wird der Punkt z auf ein Gebiet E eingeschränkt, so stellt das Integral $F(z) = \int_C f(x)\varphi(x,z)dx$ unter geeigneten Annahmen über die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x,z)$ eine holomorphe Function von z im Gebiete E dar. Ist dann ferner $f(x) = \Sigma f_n(x)$ und diese Summe längs C gleichmässig convergent, so ist $F(z)$ durch die Summe $\Sigma \int_C f_n(x)\varphi(x,z)dx$ darstellbar. Die Anwendung dieser Bemerkung auf das Cauchy'sche Integral $\left(\varphi(x,z) = \frac{1}{z-x}\right)$ liefert einige Sätze von ähnlicher Art wie der bekannte Satz von Weierstrass, welcher eine hinreichende Bedingung dafür giebt, dass eine unendliche Summe holomorpher Functionen eine ebenfalls holomorphe Function darstellt. Der Verf. bespricht am Schluss der Arbeit noch einige Anwendungen einer Formel von Painlevé, die eine in einem Gebiete holomorphe Function durch eine Summe von Polynomen ausdrückt. Als Beispiel sei die Entwickelung

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{k^{n-\nu}}{(1+k)^{n+1}} \varphi^{(\nu)}(0) z^{\nu}$$

(k eine beliebige positive Constante) angeführt, welche für $k = 0$ in die Taylor'sche Reihe übergeht und in demselben Umfange wie die letztere gültig ist. Hz.

G. Mittag-Leffler. Om en generalisering af potensserien. Stockh. Öfv. **55**, 135-138.

G. Mittag-Leffler. Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion; första, andra om tredje meddelande. Stockh. Öfv. **55**, 247-262, 263-282, 375-385.

Es sei l eine in der x-Ebene vom Nullpunkte bis ins Unendliche gezogene Gerade, und es sei ξ ein gegebener Punkt auf l. Man fixire weiter auf l die Punkte $\nu\xi$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) und construire dann eine Folge von n Kreisen, von welchen der erste den Nullpunkt zum Mittelpunkte hat und durch ξ geht, der zweite ξ zum Mittelpunkte hat und durch den Nullpunkt und 2ξ geht, der ν^{te} $(\nu-1)\xi$ zum Mittelpunkte hat und durch $(\nu-2)\xi$ und $\nu\xi$ geht. Man kann immer ξ so nehmen, dass der Zweig einer analytischen Function $F(x)$, für welchen

$$(1) \qquad \left(\frac{d^{\mu}F(x)}{dx^{\mu}}\right)_{x=0} = F^{(\mu)}(0) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

in dem Gebiete, welches durch die Gesamtheit aller dieser Kreise definirt ist, sich eindeutig und regulär verhält. Es sei ξ_n die obere Grenze für ξ, wenn ξ in dieser Weise gewählt ist. Wir bezeichnen mit C_n das Gebiet, welches durch die Gesamtheit aller Stücke der Geraden l vom Nullpunkte bis zum Punkte $n\xi_n$ definirt ist.

Wir bezeichnen mit $FC_n(x)$ den in C_n eindeutig bestimmten Functionenzweig, welcher aus der oben angegebenen Constantenreihe bestimmt ist. Es sei x ein willkürlicher Punkt in C_n; man betrachte die successiven analytischen Fortsetzungen der Reihe

$$(2) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(0)}{\underline{|\mu}} x^{\mu}$$

bis zu den Punkten $\nu \frac{x}{n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Diese geben uns

$$(3) \quad \begin{cases} FC_n(x) = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{\infty} F^{(\lambda_1)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right) \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1}}{\underline{|\lambda_1}}, \\ F^{(\lambda_1)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right) = \sum\limits_{\lambda_2=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}\left((n-2)\frac{x}{n}\right) \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_2}}{\underline{|\lambda_2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2})}\left(2\frac{x}{n}\right) = \sum\limits_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}\left(\frac{x}{n}\right) \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda_{n-1}}}, \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}\left(\frac{x}{n}\right) = \sum\limits_{\lambda_n=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0) \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_n}}, \end{cases}$$

welche Reihen in einem willkürlichen Gebiete in C_n gleichmässig convergent sind. (Dies wird leicht unter Anwendung des Satzes über die Grenzen der Coefficienten in einer Potenzreihe bewiesen.)

Aus diesen Reihen findet man

$$(4) \qquad FC_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0) \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}},$$

welche Reihe in einem willkürlich in C gegebenen Gebiete gleichmässig convergent ist, wenn man diesem Begriff die Bedeutung giebt, dass die Reihen (1) gleichmässig convergent sein sollen.

(Von dieser Reihe gilt, dass, wenn sie im Punkte x' convergent ist, dieser Punkt zum Inneren des Gebietes C_n oder zu ihrer Grenze gehört, wenn $n = 1, 2, 3$.)

Wir wollen nun ein neues Gebiet X in der x-Ebene definiren. Wenn man, von Null ausgehend, die Reihe (2) längs einer Geraden l analytisch fortsetzt, so können zwei Fälle eintreten: 1. Jeder Punkt von l kann in dem Convergenzgebiete einer der analytischen Fortsetzungen enthalten sein, oder 2. man findet einen ersten Punkt, welcher nicht

diese Eigenschaft hat. In diesem letzten Falle betrachten wir den Teil von l, welcher von diesem Punkte sich ins Unendliche erstreckt, als „coupure“ der x-Ebene. Den Teil der x-Ebene, welcher bleibt, nachdem alle solche „coupures“ ausgeschlossen sind, nennen wir X.

Es sei nun $\overline{X}$ ein willkürliches in X gegebenes Gebiet. Man kann immer eine positive ganze Zahl $\overline{n}$ so gross nehmen, dass C_n das Gebiet $\overline{X}$ umfasst, wenn $n = \overline{n}$.

Dann ist es möglich (wie aus dem Gesagten folgt), eine ganze rationale Function $G_n(x)$ so zu bestimmen, dass

$$|FX(x) - G_n(x)| < \delta,$$

wenn x in $\overline{X}$ liegt und δ beliebig klein ist.

Diese Function ist von der Form

$$G_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m_1} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0) \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}}{\lfloor\lambda_1 \lfloor\lambda_2 \cdots \lfloor\lambda_n} .$$

Die Zahlen $m, m_1, \ldots, m_{n-1}$ können so genommen werden, dass sie von $F(0), F'(0), \ldots$ unabhängig sind und nur von n abhängen. (Dass die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ so genommen werden können, wird mittels einer elementaren Methode bewiesen, welche sich auf den Satz über die Grenzen der Coefficienten stützt.)

Aus diesem Satz wird durch eine Grenzmethode von Weierstrass das folgende Theorem abgeleitet.

Der Functionenzweig $FX(x)$ kann mittels einer Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = (\lim_{\mu=\infty} g_n(x))$$

dargestellt werden, wo $G_\mu(x)$ Polynome von der Form

$$G_\mu(x) = \sum_\nu c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(0) x^\nu$$

sind, in welchen die Coefficienten $c_\nu^{(\mu)}$ bestimmte rationale Zahlen sind, welche nur von μ und ν abhängen.

Die Reihe convergirt gleichmässig in einem beliebigen, ganz in X gelegenen Gebiete. (In dem ersten Aufsatze wird eine analoge Reihe angegeben, deren Coefficienten auf andere Weise gebildet sind.) Die vorangehenden Sätze sind in „Om den analytiska framställningen första om andra meddelande“ enthalten. In „tredje meddelande“ wird eine notwendige und hinreichende Bedingung hergeleitet, damit a eine solche reguläre Stelle sein soll, welche zu X gehört.

Hmg.

P. Painlevé. Sur le développement des fonctions analytiques pour les valeurs réelles des variables. C. R. **126**, 385-388.

P. Painlevé. Sur le développement des fonctions réelles non analytiques. C. R. **126,** 459-461.

Bezeichnet $F(x)$ eine in dem Intervalle $a < x < b$ holomorphe analytische Function der reellen Variable x, so lässt sich $F(x)$ in diesem Intervalle durch eine Summe von Polynomen: $\Sigma P_n(x)$ darstellen, welche zugleich mit den durch gliedweise Differentiation entstehenden Summen $\Sigma P'_n(x)$, $\Sigma P''_n(x)$, ... in jedem Intervalle $\alpha\beta$, welches zwischen a und b liegt, gleichmässig convergirt. Das Polynom $P_n(x)$ ist eine lineare homogene Function der Werte, welche $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^{(n)}(x)$ in einem beliebig im Intervalle ab fixirten Punkte x_0 besitzen.

In der zweiten Note teilt der Verf. einen entsprechenden Satz für nicht-analytische Functionen von beliebig vielen Variabeln mit. Hz.

P. Painlevé. Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes. C. R. **126,** 200-202.

P. Painlevé. Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque. C. R. **126,** 318-321.

Allgemeine Sätze über die Darstellung einer in einem beliebig gestalteten Gebiete holomorphen oder meromorphen analytischen Function durch gleichmässig convergirende Summen von rationalen Functionen sowie durch Producte von der Gestalt $\prod_{n=1}^{\infty} H_n(z)e^{R_n(z)}$, wobei $H_n(z)$ und $R_n(z)$ rationale Functionen bezeichnen und die Nullstellen und Pole der analytischen Function sich auf die einzelnen Glieder des Productes verteilen. Man vergleiche frühere Arbeiten von Runge und Hilbert. (F. d. M. **17,** 379, 1885 und **28,** 359, 1897.) Hz.

N. Nielsen. Udviklinger efter Cylinderfunktioner. Nyt. Tidss. for Math. **9** B, 73-83.

Der Verf. untersucht Reihen von der Form

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\mu+n}(x)$$

und von ähnlichen Formen, wo $J^{\mu+n}$ eine gewöhnliche Cylinderfunction erster Art ist, μ eine willkürliche complexe Grösse. Es wird namentlich die Convergenz solcher Reihen untersucht und die Bedingung, wann verschiedene Reihen in solche Reihen transformirt werden können.

Erstens wird bewiesen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\mu+n}(x)$ unbedingt convergent ist, wenn die einfachere Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2n}}{\Gamma(\mu+n+1)}$$

es ist. Darnach wird bewiesen: Jede Facultätenreihe

$$f(\mu)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b_n}{\Gamma(\mu+n+1)},$$

die unbedingt convergent ist, wenn (der reelle Teil von μ) $R(\mu)>\lambda$, kann in eine Reihe

$$f(\mu)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n J^{n+\mu}(x)$$

transformirt werden, wo die Coefficienten mittels der Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^p a_p=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{b_0\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-2n}}{(p-n)!}$$

bestimmt sind, und die letzte Reihe ist ebenfalls unbedingt convergent, wenn $R(\mu)>\lambda$ ist; x ist eine willkürliche, endliche, von 0 verschiedene Zahl.

Jede Potenzreihe $\sum_{p=0}^{p=\infty}b_p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$ kann in eine Reihe von der Form

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}b_p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\sum_{p=0}^{p=\infty}a_p\left(\frac{x}{2}\right)^p J^{\mu+p}(x)$$

entwickelt werden. Diese Entwickelung ist convergent innerhalb des Convergenzkreises der Potenzreihe. Die Coefficienten a_n werden durch die Gleichung

$$a_p=\sum_{n=0}^{n=p}\frac{b_n\Gamma(\mu+n+1)}{(p-n)!}$$

bestimmt. μ ist eine willkürliche Zahl, die doch nicht negativ ganz sein darf.

Jede Potenzreihe $\Sigma b_r\left(\frac{x}{2}\right)^r$ kann in eine Reihe von der Form

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}b_r\left(\frac{x}{2}\right)^r=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n J^{\mu+n}(x)$$

entwickelt werden. Die Coefficienten a_n sind bestimmt durch die Gleichung

$$a_n=(\mu+n)\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma(\mu+n-p)}{\Gamma(\mu+1)}b_{n-2p},$$

μ ist wie oben bestimmt.

Mehrere Specialfälle dieser Entwickelungen sind früher gefunden; hier werden aber überall die genauen Kriterien ihrer Convergenz gegeben.

Endlich wird noch bewiesen: Jede Potenzreihe von der Form $\Sigma b_n x^{-n}$ kann in eine Reihe von der Form $\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}a_p J^{\mu+p}(x)$ transformirt

werden. Die Coefficienten a_p sind bestimmt durch

$$a_p = \frac{(-1)^p(\mu+p)\pi}{\sin\mu\pi} \sum_{n=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \frac{b_{2n-p}}{2^{2n-p}}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-p-\mu)}.$$

Die neue Reihe ist in demselben Bezirke convergent wie die ursprüngliche. μ ist bestimmt wie oben. V.

T. Brodén. Ueber die Darstellung von reellen Functionen mit unendlich dicht liegenden Nullstellen durch unendliche Producte, deren Factoren ganze analytische Functionen sind. Math. Ann. **51**, 299-320.

Der Verf. untersucht Functionen, welche durch ein Product der Gestalt

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi(\cos 2\pi K_n x)$$

definirt sind. Dabei sind $K_1, K_2, \dots$ ungerade ganze Zahlen, von denen jede durch die vorhergehende teilbar ist, und $\varphi(x)$ bedeutet die Function xe^{x-1}. Wenn der Quotient $K_n : K_{n-1}$ beständig $\geqq 3$, aber kleiner als eine feste Zahl g ist, so besitzt $f(x)$ die folgenden Eigenschaften:

1. $f(x)$ ist von Null verschieden für $x = A/K_n$, wo A eine beliebige ganze Zahl bezeichnet; für alle anderen Werte von x verschwindet $f(x)$.
2. In jedem noch so kleinen Intervalle nimmt $f(x)$ sowohl Werte > 0 als auch Werte < 0 an.
3. An den Nullstellen ist $f(x)$ stetig.
4. $f(x)$ ist integrabel. Die Stellen, an welchen der Sprung von $f(x) > \sigma$ ist, bilden unendliche Mengen, wenn σ genügend klein angenommen wird.

Nach einigen Bemerkungen über den Differentialquotienten von $f(x)$ untersucht der Verf. die Function $f(x)$ unter der Voraussetzung, dass der Quotient $K_n : K_{n-1}$ mit n ins Unendliche wächst. Er wendet sich dann zu den Functionen, welche den Annahmen $\varphi(x) = x$ und $\varphi(x) = x^2$ entsprechen, und bespricht schliesslich die Darstellung der von ihm betrachteten Functionen als Grenzen rationaler Functionen. Hz.

R. Baire. Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues. C. R. **126**, 884-887.

R. Baire. Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues. C. R. **126**, 1621-1623.

1. Ist $f(x)$ eine unstetige Function, und soll eine Reihe stetiger Func-

tionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... existiren derart, dass $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, so ist hierfür notwendig und hinreichend, dass $f(x)$ punktirt unstetig ist.

2. Man ordne den punktirt unstetigen Functionen die Zahl 1 zu, denjenigen Functionen, welche als Grenze einer Reihe $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... von punktirt unstetigen Functionen darstellbar sind, die Zahl 2 u. s. f., so dass jeder beliebigen endlichen oder überendlichen Zahl (im Sinne G. Cantor's) eine bestimmte Klasse von Functionen zugeordnet wird. Es handelt sich um die charakteristischen Eigenschaften der auf diese Weise definirten unstetigen Functionen und ihrer Klasseneinteilung.

Hz.

O. Blumenthal. Ueber die Entwickelung einer willkürlichen Function nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{z-\xi}$.

Diss. Göttingen. 57 S. gr. 8°.

Die Nenner der Näherungsbrüche des im Titel genannten Kettenbruches besitzen bekanntlich ähnliche Integraleigenschaften, wie sie der Coefficientenbestimmung bei den Fourier'schen Reihen zu Grunde liegen. Daher kann man, zunächst rein formal, eine willkürliche Function nach jenen Nennern entwickeln. Es erhebt sich dann aber die schwierige Frage, unter welchen Voraussetzungen über die willkürliche Function die Entwickelung convergirt und die Function wirklich darstellt. Nach dem Muster von Dirichlet's Behandlung der Fourier'schen Reihen und unter Benutzung der von Stieltjes herrührenden Sätze über die Kettenbruchentwickelung des Integrals $\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{z-\xi}$ (vgl. F. d. M. **25**, 326, 1896) leitet der Verf. hinreichende Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Function nach den Nennern der Näherungsbrüche jenes Kettenbruches ab. Nach der Ausführung dieser allgemeinen Untersuchung wendet sich der Verf. zur Behandlung einer Reihe von interessanten speciellen Fällen. Insbesondere betrachtet er die Fälle, wo die in der Kettenbruchentwickelung $\left(\frac{1}{a_1 z}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3 z}\dot{+}\frac{1}{a_4}\dot{+}\cdots\right)$ des Integrales auftretenden Constanten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rationale Functionen ihres Index oder auch Quotienten von Γ-Functionen sind (Entwickelung nach „Jacobi'schen" Functionen). Zum Schluss behandelt der Verf. die Entwickelung analytischer Functionen (welche nach dem Cauchy'schen Satze auf die Entwickelung der Function $\frac{1}{\zeta - z}$ hinauskommt) und hebt im Anschluss hieran einige Fälle hervor, in welchen die betrachteten Entwickelungen nicht eindeutig sind. Hz.

P. S. Nasimow. Ueber Verallgemeinerung der Methoden der grössten und kleinsten Exponenten von Lagrange und Newton auf zwei Gleichungen. Tagebuch X. Vers. Russ. Naturf. und Aerzte in Kiew, S. 106. (Russisch.)

Methode, um aus zwei algebraischen Gleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ die Reihenentwickelungen nach Potenzen von x ohne vorläufige Elimination einer der Functionen y oder z zu finden. Si.

F. d'Arcais. Sulle funzioni di una variabile complessa. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 1048-1050.

Der Verf. giebt eine allgemein gültige Darstellung einer eindeutigen monogenen Function $W(z)$ in der Umgebung einer singulären Stelle b, welche Grenzpunkt einer Folge von unendlichen vielen wesentlichen oder ausserwesentlichen Unstetigkeitspunkten $a_1, a_2, a_3, \dots$ ist, die den Bedingungen

$$|a_1 - b| > |a_2 - b| > |a_3 - b| > \cdots, \quad \lim_{n=\infty} |a_n - b| = 0$$

genügen. Es sei nämlich $\varphi_{n,n+1}(z)$ ein (mit Hülfe einer von J. Tannery gegebenen Reihe construirbarer) analytischer Ausdruck, welcher im Innern des Ringes zwischen zwei Kreisen mit dem Mittelpunkte b, die durch die Punkte a_n und a_{n+1} hindurchgehen, den Wert 1, ausserhalb des Kreisringes den Wert 0 hat. Es sei ferner innerhalb dieses Kreisringes die Function $W(z)$ durch die Reihe

$$A^{(0)}_{n,n+1} + A^{(1)}_{n,n+1}(z-b) + A^{(2)}_{n,n+1}(z-b)^2 + \cdots + \frac{B^{(1)}_{n,n+1}}{z-b} + \frac{B^{(2)}_{n,n+1}}{(z-b)^2} + \cdots$$

dargestellt, so giebt der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1} A^{(0)}_{n,n+1} + (z-b) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1} A^{(1)}_{n,n+1} + (z-b)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1} A^{(2)}_{n,n+1} + \cdots + \frac{1}{z-b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1} B^{(1)}_{n,n+1} + \frac{1}{(z-b)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1} B^{(2)}_{n,n+1} + \cdots$$

die Darstellung der Function $W(z)$ im Inneren des Kreises mit dem Mittelpunkte b, der durch den Punkt a_1 hindurchgeht, freilich mit Ausschluss derjenigen Punkte z, für welche $|z-b| = |a_r - b|$ ist, was die Bedeutung der Untersuchung wesentlich einschränkt. Lsg.

F. d'Arcais. La seconda funzione di Green pel campo piano limitato da due circonferenze concentriche. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 1664-1676.

Die Function G, welche der Verf. hier explicite aufstellt, ist durch

folgende Eigenschaften charakterisirt: Sie genügt im Innern des Kreisringes der Differentialgleichung $\Delta\Delta G = 0$ $\left(\text{wobei } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$; auf der Begrenzung befriedigt sie die Bedingungen

$$G = \tfrac{1}{4} r^2 \lg r, \quad \frac{dG}{dn} = \tfrac{1}{4}\, \frac{d\,(r^2 \lg r)}{dn}.$$

Dabei bezeichnet r den Abstand eines festen Punktes (des „Poles" der Function G) von einem veränderlichen Punkte der Begrenzung, und die Differentiation $\frac{d}{dn}$ bezieht sich auf die nach innen gerichtete Normale.

Hz.

G. Lauricella. Integrazione della doppia equazione di Laplace in un campo a forma di corona circolare. Ven. Ist. Atti (7) **10**, 236-250.

Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ bei gegebenen Grenzbedingungen für die Fläche eines Kreisringes. Die Integration erfolgt durch complicirte Reihenentwickelungen. (Vergl. das vorstehende Referat.) Hz.

T. Levi-Civita. Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 1399-1410.

Bezeichnet Δu wie gewöhnlich $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, und bildet man den Differentialausdruck $\Delta(\Delta(u))$, so besitzt dieser Invarianteneigenschaft gegenüber der Transformation

$$(1) \qquad x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = \pm\frac{y}{x^2+y^2}, \quad u' = \frac{u}{x^2+y^2}.$$

Es ist nämlich

$$\Delta'(\Delta' u') = (x^2+y^2)^3 \cdot \Delta(\Delta u),$$

wobei $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$. Diese Thatsache lässt sich für die Integration der Gleichung $\Delta(\Delta u) = 0$ für ein von zwei sich nicht schneidenden Kreisen begrenztes Gebiet verwenden, da die beiden Kreise durch Transformation nach reciproken Radien in zwei concentrische Kreise übergeführt werden können. Die Transformation (1) ist im wesentlichen die einzige Transformation in sich, welche der Ausdruck $\Delta(\Delta u)$ zulässt. Hz.

V. Volterra. Sulle funzioni poliarmoniche. Ven. Ist. Atti (7) **10**, 233-235.

Die einem an T. Levi-Civita gerichteten Briefe entnommenen Bemerkungen betreffen die Ausdehnung eines für „biharmonische" Func-

tionen (d. h. solche, welche die Gleichung $\Delta^2\Delta^2 = 0$ befriedigen; vgl. das vorangehende Referat) von zwei Variablen hergeleiteten Satzes auf „polyharmonische" Functionen von beliebig vielen Veränderlichen, d. h. auf Functionen, welche der Gleichung $\Delta^2\Delta^2\dots\Delta^2 = 0$ genügen.

Gz.

H. Poincaré. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. Journ. de Math. (5) **4**, 137-230.

Wenn eine algebraische Gleichung (1) $f(Z, Z') = 0$ dadurch befriedigt wird, dass Z und Z' als Fuchs'sche Functionen eines Parameters z dargestellt werden, und man setzt, indem man die Conjugirten zu z und Z mit z_0 und Z_0 bezeichnet:

$$(2) \qquad dS = \sqrt{dZ\cdot dZ_0}, \quad ds = \frac{\sqrt{dz\cdot dz_0}}{1-zz_0},$$

so ist dS das Bogenelement für die Variable Z, ds das im Sinne der nichteuklidischen Geometrie ausgewertete Bogenelement für die Variable z. Setzt man ferner $\frac{ds^2}{dS^2} = e^u$, so ist u eine reelle Grösse, welche als Function von X und Y $(Z = X + iY)$ der Differentialgleichung genügt:

$$(3) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 8e^u.$$

Die Darstellung eines gegebenen algebraischen Gebildes durch Fuchs'sche Functionen eines Parameters kann hiernach auf die Integration der Differentialgleichung (3) unter gewissen noch näher zu bestimmenden Unstetigkeitsbedingungen zurückgeführt werden.

Zur Integration der Gleichung (3) schlägt der Verf. einen neuen Weg ein. Er führt eine geschlossene $(2p+1)$-fach zusammenhängende Klein'sche Fläche ein, welche den imaginären Punkten der Curve (1) eindeutig entspricht, bezeichnet ihr Oberflächenelement mit $d\omega$, das entsprechende Flächenelement der Z-Ebene mit $d\Omega$ und setzt

$$(4) \qquad Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega}, \quad e^U = e^u \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Dann ist die Function U unabhängig von der Wahl der Function Z, welche auf dem algebraischen Gebilde als unabhängige Variable zu Grunde gelegt wird, und genügt der Differentialgleichung

$$(5) \qquad DU = 8e^U - \Phi,$$

wobei $\Phi = -D\log\frac{d\Omega}{d\omega}$ eine endliche bekannte Function ist. Wenn die Fuchs'sche Function von der ersten Art ist, ist auch die Function U auf der ganzen Klein'schen Fläche endlich; in den anderen Fällen wird man durch Transformation auf die verallgemeinerte Differentialgleichung:

$$(5a) \qquad DU = \Theta e^U - \Phi$$

geführt, wo U durchweg endlich ist und Θ eine bekannte, durchweg positive Function bedeutet. Der Verf. leitet nun zunächst einige Ungleichungen ab, die daraus folgen, dass im Falle des Maximums DU negativ, im Falle des Minimums DU positiv ist. Er beginnt sodann mit der Integration der Gleichung

$$(6) \qquad Du = \varphi,$$

wo φ eine gegebene Function bedeutet; diese Integration ist dann und nur dann ausführbar, wenn das über die Klein'sche Fläche erstreckte Integral $\int \varphi d\omega = 0$ ist. Er gründet hierauf die Integration der Gleichung

$$(7) \qquad Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi,$$

wo η, φ, ψ drei gegebene Functionen bedeuten, λ einen positiven Parameter, und η positiv ist. Diese Integration wird zuerst unter der Voraussetzung der Endlichkeit von η geleistet, sodann aber auch in dem Falle, welcher eintritt, wenn das Fundamentalpolygon Ecken auf dem Einheitskreise besitzt und die Function η hierdurch unendlich wie $\frac{1}{x^2 \log^2 x}$ wird; dem letzteren Falle ist der grösste und schwierigste Teil der Untersuchung gewidmet. Hiernach wird schliesslich die Integration der Gleichung

$$(8) \qquad Du = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi$$

vollzogen, wobei θ, φ, ψ bekannte positive Functionen bedeuten und λ einen positiven Parameter, zuerst für $\lambda = 0$, sodann für beliebiges positives λ. Die Gleichung (5a) kann somit integrirt werden, vorausgesetzt, dass das über die Klein'sche Fläche erstreckte Integral $\int \Phi d\omega > 0$ ist; es wird schliesslich gezeigt, dass diese Bedingung bei den Anwendungen auf die Fuchs'schen Functionen erfüllt ist. Lsg.

H. Poincaré. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. C. R. **126**, 627-630.

Mitteilung über die Untersuchungen des Verf., über welche im vorangehenden Referate berichtet ist. Lsg.

H. Bourget. Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens. Toulouse Ann. **12**, D 1-90.

Die Abhandlung, welche an eine Untersuchung Picard's anschliesst (C. R. **98**, 665 und 904, F. d. M. **16**, 95 und 447, 1884; Journ. de Math. (4) **1**, 87; F. d. M. **17**, 492, 1885), zerfällt in drei Teile. Im ersten Teile werden die linearen homogenen Substitutionen untersucht, welche die quadratischen quaternären Formen im allgemeinen und die Form $u_1^2 - Du_2^2 + u_3 u_4$ im besonderen in sich transformiren, und es wird der besondere Fall erörtert, dass die Substitution ganzzahlig ist. Die Gruppe der ganzzahligen Substitutionen, welche die Form

$u_1^2 - Du_2^2 + u_3 u_4$ in sich überführen, ist isomorph der Gruppe der linearen Transformationen der Function $\vartheta(0, 0 \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$, wenn $\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi+\eta}$, $\tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}$, $\tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi+\eta}$ gesetzt wird. Es wird im zweiten Teile gezeigt, dass diese Gruppe discontinuirlich ist für die Werte von $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, welche dem Gebiete S angehören, in dem ξ_2 und η_2 positiv sind, und dass sie sich aus fünf Fundamentalsubstitutionen zusammensetzen lässt. Die Gruppe bietet zahlreiche Analogien zur Modulgruppe dar und besitzt wie diese unendlich viele Untergruppen. Im dritten Teile endlich werden die entsprechenden Veränderungen der zehn geraden Thetafunctionen $\vartheta(0,0 \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ erörtert, und hieraus wird ein Verfahren abgeleitet, um unendlich viele bei den Substitutionen der Gruppe invariante Functionen herzustellen. Irgend drei dieser Functionen sind durch eine algebraische Gleichung verbunden. Die Moduln von Borchardt und die von Richelot sind gewissen Untergruppen der Gruppe gegenüber invariant. Lsg.

P. M. Pokrowsky. Abel's Theorem in neuer Form. Moskau Math. Samml. **20**, 299-315 u. Kiew Nachr. No. 5, 14 S.

Im § 1 wird die Abel'sche Abhandlung „Sur une propriété générale" etc. im wesentlichen recapitulirt. Im § 2 wird gezeigt, in welcher Beleuchtung der Satz von Abel bei Weierstrass erscheint; daraus folgt eine neue Form des Additionstheorems:

$$\Sigma_k \int_{\xi_k \eta_k}^{\xi_k' \eta_k'} \frac{\varphi_1(x, y)dx}{\varphi_2(x) f_y'(x, y)} = E_{x=\infty}\, F_1(x) - \Sigma m\, \frac{d^{m-1} F_2(a)}{da^{m-1}}.$$

$$(k = 1, \ldots, \mu)$$

Das Summationszeichen der rechten Seite wird auf alle (m_i-fachen) Wurzeln a_i der Gleichung $\varphi_2(x) = 0$ ausgedehnt; ausserdem ist

$$F_1(x) = \Sigma_h \frac{\varphi_1(x, y^{(h)})}{\varphi_2(x) f_y'(x, y^{(h)})} \log \frac{\Phi_1(x, y^{(h)})}{\Phi_2(x, y^{(h)})},$$
$$F_2(a) = \Sigma_h \frac{\varphi_1(a, \beta^{(h)})}{\varphi_2^{(m)}(a) f_y'(a, \beta^{(h)})} \log \frac{\Phi_1(a, \beta^{(h)})}{\Phi_2(a, \beta^{(h)})}, \quad \left\{ z = \frac{\Phi_1(x, y)}{\Phi_2(x, y)} \right\}.$$

§ 3 enthält Anwendungen des Additionstheorems auf Abel'sche Integrale in beliebiger kanonischer Form. Si.

A. P. Pszeborsky. Das Theorem von Abel. Kiew Nachr. No. 5, 7 S. (Russisch.)

Zunächst wird das Theorem in der geometrischen Form von Clebsch-Gordan bewiesen. Dann folgen einige specielle Voraussetzungen über das Integral $\int R(x, y)dx$. Wählt man als veränderliche

Curve einen Curvenbüschel, so kommt man bei complexen Werten der Parameter zu der Riemann-Weierstrass'schen Form des Theorems.
Si.

L. Fuchs. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Berl. Ber. 1898, 477-486.

Bilden $y_1, y_2, \dots, y_{2p}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung, der die Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung als Functionen eines Verzweigungswertes x genügen, und sind $y'_1, y'_2, \dots, y'_{2p}$ ihre Ableitungen nach x, so sind die Functionen $y_k y'_l - y_l y'_k$ Lösungen einer Differentialgleichung der Ordnung $p(2p-1)$, welche die $(2p-2)^{\text{te}}$ Associirte der ursprünglichen Gleichung heisst. Dass sie reducibel ist, hatte 1888 und 1889 für den Fall $p=2$ Fuchs selbst (F. d. M. **20**, 314, 1888; **21**, 305, 1889) und alsdann für den allgemeinen Fall sein Sohn Richard (F. d. M. **28**, 402, 1897) gezeigt, und zwar, indem durch Anwendung der von jenem aufgestellten Substitutionsgruppe der Gleichung für die Perioden die Existenz einer rationalen Lösung der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Associirten nachgewiesen wurde.

In der vorliegenden Abhandlung zeigt Fuchs, dass auch die $(2p-2)^{\text{te}}$ Associirte der Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, der die Perioden eines allgemeinen Abel'schen Integrals erster Gattung genügen, reducibel ist, und zwar wird, was sehr bemerkenswert ist und einen grossen Fortschritt bedeutet, der Beweis direct aus der Bestimmungsmethode für die Coefficienten jener Gleichung entnommen, die Fuchs 1897 entwickelt hatte (F. d. M. **28**, 403, 1897), so dass die Kenntnis der Substitutionsgruppe gar nicht erforderlich ist. Zum Schluss wird gezeigt, dass die Relationen, welche die Reducibilität ausdrücken, zu den Riemann'schen Gleichungen zwischen den Perioden der Abel'schen Integrale erster und zweiter Gattung führen. St.

H. Poincaré. Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions Abéliennes. Acta Math. **22**, 89-178.

Nach einem berühmten Satze von Weierstrass lässt sich jede $2n$-fach periodische Function von n complexen Variabeln als Quotient zweier Thetafunctionen darstellen, vorausgesetzt, dass die Function im Endlichen meromorph ist (den Charakter einer rationalen Function besitzt). In der vorliegenden umfangreichen Arbeit giebt der Verf. einen neuen Beweis dieses Satzes, dessen Hauptpunkte die folgenden sind:

1. Es sei F eine in einem $2n$-fach ausgedehnten Gebiete G holomorphe Function der complexen Variable $z_k = x_k + y_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Die Nullstellen von F bilden eine Mannigfaltigkeit von $2n-2$ Dimensionen, die mit C bezeichnet werde. Der reelle Teil von $\lg F$ heisse V. Es ist dann V eine Function der $2n$ reellen Variablen x_k, y_k, endlich und stetig im Gebiete G nach Ausschluss der Mannigfaltigkeit C; ferner genügt V den bekannten partiellen Differentialgleichungen, insbesondere

der Gleichung $\Delta V = 0$, die V als „harmonische Function" charakterisirt. Nach einem vom Verf. aufgestellten allgemeinen Satz über harmonische Functionen lässt sich V darstellen als Summe einer im Gebiete G holomorphen harmonischen Function und des Potentials der Mannigfaltigkeit C, wenn auf derselben die Dichte überall gleich 1 genommen wird.

2. Bezeichnet F eine im Endlichen meromorphe Function, so bilden die Nullstellen und die Unendlichkeitsstellen von F zwei Mannigfaltigkeiten C und C' von $2n-2$ Dimensionen, die sich in der Mannigfaltigkeit von $2n-4$ Dimensionen durchschneiden, welche von den ausserwesentlich singulären Stellen von F gebildet wird. In einer genügend kleinen Umgebung G einer beliebig angenommenen Stelle lässt sich F als Quotient $\frac{P}{Q}$ zweier gewöhnlichen Potenzreihen so darstellen, dass innerhalb G die Punkte von C und C' bezüglich durch die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ definirt werden. Wenn nun F $2n$-fach periodisch ist, so lässt sich in bekannter Weise der Raum von $2n$ Dimensionen in Periodenparallelepipeda $R_0, R_1, \ldots, R_k, \ldots$ einteilen. Das Stück der Mannigfaltigkeit C, welches in R_k liegt, heisse C_k, und es sei $V_k = \int\limits_{C_k} \frac{d\omega'}{r^{2n-2}}$ das Potential von C_k, wobei r den Abstand des Elementes $d\omega'$ der Mannigfaltigkeit C_k von dem Punkte $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ bedeutet. Bezeichnet U die Summe der Glieder nullter, erster und zweiter Dimension in der Entwickelung von $\frac{1}{r^{2n-2}}$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, und setzt man $S_k = \int\limits_{C_k} U d\omega'$, so erweist sich die Reihe $V = \sum\limits_k (V_k - S_k)$ als absolut convergent, wenn man die Punkte der Mannigfaltigkeit C ausschliesst. V ist daher ausserhalb C holomorph und harmonisch; ferner ist $V - V_k$ holomorph und harmonisch im Innern von R_k. Combinirt man hiermit den Satz unter 1., so folgt, dass $V - \lg |P|$ im Gebiete G ebenfalls holomorph und harmonisch ist. Aus der Definition von V geht leicht hervor, dass diese Function um eine lineare Function von $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ wächst, wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ um ein Periodensystem vermehrt werden.

3. Es gelingt nun, eine ganze Function zweiten Grades Z von $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ so zu bestimmen, dass $V - \lg |P| - Z$ den Differentialgleichungen des reellen Teiles einer analytischen Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ genügt. In bekannter Weise erhält man durch Integration eines exacten Differentials den zugehörigen imaginären Teil iT. Setzt man schliesslich $\varphi = V - \lg |P| - Z + iT$, so wird nun $P.e^{\varphi} = \Theta(z)$ eine im Endlichen überall holomorphe Function von $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

4. Genau in derselben Weise ergiebt sich eine Gleichung der Gestalt $Q.e^{\varphi'} = \Theta'(z)$ und hieraus

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{\Theta(z)}{\Theta'(z)} e^{H(z)},$$

wobei sich $H(z)$ als ein Polynom zweiten Grades herausstellt. Hiermit ist das Ziel erreicht; denn $\Theta(z)$ und $\Theta'(z)$ sind, wie man leicht erkennt, nichts anderes als Thetafunctionen.

Wir bemerken schliesslich noch, dass der Verf. in seiner Abhandlung mehrere interessante Untersuchungen über die Unstetigkeiten der Potentiale aufgenommen hat, Untersuchungen, die allerdings mit dem eigentlichen Ziele der Abhandlung nur in losem Zusammenhange stehen.

Hz.

T. Cazzaniga. Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico. Lomb. Ist. Rend. (2) **31,** 1065-1071.

Eine doppeltperiodische Function, die im Periodenparallelogramme eine endliche Zahl von wesentlich singulären Stellen besitzt, lässt sich als eindeutige Function der zugehörigen elliptischen Functionen (Sinusamplitudo, $\wp$-Function etc.) ansehen und als solche nach bekannten Sätzen von Weierstrass durch Summen von ganzen transcendenten Functionen oder durch ein unendliches Product von Primärfunctionen ausdrücken. Der Verf. führt dieses auf Grund einer Hermite'schen Idee näher aus.

Hz.

F. Schilling. Ueber die Theorie der symmetrischen S-Functionen mit einem einfachen Nebenpunkte. Math. Ann. **51,** 481-522.

Wiedergabe des Hauptinhalts der Habilitationsschrift des Verf., über welche wir im letzten Bande der Fortschritte S. 360 berichtet haben. Hz.

E. T. Whittaker. On the connexion of algebraic functions with automorphic functions. Lond. R. S. Proc. **63,** 267-268.

Auszug aus einer grösseren Abhandlung in Lond. Phil. Trans. **192,** über die im nächsten Jahrgange berichtet werden wird. Lp.

Weitere Litteratur.

C. Arzela. Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni analitiche. Nota. Bologna: Gamberini e Parmeggiani. 11 S. 8°.

J. E. Böttcher. Beiträge zur Theorie der Iterationsrechnung. Leipzig. 78 S. 8°.

G. Floquet. Sur une généralisation des fonctions périodiques. Nancy Bull. (2) **15,** 260-266.

H. Grönwall. Sur les fonctions qui ne satisfont à aucune équation différentielle algébrique. Stockholm. 9 S. 8°.

R. A. Harris. On harmonic functions. Amer. Assoc. **47**, 75-76.

P. J. Lopic. Das aus den primitiven Wurzeln der Einheit gebildete complexe Zahlensystem. Halle. 52 S. 8°. (1897).

A. Pringsheim. Erwiderung gegen Hrn. Lerch. Monatsh. f. Math. **9**, 46.

Vergl. das Ref. von Hz. in F. d. M. **28**, 357, 1897.

H. von Schaper. Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Diss. Göttingen. IX + 68 S. 8°.

Bericht auf S. 161 dieses Bandes.

H. W. Lloyd Tanner. A class of algebraic functions. Math. Gazette **13**, 152-155.

K. Weierstrass. Ueber das sogenannte Dirichlet'sche Princip. Ins Polnische übersetzt von S. Dickstein. Wiad. mat. **2**, 1-6.

S. Zaremba. Ueber das Dirichlet'sche Princip. Prace mat.-fiz. **9**, 131-138. (Polnisch.)

Vgl. F. d. M. **28**, 362-363, 1897.

Kapitel 2.
Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

A. Pringsheim. Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Münch. Ber. **28**, 1898, 325-337.

Der Verf. tritt der herrschenden Ansicht entgegen, dass Lambert den ersten Beweis für die Irrationalität von e und π, e^x und $\operatorname{tang} x$ (wo x eine rationale Zahl bedeutet) geführt, Legendre aber diesem Beweise erst die nötige Vollständigkeit und Strenge gegeben habe, und stellt folgende von ihm eingehend begründete Behauptungen auf:

„Die Irrationalität von e und e^2 ist schon von Euler im Jahre 1737, d. h. 30 Jahre vor Lambert, im wesentlichen bewiesen worden. Zugleich giebt auch Euler schon diejenigen allgemeinen Kettenbruchentwickelungen, auf denen der Lambert'sche, bez. Legendre'sche Irrationalitäts-Beweis für e^x, $\operatorname{tang} x$ und π beruht."

„Lambert hat, ohne diese Euler'schen Entwickelungen zu kennen, die Irrationalität von e^x, $\operatorname{tang} x$ und π vollständig und mit einer für die damalige Zeit (1767) geradezu exceptionellen Strenge bewiesen."

„Das Verdienst Legendre's beschränkt sich auf einen allerdings sehr glücklichen und an sich wertvollen, aber bei Legendre auf durchaus unbewiesener Grundlage ruhenden Gedanken, welcher keineswegs

eine Vervollständigung des angeblich unzulänglichen Lambert'schen Beweises, sondern lediglich eine mässige Abkürzung desselben liefert und ausserdem auch gestattet, den Irrationalitätsbeweis auf π^2 auszudehnen. Im übrigen ist Legendre von der klaren und tiefen Einsicht Lambert's, dass Betrachtungen der fraglichen Art ohne die nötigen Convergenz-Beweise eigentlich wertlos sind, sehr weit entfernt." Hau.

P. J. Breuer. Völliger Abschluss der Lehre über die gemeinen Logarithmen im Diesseits der Gymnasial-Mathematik. Pr. (No. 495) Progymn. Wipperfürth. 28 S. quer 4°.

Eine Einführung in die Lehre von den Briggs'schen Logarithmen, welche von Wunderlichkeiten strotzt: Logarithmus und zugehöriger Numerus werden als Neben- und Hauptzahl, der Briggs'sche Logarithmus einer Zahl wird als ihre goldene Nebenzahl bezeichnet, und für $\log a$ werden ganz unnötig zwei besondere Zeichen eingeführt. Alles übertrifft aber die zu Grunde gelegte Definition des Logarithmus, welche geradezu als ungeheuerlich bezeichnet werden muss und einen dem natur- und sinngemässen völlig entgegengesetzten Entwickelungsgang bedingt. Hoffentlich liegt die Abhandlung nirgends dem Schulunterricht zu Grunde; es könnten die Schüler, welche nach derselben sich mit der Lehre von den Logarithmen vertraut machen sollen, nicht genug bedauert werden. Hau.

H. Padé. Sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle. C. R. **127**, 444-446.

Zum Verständnis dieser Mitteilung ist die Kenntnis einer früheren Abhandlung des Verf.: „Sur la représentation approchée" (vgl. F. d. M. **24**, 360-361, 1892) nötig. Dort hatte er diejenigen irreducibeln rationalen Functionen $U(x)/V(x)$ betrachtet, welche eine gewöhnliche, für $x=0$ nicht verschwindende Potenzreihe y in der Nachbarschaft dieses Wertes mit möglichst grosser Annäherung darstellen. Als grundlegender Satz hatte sich ergeben, dass es unter allen Functionen $U(x)/V(x)$, deren Zähler vom Grade p, deren Nenner vom Grade q ist, nur eine einzige giebt, für welche die Entwickelung von $y-U(x)/V(x)$ mit einer möglichst hohen Potenz von x beginnt. Diese bestimmte Function $U(x)/V(x)$ nennt der Verf. die réduite (p,q), welche Bezeichnung sich wohl am besten durch Näherungsbruch (p,q) verdeutschen lässt. Für jede Potenzreihe y lässt sich dann eine Tafel solcher Näherungsbrüche herstellen, indem man in die p^{te} Spalte und q^{te} Zeile die diesen Werten p,q entsprechende Function $U(x)/V(x)$ einträgt.

In der vorliegenden Mitteilung untersucht der Verf. die Näherungsbrüche der Exponentialfunction $y=e^x$. Wachsen p und q (oder wenigstens eine dieser Zahlen) unbegrenzt, jedoch so, dass p/q sich einem bestimmten endlichen oder unendlich grossen Grenzwerte ω annähert, so convergiren Zähler und Nenner der Näherungsbrüche bez. gegen

$e^{\frac{\omega x}{\omega+1}}$ und $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$. Stellt man die Wertepaare (p, q) durch die Punkte einer Ebene dar, so bestimmt ω die asymptotische Richtung, in welcher man ins Unendliche fortschreiten muss, damit $U(x)$ und $V(x)$ gegen die obigen Grenzwerte convergiren. Hau.

A. Schaeffer. Abgekürztes Verfahren zur Berechnung der bekannten Näherungswerte der Zahl e. Hoffmann Z. **29**, 267-268.

Durch Berechnung der Näherungswerte von Kettenbrüchen für e. Lp.

A. Martin. A method of finding, without tables, the number corresponding to a given logarithm. Math. Mag. **2**, 237-240.

Ausgehend von der logarithmischen Reihe, leitet der Verf. für die zu einem gegebenen Logarithmus gehörende Zahl vier verschiedene Reihenentwickelungen ab, welche nach steigenden Potenzen einer linearen Function des gegebenen Logarithmus fortschreiten. Hau.

A. Féraud. Expression des coefficients du développement de $(1-x)^k \log^p(1-x)$. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 93-97.

Unter Berufung auf die in den Ann. de l'Observatoire de Bordeaux **7** veröffentlichte Dissertation, in der die Coefficienten der Entwickelung von $\log^p(1-x)$ nach Potenzen von x bestimmt sind, ermittelt der Verf. nach demselben Verfahren (Methode der unbestimmten Coefficienten und zweimalige Differentiation) jetzt die Coefficienten der Entwickelung von $(1-x)^k \log^p(1-x)$ nach Potenzen von x in der Form von Summen aus Producten von Binomialcoefficienten. Lp.

B. Sporer. Ueber goniometrische Relationen, die bei der Kreisteilung auftreten. Hoppe Arch. (2) **16**, 68-111.

Als cyklisch-symmetrische Function vom Grade p bezeichnet der Verf. die Summe

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} (x \sin\alpha_i - y \cos\alpha_i)^p,$$

wo $\alpha_i = \alpha + 2(i-1)\pi/n$ und α ein beliebiger Winkel ist, und untersucht die Function hauptsächlich für die drei Fälle: 1. p ungerade und $<n$, 2. $p = n$, 3. p gerade und $<2n$. Diesen drei Fällen entsprechend ergeben sich für F die Werte 0, $a \prod_{i=1}^{i=n} (x \sin\alpha_i - y \cos\alpha_i)$, $a(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}p}$, wo in den beiden letzten Fällen a eine Constante bezeichnet, welche man durch directe Vergleichung der Coefficienten leicht bestimmen kann. Aus den so erhaltenen drei Gleichungen lässt sich dann mit Leichtigkeit eine sehr grosse Anzahl von meist bekannten

goniometrischen Beziehungen ableiten. Einige von diesen benutzt der Verf., um verschiedene Reihen zu summiren, deren Glieder reciproke Potenzen ganzer Zahlen oder Quotienten von Binomialcoefficienten sind. Eine Anzahl von den goniometrischen Formeln gestattet elegante geometrische Anwendungen, wie der Verf. für die Ellipse, den Kreis und dessen Fusspunktencurve zeigt, für welche er eine Reihe von Sätzen ableitet.

Eine Schlussbemerkung deutet an, wie sich diese Betrachtungen und Entwickelungen für den Raum erweitern lassen. Hau.

H. Padé. Note sur la formule $\sin x = x\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. Nouv. Ann. (3) **17**, 312-314.

Es handelt sich um einen neuen Beweis dieser Formel für reelle Werte von x, welcher gegenüber den gewöhnlich gegebenen Beweisen sich durch besondere Einfachheit auszeichnet. Hau.

W. Mantel. De periodiciteit der goniometrische functies. Nieuw Archief (2) **3**, 279-282.

Der Verf. zeigt, wie man aus der Sinusreihe die Periodicität der Sinusfunction erschliessen und die Zahl π berechnen kann. Dass diese oder eine ähnliche Schlussweise schon früher von anderen Autoren gemacht ist und z. B. in Baltzer's Elementen der Mathematik für Schüler von Gymnasien dargestellt ist, scheint ihm unbekannt geblieben zu sein. In Bezug auf die beigefügten Bemerkungen betreffs der Natur der Zahl π, für welche Bemerkungen die Redaction des Nieuw Archief ausdrücklich die Verantwortung ablehnt, ist der schöne Aufsatz von Dedekind über Gleichungen mit rationalen Coefficienten im I. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung anzuführen. Lp.

W. J. C. Miller. Question 13727. Ed. Times **69**, 62-63.

Die Aufgabe verlangt die Lösung der Gleichung $\arccos(3/x)+\arccos(4/x)+\arccos(5/x)=\pi$. Dieselbe kommt, wie Ref. in seinen geometrischen Aufgaben zu den kubischen Gleichungen (1877) S. 9–11 bemerkt hat, bei vielen geometrischen Aufgaben vor. Die in Ed. Times von verschiedenen Verf. gegebene Lösung entbehrt der allgemeinen, leicht zu gebenden Discussion. Lp.

W. F. Sheppard. On the relations between Bernoulli's and Euler's numbers. Quart. J. **30**, 18-46.

Als Ausgangspunkt dient dem Verf. die Functionalgleichung:

$$F_n(x+1)+F_n(x-1)=2x^n.$$

Die algebraische Function von x, welche diese Gleichung befriedigt,

enthält als Coefficienten die Euler'schen und Bernoulli'schen Zahlen, und es lässt sich mit Hülfe der obigen Gleichung eine sehr grosse Anzahl von recurrirenden und independenten Formeln für diese Zahlen, bez. die Tangentencoefficienten ableiten. Die Formeln sind zwar sämtlich längst bekannt; die hier gegebene Ableitung derselben besitzt aber den Vorzug, dass alle diese Formeln von einem gemeinsamen Ausgangspunkte aus gewonnen werden, während bei den sonst üblichen Ableitungsarten für die einzelnen Formeln die verschiedensten Ausgangsbeziehungen benutzt werden müssen.

Die Art und Weise, in welcher der Verf. zu der obigen Functionalgleichung und ihrer algebraischen Lösung gelangt, ist nicht sehr befriedigend, da ihm hierzu bereits eine recht allgemeine Recursionsformel zwischen den Tangenten-Coefficienten und den Euler'schen Zahlen dient. Wäre diese Formel aber nicht aus anderen Entwickelungen bekannt, so würde wohl niemand darauf kommen, Zahlen durch eine so complicirte Formel zu definiren. Bei den Entwickelungen ist ausgiebiger Gebrauch von symbolischen Gleichungen und dem Rechnen mit diesen gemacht, was den meisten deutschen Lesern nicht allzu sehr zusagen dürfte.

Hau.

W. Mantel. Dilogarithmen. Nieuw Archief (2) **3**, 292-320.

Die Abhandlung enthält die Beantwortung der für 1897 von der wissenschaftlichen Gesellschaft zu Amsterdam gestellten Preisfrage No. 11: Es wird eine nähere Untersuchung der Function

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

verlangt, von der einige Eigenschaften angegeben sind von Landen (Math. Mem. 112), Legendre (Exerc. I, 241) und Abel (Oeuvres compl., nouv. éd. II, 189). Für diese Function, die durch zweimalige Integration rationaler Functionen erzeugt wird, führt der Verf. den Namen „Dilogarithmus" ein unter dem Zeichen $dl\,x$, und zwar setzt er:

$$-\psi(x) = dl x = \int_0^x \frac{dx}{x} \int_0^x \frac{dx}{1-x}.$$

Der Gang der Untersuchung, welche mit den Hülfsmitteln der neueren Functionentheorie durchgeführt wird, erhellt aus den folgenden Ueberschriften der einzelnen Abschnitte: Verschiedene Formen des Integrals, Reihenentwickelungen, Dilogarithmen complexer Zahlen, dilogarithmische Integrale, Wechselbeziehungen zwischen den drei kritischen Punkten 0, 1, ∞, Dilogarithmen einiger Zahlen, Dilogarithmus einer rationalen Function, Verbesserung der Hauptgleichung, Beispiele, andere Form für den Dilogarithmus einer rationalen Function. Von diesen Abschnitten sind die letzten die interessantesten, nämlich der über die Wechselbeziehungen und der über die Dilogarithmen rationaler Functionen. Die Wiedergabe der Einzelergebnisse würde jedoch zu viel Raum beanspruchen.

Lp.

J. H. Graf. Quelques notions sur la série hypergéométrique de Gauss. Batt. G. **36**, 233-261.

Der Inhalt der Arbeit wird durch die folgenden Paragraphenüberschriften genügend skizzirt:

1. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(x)$.
2. Directe Ableitung von particularen Integralen dieser Differentialgleichung.
3. Beziehungen zwischen $F(x)$, $F(1-x)$ und $F[(2x-1)^2]$.
4. Beziehungen zwischen der hypergeometrischen Reihe, der Kugelfunction X_n und der Bessel'schen Function $\overset{n}{J}(x)$.
5. Beziehungen zwischen der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe und einer Differentialgleichung erster und einer solchen dritter Ordnung.
6. Einige Beispiele von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung durch hypergeometrische Reihen gegeben wird.

Die zum Teil recht eleganten Entwickelungen beruhen, wie der Verf. mitteilt, auf Andeutungen, welche ihm von seinem verstorbenen Lehrer L. Schläfli gemacht worden sind; daher will der Verf. auch die nicht zahlreichen neuen Resultate, welche in der Abhandlung enthalten sind, als geistiges Eigentum Schläfli's betrachtet wissen. Unverständlich ist dem Ref. nur, warum in den ersten vier Paragraphen für die dort vorkommenden totalen Differentialquotienten das partielle Differentiationszeichen ∂, in den letzten zwei Paragraphen aber das gewöhnlich gebrauchte Zeichen d benutzt worden ist. Hau.

J. Beaupain. Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Belg. Mém. S. E. **56**, 52 S.

In mehreren vorangehenden Abhandlungen hat Beaupain bewiesen, dass für $m > n$ die hypergeometrische Gleichung $E(n, m)$:

$$x^{n-1}D^n y + L_1 x^{n-2} D^{n-1} y + \cdots + L_{n-1} Dy = x^m D^m y + \cdots + K_m y$$

so beschaffen ist, dass Substitutionen, wie

$$y = \int f_1(x, u, V_1) du, \quad y = \int f_2(x, u, V_2) du,$$

in denen f_1 und f_2 passend gewählt sind, V_1 und V_2 bezw. als Lösungen von Gleichungen $E(n-1, n-1)$, $E(n-1, n-2)$ bestimmen. — In der gegenwärtigen Abhandlung bestimmt er die Constanten der reducirten Gleichungen und findet die nicht logarithmischen Hauptlösungen von $E(n, m)$. In seinen vorangehenden Abhandlungen hatte er den Fall $m = 0$ behandelt. — Er wendet diese Ergebnisse auf die Gleichungen $D^n y = yx^p$ und $D^n y = y(x^p + B/x^n)$ an, die er auf die Form $E(n, 0)$ bringt. — Die Abhandlung enthält noch manche anderen interessanten Ergebnisse, die aber von speciellerer Art sind.

Mn. (Lp.)

Weitere Litteratur.

Bondieu. Note sur la multiplication et la division des arcs. Revue de math. spéc. **9**, 33-34.

W. Fuhrmann. Beiträge zur Transformation algebraisch-trigonometrischer Functionen. Königsberg. 12 S. 4°.

R. Herrmann. Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen. Gotha: E. F. Thienemann. 63 S. gr. 8°. Hau.

W. Heymann. Ueber hypergeometrische Functionen, deren letztes Element speciell ist, nebst einer Anwendung auf Algebra. Chemnitz. 44 S. 4°.

G. Landsberg. Sur un nouveau développement de la fonction Gamma qui contient la série de Stirling et celle de Kummer. Belg. Mém. cour. in 8° **55**, 28 S.

P. Mansion. Rapport. Belg. Bull. (3) **33**, 9-17.

Vergl. F. d. M. **28**, 378, 1897. Mn.

Hj. Mellin. Ueber hypergeometrische Reihen höherer Ordnungen. Acta Soc. Fennicae **23**, No. 7, 10 S.

F. Mertens. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. Prace mat.-fiz. **9**, 28-45. (Polnisch.)

Vergl. F. d. M. **27**, 329, 1896.

Max Meyer. Katechismus der Logarithmen. 2. Aufl. VIII + 181 S. 12°. (Weber's illustrirte Katechismen. No. 93.)

H. Padé. Note sur la formule $(1+1/m)^m = e \quad (m=\infty)$. Revue de math. spéc. **8**, 481-482.

B. Elliptische Functionen.

J. Tannery, J. Molk. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome III. Calcul intégral (1re partie). Théorèmes généraux. — Inversion. Paris: Gauthier-Villars et Fils. VIII + 267 S. gr. 8°.

In Bezug auf die beiden ersten Bände des Werkes verweisen wir auf die Anzeigen derselben in F. d. M. **25**, 758, 1893 und **27**, 335, 1896. Die dort von ihnen gerühmten Vorzüge sind auch in diesem neuen Bande wieder zu finden, ebenso aber auch die ebenda angedeuteten Mängel, hauptsächlich in der Nichtberücksichtigung der neueren deutschen Litteratur mit ihren geometrischen Deutungen bestehend.

In dem Eingangsparagraphen geben die Verf. die Gedanken an, welche bei der von ihnen getroffenen Einteilung des Stoffes massgebend gewesen sind. Die meisten der in dem ersten Teile des Werkes erlangten Resultate, die von ihnen unter den Namen der Differentialrechnung eingestellt sind, wurden aus der Definition der Function σu mittels analytischer Identitäten abgeleitet, die sich nach Aufstellung dieser Definition gewissermassen von selbst darbieten. Nur an einigen Stellen sind Abweichungen von diesem Wege durch Hinzunahme von

Integralsätzen zu verzeichnen gewesen. Von jetzt an wird ein anderes Verfahren innegehalten. Einige Sätze aus der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen werden benutzt, um rasch die Hauptsätze betreffs der doppeltperiodischen Functionen abzuleiten. Der von Liouville geschaffene Zugang zur Theorie der elliptischen Functionen nach dem von Borchardt veröffentlichten Collegienhefte aus dem Jahre 1847 und die von Cauchy entwickelte Residuenrechnung in ihrer Anwendung auf die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen sind die Angelpunkte, um welche sich die Betrachtungen des vorliegenden Bandes drehen. In einer den Verf. eigentümlich angehörenden Methode gelangen sie durch Anwendung der grundlegenden Sätze von Cauchy über die Integrale zwischen imaginären Grenzen auf die vorliegende Theorie, unter anderem auch zu den von Liouville aufgestellten allgemeinen Sätzen. Als Vorläufer auf diesem Gedankengange wird von ihnen eine von Hermite gefundene wichtige Formel genannt, die dieser Altmeister der mathematischen Forschung in einer Note über die Theorie der elliptischen Functionen gegeben hat, welche der sechsten Auflage des Traité de calcul différentiel et intégral von Lacroix angehängt ist. In der neuesten (5.) Ausgabe des Cours de calcul différentiel et intégral von J. A. Serret (1900), der gleichfalls am Ende des zweiten Bandes eine Note sur la théorie des fonctions elliptiques von Hermite hinzugefügt ist, findet sich diese Formel auf S. 876-878 entwickelt mit der Bemerkung: „Somit besitzt man den Ausdruck der doppeltperiodischen Functionen unter einer ähnlichen Form wie die Partialbruchzerlegung der rationalen Functionen." Aus diesem Grunde wird dieser Formel von den Verf. der Name „Zerlegungsformel" beigelegt. Wenn man die in dem vorliegenden Bande zuerst aufgestellten Sätze zum Ausgangspunkte der ganzen Betrachtung nimmt, so gelangt man zu dem Gange, dem Briot und Bouquet in den beiden Ausgaben ihres Traité des fonctions elliptiques gefolgt sind.

Im übrigen genüge das nachfolgende Inhaltsverzeichnis zur näheren Kennzeichnung der abgehandelten Gegenstände.

Allgemeine Lehrsätze. Kapitel I. Anwendungen des Cauchy'schen Theorems über die Integration einer Function einer imaginären Veränderlichen. Erste Anwendungen des Cauchy'schen Theorems. Zerlegung der doppeltperiodischen Functionen in einfache Elemente. Doppeltperiodische Functionen zweiter Art. Zerlegung dieser Functionen in einfache Elemente. Doppeltperiodische Functionen dritter Art. Andere zur Darstellung der doppeltperiodischen Functionen geeignete Ausdrücke. Kap. II. Anwendungen der Formel zur Zerlegung in einfache Elemente. Die Functionen σ, ζ, $\wp$. Die Functionen ξ, sn, cn, dn. Entwickelung von $\wp u$ in eine Potenzreihe. Ausdruck der Ableitungen von $\wp u$ und von $\wp(u-a)$ mittels der Potenzen von $\wp u$. Linearer Ausdruck der Potenzen von $\wp u$ mit Hülfe der Ableitungen von $\wp u$. Potenzreihenentwickelungen der Function ξ, sn$u$, cn$u$, dn$u$. Lineare Ausdrücke der Ableitungen dieser Functionen vermittelst der Potenzen derselben. Lineare Ausdrücke der Potenzen der Functionen ξ, sn$u$, cn$u$, dn$u$

vermittelst der Ableitungen dieser Functionen. Anwendung der Landen'schen Transformation auf die Entwickelung der Function cn in eine Potenzreihe. Anwendung der Methode der Zerlegung in einfache Elemente auf die Jacobi'schen Functionen. Kap. III. Fortsetzung der allgemeinen Lehrsätze. Kap. IV. Addition und Multiplication. Additionstheoreme für die Function $\wp u$. Multiplication für die Function $\wp u$. Additionstheoreme für die Functionen ξ, sn, cn, dn. Kap. V. Entwickelungen in trigonometrische Reihen. Entwickelung von $\log \vartheta(v)$, seiner Ableitungen und der gewöhnlichen doppeltperiodischen Functionen. Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. Entwickelungen der Grössen e_a, η_a, k, K, E, ... in Reihen nach q. Kap. VI. Integrale der doppeltperiodischen Functionen. Geradlinige Integrale längs einer Strecke, die zwei nach den Moduln $2\omega_1$, $2\omega_3$ congruente Punkte verbindet. Integration längs eines beliebigen Weges. Allgemeiner Fall. Zweite, nur auf den normalen Fall passende Methode.

Umkehrung. Kap. VII. Gegeben k^2 oder g_2, g_3; zu finden τ oder ω_1, ω_3. Das gestellte Problem gestattet eine Lösung, und aus dieser Lösung kann man alle anderen herleiten. Betrachtung des Integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi/\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ als Function von k. Wirkliche Berechnung von τ, ω_1, ω_3. Kap. VIII. Umkehrung der doppeltperiodischen Functionen zweiter Ordnung, insbesondere der Function sn. Darstellung der inversen Function von sn$u$ durch ein bestimmtes Integral. Auswertung von u, wenn man sn$u$ oder $\wp u$ kennt. Lp.

L. Lévy. Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec tables numériques et applications. Paris: Gauthier-Villars et Fils. VIII + 237 S. 8°.

Im Laufe der letzten 25 Jahre hat die Stellung der Mathematiker zum Imaginären eine bemerkenswerte Aenderung erfahren. Nachdem die complexen Grössen in der Arithmetik (Gauss) und in der Functionentheorie (Cauchy, Abel und Jacobi) sich als unentbehrlich erwiesen hatten, haben sie ihren siegreichen Einzug in alle Gebiete der Mathematik gehalten, und ihre Einführung hat überall die grössten Fortschritte zur Folge gehabt; man denke etwa an Sophus Lie's Untersuchungen über die Minimalflächen und an seine Berührungstransformation, welche die Kugeln in die geraden Linien verwandelt. Es lässt sich jedoch nicht verkennen, dass die neu gewonnene Erkenntnis häufig zu einer Ueberschätzung des Imaginären führte, so dass selbst Geometer die Discussion der Realitätsfragen, also den Rückgang zu den Thatsachen der Anschauung, unterliessen und fast das Gefühl für den principiellen Unterschied zwischen Reell und Imaginär verloren. Dem gegenüber ist allmählich, bei aller Anerkennung des Wertes der imaginären Grössen, die Realität wieder zu ihrem Rechte gekommen. Das gilt nicht bloss

für die Geometrie, sondern auch für die Analysis. Man erinnere sich nur etwa an die schönen Arbeiten über die Integration von Differentialgleichungen im reellen Gebiete, mit denen neuerdings die Analysis bereichert worden ist.

Dieselbe Tendenz hat auch das Buch über elliptische Functionen, das Lucien Lévy verfasst hat. Es lässt sich im Vergleich zu den Werken über denselben Gegenstand, die in den letzten Jahren erschienen sind, durch die ausführliche Behandlung der Realitätsfragen charakterisiren. Im engsten Zusammenhange damit steht die Anwendung der elliptischen Functionen auf Geometrie und Mechanik, die durch geschickt gewählte und elegant gelöste Aufgaben erläutert wird; ihnen ist fast ein Drittel des Buches gewidmet. Schon diese Angaben lassen erkennen, dass das vorliegende Werk eine gute Einführung in Halphen's grossen Traité bildet, der dem Verf. in mancher Hinsicht zum Vorbild gedient hat, von dem es sich aber dadurch wesentlich unterscheidet, dass die Thetafunctionen mit complexen Argumenten den Ausgangspunkt bilden.

Dass der Verf. bei den Anwendungen der elliptischen Functionen bis zur numerischen Berechnung vordringt, verdient besondere Anerkennung, denn nur auf diesem Wege ist zu erhoffen, dass die elliptischen Functionen eine Bedeutung für die Praxis gewinnen und in der Physik und Technik die Dienste leisten, zu denen sie schon lange berufen waren. Um die Rechnungen zu erleichtern, hat der Verf. vier Tafeln beigegeben, von denen die erste die Werte der vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung, die zweite und dritte die Integrale erster und zweiter Gattung, die vierte die Werte von $\log q$, jedesmal auf fünf Decimalstellen, angiebt. Die Tafeln II und III sind ein Auszug aus den sechsstelligen Tafeln von Legendre, die leider sehr schwer zugänglich sind. Es ist dringend zu wünschen, dass die „Tafelcommission" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für ihren Wiederabdruck sorgt; denn wie nützlich sie, auch in der Weierstrass'schen Theorie, sein können, das zeigen die Ausführungen im Kapitel VI des vorliegenden Buches. St.

Al. Wassilieff. Bericht über das Werk von Prof. M. A. Tichomandritzky „Theorie der elliptischen Functionen und elliptischen Integrale". St. Petersb. Denkschr. (S) **6**, No. 9, 42 S. 4°. (Russisch.)

Ausführlicher Bericht, dem zufolge dem Werke von M. A. Tichomandritzky der Bouniakowsky-Preis zuerkannt wurde. Si.

S. Petrowitsch. Versuch einer elementaren Theorie der Weierstrass'schen Functionen $\wp u$, ζu und σu, nebst einer Abhandlung über die elliptischen Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. Moskau. VII + 151 S. (Russisch.)

Zur Aufstellung der wichtigsten Eigenschaften der Weierstrass'schen Function $\wp u$ wird die Curve (1) $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ betrachtet, deren imaginäre Punkte in der zur xy-Ebene senkrechten

Ebene gedeutet werden. Die Fälle $\varDelta > 0$, $\varDelta < 0$ ($\varDelta$ Discriminante der rechten Seite von (1)) werden einzeln betrachtet. Einige Eigenschaften der Curve (1), die Erklärung und die Fundamentaleigenschaften von $\wp u$ und $\wp' u$ reellen Argumentes, das Additionstheorem für $\wp u$ in diesem Falle, $\wp u$ und $\wp' u$ bei rein imaginärem Argumente, die doppelte Periodicität, die Unendlichkeitsstellen von $\wp u$ und $\wp' u$ etc. bilden den Inhalt der beiden ersten Kapitel (I. $\varDelta > 0$, II. $\varDelta < 0$). Im Kap. III werden die allgemeinen Eigenschaften discutirt: Modul und Multiplicator, absolute Invariante, Reduction der elliptischen Integrale, Umkehrung von $\int dx/\sqrt{X}$ und Reihenentwickelungen in unendliche einfache und Doppel-Reihen. — Kap. IV behandelt die Functionen ζu und σu, deren Zusammenhang mit $\wp u$, Reihenentwickelungen, Perioden, dreigliedrige Gleichung, Ausartungen. — Das letzte Kap. V giebt die Erklärungen der Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ und deren Zusammenhang mit $\wp u$.

Si.

E. Jaggi. Sur les fonctions elliptiques de première espèce. Nouv. Ann. (3) **17**, 367-385.

Als „elliptischen Sinus und Cosinus" bezeichnet der Verf. die Functionen:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H}{\Theta} = \sin \operatorname{am} x,$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1}{\Theta_1} = \frac{\cos \operatorname{am} x \,.\, \sin \operatorname{coam} x}{\varDelta \operatorname{am} x},$$

indem folgende Analogien mit den Kreisfunctionen $\sin x$ und $\cos x$ stattfinden, auf die jene sich für $k = 0$ reduciren:

1. Zwischen u^2 und v^2 besteht die bilineare Relation
$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2.$$
2. Es ist $u(0) = 0$, $v(0) = 1$.
3. u und v bleiben ungeändert, wenn man x beziehungsweise durch $4mK + 2niK' + x$ oder $2(2m+1)K + 2niK' - x$ und durch $4mK + 2niK' \pm x$ ersetzt, während bei $\sin \frac{\pi x}{2K}$ und $\cos \frac{\pi x}{2K}$ dasselbe für $K' = 0$ stattfindet.
4. Es ist $u(K \pm x) = v(x)$, $v(K \pm x) = \mp u(x)$.
5. u und v genügen beide derselben Differentialgleichung
$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2).$$
6. Es gelten die Additionstheoreme
$$u(x+a) = \frac{u(x)\,v(a) + u(a)\,v(x)}{1 + k^2 u(x)\,v(x)\,u(a)\,v(a)},$$
$$v(x+a) = \frac{v(x)\,v(a) - u(x)\,u(a)}{1 + k^2 u(x)\,v(x)\,u(a)\,v(a)},$$

die für $k=0$ in die Additionstheoreme für $\sin x$ und $\cos x$ übergehen.

Gewiss sind diese Analogien recht beachtenswert. Allein wenn der Verf. sagt, man solle die Functionen $u(x)$ und $v(x)$ zu den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen machen, da diese Wahl grosse Vereinfachungen bei den Anwendungen und bei der Theorie, besonders bei der Berechnung und dem Gebrauch numerischer Tafeln, herbeiführen werde, so möchte der Referent bemerken, dass die Theorie der elliptischen Functionen doch nicht ausschliesslich unter dem Gesichtspunkte der Analogie mit den Kreisfunctionen behandelt werden darf, und dass, was vielleicht nach der einen Seite durch die Einführung von $u(x)$ und $v(x)$ gewonnen würde, auf der anderen Seite verloren gehen müsste.

St.

P. Mansion. Sur la théorie des fonctions elliptiques. Brux. S. sc. **22** A, 90-91.

Ein Lehrsatz, der die Ausdehnung der Abel'schen Darstellungsart auf den Fall ermöglicht, in welchem der Modul imaginär ist. [Der Verf. hat hinzuzufügen vergessen, dass man das Argument des Moduls immer als zwischen 0 und π liegend annehmen kann, weil der Modul und sein Complement sich vertauschen lassen.] Mn. (Lp.)

M. Lerch. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Monatsh. f. Math. **9**, 177-183.

Um die bereits von Jacobi gegebene und später von Hermite und Kronecker aufs neue abgeleitete Entwickelung der elliptischen Function

$$\frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)}$$

in die trigonometrische Reihe

$$\pi.\Sigma\,\frac{e^{\lambda u\pi i}}{\sin\pi(v+\frac{1}{2}\lambda\tau)}\qquad(\lambda=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots)$$

auf directem Wege zu erhalten, berechnet der Verf. die Integrale:

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(v)}\int_0^1\frac{\vartheta_1(x+v)}{\vartheta_0(x)}\,e^{-\lambda x\pi i}dx.$$

Dabei werden ausser den elementaren Eigenschaften der Thetafunctionen nur die Formeln benutzt:

$$\vartheta_0\left(u+\frac{\tau}{2}\,\Big|\,\tau\right)=i.e^{-(u+\frac{1}{4}\tau)\pi i}.\vartheta_1(u|\tau),$$

$$\vartheta_1\left(u+\frac{\tau}{2}\,\Big|\,\tau\right)=i.e^{-(u+\frac{1}{4}\tau)\pi i}.\vartheta_0(u|\tau).$$

St.

M. Lerch. Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme. Fribourg. 12 S. 8°. Abgedruckt in Prace mat.-fiz. **10,** 1-7. (Warschau, 1899.)

Es handelt sich um die transcendente Function $R(w,s)$, die für Werte von s, deren reeller Teil grösser als eins ist, durch die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}$$

definirt wird. Zunächst wird gezeigt, dass

$$G(w,s) = R(w,s) - \frac{1}{s-1}$$

eine ganze transcendente Function von s ist, so dass sich $R(w,s)$ für alle endlichen Werte von s, ausser $s=1$, regulär verhält. Dann ergiebt sich, dass

$$G(w,1) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}$$

ist, und endlich werden in der Entwickelung von $R(w,s)$ nach Potenzen von s die beiden ersten Coefficienten berechnet. Es folgen Anwendungen auf die Theorie der Euler'schen Integrale, die erkennen lassen, dass die vorhergehenden Sätze, zu denen der Verf. bereits in seinen Untersuchungen über die Malmstén'schen Reihen gelangt war, einen directen und bequemen Weg zu der Theorie der Gammafunction eröffnen. St.

A. Hurwitz. Ueber die Entwickelungscoefficienten der lemniskatischen Functionen. Math. Ann. **51,** 196-226.

Ausführliche Herleitung von Sätzen, die der Verf. bereits 1897 in den Göttinger Nachrichten mitgeteilt hatte, und über die in F. d. M. **28,** 393-394, 1897, ausführlich berichtet worden ist. St.

B. Igel. Zur Theorie der Zweiteilung elliptischer Functionen. J. für Math. **119,** 50-64.

Es handelt sich darum, bei einigen Transformirten der elliptischen Functionen, die Hermite durch die Combination der beiden quadratischen Transformationen

$$\begin{pmatrix} u, & (1+k')u \\ k, & \dfrac{1-k'}{1+k'} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u, & (1+k)ui \\ k, & \dfrac{1-k}{1+k} \end{pmatrix}$$

hergestellt hat, die vier Werte der Zweiteilung rational durch die elliptischen Functionen darzustellen, was Hermite selbst nur für einen der vier Werte durchgeführt hatte. Ein zweiter Wert folgt allerdings sofort aus dem ersten; aber die Ermittelung des dritten und vierten erfordert, dass Abel's Formeln für die lineare algebraische Transformation zu Hülfe genommen werden. Bei dieser Gelegenheit werden einige Fehler

in den Formeln Enneper's verbessert, die sich auf Abel's lineare Transformation beziehen. St.

E. Lacour. Sur une transformation de fonctions elliptiques qui correspondent à un module imaginaire. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15,** 455-462.

Bekanntlich ist $\wp u$ eine rationale Function von $\mathrm{sn}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u)$ mit dem Modul

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}},$$

der im Falle negativer Discriminante notwendig imaginär ausfällt. Um $\wp u$ auf elliptische Functionen mit reellem Modul zurückzuführen, setzt der Verf.:

$$e_2-e_3=\varrho(\cos\psi+i\sin\psi),\quad e_2-e_1=\varrho(\cos\psi-i\sin\psi)$$

und findet alsdann:

$$\wp u=e_2+\varrho\,\frac{(1+\mathrm{cn}\,(2u\sqrt{\varrho}))^2}{\mathrm{sn}^2(2u\sqrt{\varrho})},$$

wo der Modul gleich $l=\sin\frac{1}{2}\psi$ ist. Gleichzeitig ergiebt sich hieraus im Gebiete der Jacobi'schen Theorie eine Transformation von dem imaginären Modul k zu dem reellen Modul l, die eingehend untersucht wird.

Es möge noch bemerkt werden, dass genau dieselbe Formel für $\wp u$ auch in dem etwa gleichzeitig erschienenen Werke von Lucien Lévy (vergl. diesen Band S. 381) abgeleitet wird. St.

A. Lodge. Simple approximations to the complete elliptic integrals of the first and second kinds. Messenger (2) **28,** 19-28.

Sind $F_1(k)$ und $E_1(k)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung zum Modul k, und setzt man $A=\sqrt{1-k^2}$, $B=\sqrt{1-\frac{1}{2}k^2}$, so hat man angenähert:

(I) $F_1(k)=\frac{1}{4}(1+2B^{-1}+A^{-1}).\frac{1}{2}\pi,\quad E_1(k)=\frac{1}{4}(1+2B+A).\frac{1}{2}\pi.$

Ferner für $C_1=\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{6}\pi},\ C_2=\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{3}\pi}$:

(II) $$\begin{cases} F_1(k)=\frac{1}{6}(1+2C_1^{-1}+2C_2^{-1}+A^{-1})\cdot\frac{1}{2}\pi,\\ E_1(k)=\frac{1}{6}(1+2C_1+2C_2+A)\cdot\frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Endlich für $D_1=\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{1}{8}\pi},\ D_2=\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{3}{8}\pi}$:

(III) $F_1(k)=\frac{1}{2}(D_1^{-1}+D_2^{-1})\cdot\frac{1}{2}\pi,\quad E_1(k)=\frac{1}{2}(D_1+D_2)\cdot\frac{1}{2}\pi.$

Die Formeln (I) und (III) reichen bis einschliesslich zu den Gliedern mit k^6, (II) bis k^{10}, die folgenden dagegen bis k^{14}:

(IV) $$\begin{cases} F_1(k)=\frac{1}{8}(1+2D_1^{-1}+2B^{-1}+2D_2^{-1}+A^{-1})\cdot\frac{1}{2}\pi,\\ E_1(k)=\frac{1}{8}(1+2D_1+2B+2D_2+A)\cdot\frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Lp.

D. Edwardes. Question 7767. Ed. Times 68, 119-120.

Sind K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so ist

$$\int_0^{2K} \frac{u\,du}{\mathrm{dn}^2 u} = \frac{2}{k_1^2} KE, \quad \int_0^{2K} \frac{u\,du}{\mathrm{dn}^3 u} = \frac{\pi}{2k_1^3}(1+k_1^2)K,$$

$$\int_0^{2K} \frac{u\,du}{(\mathrm{dn}\,u)^{2m}} = \frac{2K}{k^{2m}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2m-1)},$$

wo k der Modul ist, $k_1^2 = 1-k^2$, m eine positive ganze Zahl. Beweise dieser Formeln von H. W. Curjel. Lp.

O. Bolza. Zur Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades. Math. Ann. 50, 314-324.

O. Bolza. Zur Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische mittels einer Transformation dritten Grades. Nachtrag. Math. Ann. 51, 478-480.

Wenn ein hyperelliptisches Integral erster Gattung vom Geschlechte $p=2$ durch eine rationale Transformation k^{ten} Grades auf ein elliptisches Integral zurückgeführt werden kann, so giebt es nach dem Weierstrass-Picard'schen Satze über die Perioden reducirbarer Integrale stets ein zweites zu derselben Irrationalität gehöriges Integral erster Gattung, welches durch eine Transformation desselben Grades auf ein elliptisches Integral reducirbar ist. So leicht aber auf dem transcendenten Wege die Existenz dieses zweiten Integrals erkannt wird, so mühsam ist bei der algebraischen Behandlung des Reductionsproblems die wirkliche Aufstellung des zweiten reducirbaren Integrals, nachdem das erste bereits gefunden ist.

Für $k=3$ hat Goursat (F. d. M. 17, 466, 1885) diese Schwierigkeit überwunden, indem er das binäre Coordinatensystem für die Variable $x_1 : x_2$ des hyperelliptischen Integrals so wählte, dass in der reducirenden Transformation dritten Grades sowohl im Zähler als im Nenner das Glied mit $x_1^2 x_2$ fehlte. Er fand dann für das hierdurch reducirbare Integral die Form

$$\int \frac{x_2 \,.\, (x\,dx)}{\sqrt{(x_1^3+ax_1x_2^2+bx_2^3)(x_1^3+px_1^2x_2)+qx_2^3)}}$$

mit der Bedingung $q = 4b + \frac{4}{3}ap$ und erhielt hieraus das zweite reducirbare Integral durch die Bemerkung, dass die Function unter der Quadratwurzel und die Bedingungsgleichung unverändert bleiben, wenn man x_1 mit x_2 vertauscht und gleichzeitig a, b, p, q beziehungsweise durch p/q, $1/q$, a/b, $1/b$ ersetzt. „Die Ableitung des zweiten Integrals aus dem ersten gelingt aber lediglich mittels eines Kunstgriffs, der wesentlich von dem gewählten Coordinatensysteme abhängt, ohne dass

man jedoch einen Einblick in den inneren Zusammenhang erhält, da Goursat nicht angiebt, wie er zur Wahl seines Coordinatensystems gelangt ist. Insbesondere bleibt der Zusammenhang zwischen dem gewählten Coordinatensysteme und dem Zähler des zweiten Integrals unaufgeklärt."

Der Verf. versucht nun, dem hierin liegenden Mangel, an dem übrigens auch seine eigene für $k=4$ gegebene Lösung leidet (F. d. M. **18**, 407, 1886 und **19**, 477, 1887), abzuhelfen, indem er unabhängig von der Goursat'schen Lösung und ohne Benutzung eines speciellen Coordinatensystems auf Grund von bekannten Sätzen über kubische Involutionen (F. d. M. **28**, 398, 1897) das erste reducirbare Integral aufstellt, daraus die Existenz des zweiten nachweist und endlich den Zähler des zweiten Integrals bestimmt.

Dabei dient als Grundlage der Satz: Deutet man die sechs Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ geometrisch durch sechs Punkte eines Kegelschnitts, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines zur Irrationalität

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)}$$

gehörigen, durch eine Transformation dritten Grades auf ein elliptisches Integral reducirbaren Integrals erster Gattung darin, dass es einen Kegelschnitt giebt, der durch drei der Punkte hindurchgeht und gleichzeitig dem Dreieck der drei übrigen eingeschrieben ist; es giebt dann stets auch einen zweiten Kegelschnitt, der dem Dreieck der ersten drei Punkte eingeschrieben ist und durch die zweiten drei Punkte hindurchgeht. In einem Nachtrage macht der Verf. darauf aufmerksam, dass dieser Satz bereits 1894 von Humbert ausgesprochen und bewiesen worden war. St.

R. Bricard. Note sur une propriété des fonctions elliptiques du second ordre. S. M. F. Bull. **26**, 91-98.

Theorem: Ist $f(z)$ eine elliptische Function zweiter Ordnung und 2ω eine Periode von $f(z)$, so genügen die n Ausdrücke

$$t_0=f(z),\quad t_1=f\left(z+\frac{2\omega}{n}\right),\quad \ldots,\quad t_{n-1}=f\left(z+\frac{n-1}{n}2\omega\right)$$

einer Gleichung der Form $P(\theta)+\lambda(z)\,Q(\theta)=0$, in der $P(\theta)$ und $Q(\theta)$ zwei Polynome n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten bezeichnen.

Geometrische Anwendung: Giebt es ein n-Eck, welches einem Kegelschnitte C eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitte C' umgeschrieben ist, so giebt es nach Poncelet unzählig viele n-Ecke dieser Art. Aus dem Theorem ergiebt sich als der geometrische Ort des Schwerpunktes der mit gleichen Massen belegten Ecken wieder ein Kegelschnitt, der zu C ähnlich und ähnlich liegend ist.

St.

L. Schlesinger. Ueber die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunction. Berl. Ber. 1898, 346-360.

Zu der Theorie der elliptischen Modulfunctionen führen verschiedene Wege. Man kann von den der Theorie der elliptischen Functionen entnommenen Darstellungen des Moduls k^2 durch die Nullwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen ausgehen, oder die Legendre'sche Differentialgleichung für K und K' zu Grunde legen, oder auch, wie der Referent hinzufügen möchte, mit der conformen Abbildung von Kreisbogendreiecken beginnen. Während man hierbei umfangreiche Theorien zur Hülfe heranziehen muss, bietet die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels eine Methode, die direct von dem vollständigen Integral erster Gattung zu jenen Darstellungen von k^2 führt, und zwar stellt sich heraus, dass diese Methode im engsten Anschluss an die von Schering veröffentlichten Fragmente von Gauss' Nachlass entwickelt werden kann; nur an zwei Stellen müssen Lücken ergänzt werden. So erweisen sich auch hier Gauss' Gedanken als aus der Tiefe geschöpfte, noch gegenwärtig wirksame Conceptionen. St.

L. J. Rogers. On certain regular polygons in modular network. Lond. M. S. Proc. **29**, 706-719.

Bei der zu einer s-Function dritter Art gehörigen Einteilung des Orthogonalkreises (Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, **1**, 108) betrachtet der Verf. alle aus einer Seite des Dreiecks (ν_1, ν_2, ν_3) entspringenden Kreisbogen und fragt, ob sich in dieser Figur reguläre Polygone vorfinden können, deren Seiten alle äquivalent einer Seite des Urdreiecks sind. Er zeigt, dass ein solches Polygon ausser in dem bereits bekannten Falle (2, 3, 7) (Klein-Fricke, a. a. O. S. 369), wo sich ein Dreieck und ein Siebeneck ergiebt, und in dem trivialen Falle $(3, 3, \nu)$, wo ein ν-Eck vorhanden ist, nur existiren kann für: (2, 3, 9) (Neuneck) und (2, 4, 5) (Viereck). St.

F. Brioschi. Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 196-199.

Wiederabdruck einer Abhandlung, über die bereits in F. d. M. **28**, 307, 1897 berichtet worden ist; vergl. auch F. d. M. **26**, 131, 1895. St.

G. Humbert. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre. S. M. F. Bull. **26**, 233-236.

Damit eine Substitution $\lambda = f(x):\varphi(x)$, in der f und φ zwei

Polynome vom Grade $2p+1$ bedeuten, die Gleichung

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)}} = g\int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}}$$

mit constantem g nach sich zieht, müssen nach Jacobi die Identitäten

$$f(x)-\lambda_\alpha \varphi(x) = (x-x_\alpha)P_\alpha^2(x) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

bestehen; hierin ist x_α eine Constante, $P_\alpha(x)$ ein Polynom in x. Dieses Resultat lässt sich folgendermassen geometrisch deuten. Betrachtet man auf einer Unicursalcurve, bei der die Coordinaten eines Punktes rationale Functionen eines Parameters x sind, die Involution $f(x)-\lambda\varphi(x) = 0$, und bestehen vier Gruppen der Involution, die den Werten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 von λ entsprechen, je aus einem einfachen Punkte x_α und $2p$ Doppelpunkten, so ist das Doppelverhältnis der λ_α mit dem der x_α durch die Modulargleichung für $n = 2p+1$ verknüpft. Hieraus ergeben sich interessante Sätze für die Unicursalcurven dritter Ordnung.

St.

F. Lindemann. Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale. Münch. Ber. **28**, 1898, 37-54.

Wird ein in einer Ebene befindlicher materieller Punkt von zwei festen Centren der Massen m und m' nach dem Newton'schen Gesetze angezogen, so ergiebt bei Einführung elliptischer Coordinaten die Hamilton-Jacobi'sche Methode die Integralgleichungen der Bewegung in der Gestalt, dass beide Male links die Summe von zwei elliptischen Integralen, rechts erst eine Constante, dann die Zeit steht. Das gilt auch, wenn $m' = 0$ wird, so dass auf diese Weise die Kepler'sche Bewegung durch ein Umkehrproblem aus der Theorie der elliptischen Integrale dargestellt erscheint. Der Verf. zeigt, wie man durch geeignete Transformationen das Umkehrproblem auf die Kepler'sche Gleichung zurückführen kann, wobei auch die geometrische Bedeutung der so gewonnenen Relationen Berücksichtigung findet. St.

P. Appell. Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot. S. M. F. Bull. **26**, 98-102.

Bei der Trägheitsbewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt lassen sich die Componenten der augenblicklichen Drehung und die neun Richtungscosinus durch doppeltperiodische Functionen der Zeit erster oder zweiter Art ausdrücken, deren imaginäre Periode ohne Bedeutung für die Bewegung bleibt. Der Verf. zeigt aber, dass man jeder Bewegung dieser Art durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen eine zweite so zuordnen kann, dass die reelle Periode der ersten gleich der durch i geteilten imaginären Periode der zweiten ist, und umgekehrt.

Die Beziehungen zwischen den Anfangsbedingungen haben dabei eine einfache geometrische Bedeutung. St.

Weitere Litteratur.

F. de Brun. Einige neue Formeln der Theorie der elliptischen Functionen. Teil II. Stockholm. 9 S. 8°.

F. Jahn. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in doppelt unendliche Reihen. Diss. Strassburg. 55 S. 8°.

N. Mannheimer. Untersuchungen über die Möglichkeit algebraischer Differentialgleichungen für additiv- und multiplicativ-periodische Functionen zweiter Gattung. Heidelberg. 30 S. 8°.

A. Söderblom. Sur la fonction elliptique fondamentale $s = \wp(u; g_2, g_3)$. Upsala Nova Acta 1896, 56 S. 4° (1898).

J. Westlund. On a class of equations of transformation. American M. S. Bull. (2) **5,** 12-13.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

J. Dolbnia. Étude directe des intégrales abéliennes du genre un. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15,** 393-430.

Von den Integralen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}}$$

sind die drei den Werten 1) $m = 3$, $\alpha = \beta = \gamma = 2$; 2) $m = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 3$; 3) $m = 6$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ entsprechenden vom Geschlechte 1. Der Verf. zeigt, wie man diese Integrale, ohne sie vorher auf die Form elliptischer Integrale zu transformiren, mit Hülfe der Weierstrass'schen $\wp$-Function umkehren kann, und wendet dann diese Methode auch auf die Umkehrung des elliptischen Integrals selbst an. Kr.

J. P. Dolbnia. Umkehrung der Abel'schen Integrale ersten Ranges. Tagebuch X. Vers. Russ. Naturf. in Kiew. S. 140 u. 227. (Russisch.)

Die Umkehrung von

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = z$$

wird in neuer Form: $x-a = \dfrac{\frac{1}{4} f'(a)}{\wp z - \frac{1}{24} f''(a)}$

$(f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d))$ bewirkt mittels der Entwickelungen:

$$x-a = z^2F_1(z),\quad x-b = (z-w_1)^2F_2(z),\quad (x-c) = (z-w_2)^2F_3(z),$$
$$x-d = (z-w_3)^2F_4(z) \quad x = (z-\sigma)^{-1}\varphi(z).$$

Das Princip ist auf andere Abel'sche Integrale ersten Ranges anwendbar, was an einem Beispiel erläutert wird. Si.

S. Kempinski. Ueber die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale vom Geschlecht $p = 2$. Prace mat.-fiz. **9**, 131-163. (Polnisch.)

In mehreren Abhandlungen über die Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln als Functionen eines Verzweigungspunktes der Riemann'schen Fläche genügen, hat L. Fuchs die bekannten bilinearen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale hergeleitet. Der Verf. der vorliegenden Abhandlung betrachtet die Integrale erster und zweiter Gattung

$$J_1 = \int\frac{(x-z)dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}},\qquad J_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}} = -2\frac{dJ_1}{dz}$$
$$E_1 = \int\frac{(x-z)^3dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}},\qquad E_2 = \int\frac{(x-z)^2dx}{\sqrt{\psi(x)(x-z)}}$$

auf der Riemann'schen, mittels der Gleichung $s^2 = \psi(x)(x-z)$ definirten Fläche; $\psi(x)$ ist ein Polynom vierten Grades. Durch diese Form der Integrale werden die Rechnungen vereinfacht, und es ergeben sich leicht die bilinearen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung, zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale der ersten und der zweiten und endlich die zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung. Dn.

M. Krause. Sur les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. C. R. **126**, 1086-1088, 1489-1492, 1618-1621; **127**, 91-93.

M. Krause. Ueber verallgemeinerte Lamé-Hermite'sche Differentialgleichungen für den Fall zweier veränderlichen Grössen. Leipz. Ber. **50**, 1898, 192-206, 232-245.

M. Krause. Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. Annali di Mat. (3) **1**, 265-282.

In der Theorie der doppeltperiodischen Functionen haben sich die Functionen zweiter Art auf Grund der Arbeiten von Hermite und Picard von besonderer Bedeutung für die Integration von Differentialgleichungen erwiesen. Der Verf. zeigt, dass im Gebiete der vierfach periodischen Functionen ähnliche Theorien entwickelt werden können, indem er zunächst für gewisse Fundamentalfunctionen die Existenz von

Differentialgleichungen nachweist und sodann diese Differentialgleichungen in den einfachsten Fällen wirklich aufstellt. Kr.

L. Schleiermacher. Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln und die zugehörige Kummer'sche Fläche. Math. Ann. **50,** 183-212.

Zur Darstellung der Kummer'schen Fläche setzt man bei der Weber'schen Methode die homogenen Punktcoordinaten den Quadraten der Thetafunctionen eines Rosenhain'schen Quadrupels proportional. Der Verf. zeigt, dass dann die homogenen Ebenencoordinaten Producten aus je sechs Thetafunctionen eines Rosenhain'schen Sextupels mit den nämlichen Argumenten u_1, u_2 proportional sind. Indem er dann nachweist, dass die Producte proportional gesetzt werden können den nämlichen vier Thetaquadraten wie die Punktcoordinaten, jedoch mit gewissen anderen Argumenten v_1, v_2, gelangt er einmal zu dem Satze, dass die Kummer'sche Fläche in Bezug auf gewisse Flächen zweiter Ordnung mit ihrer eigenen Reciprocalen zusammenfällt, weiter aber auch zu einer neuen Darstellungsweise ihrer Punktcoordinaten. — Minder einfach gestaltet sich die gleiche Untersuchung bei der Cayley-Borchardt'schen Darstellung der Kummer'schen Fläche, bei welcher die homogenen Punktcoordinaten den Quadraten der Thetafunctionen eines Göpel'schen Quadrupels proportional gesetzt werden. — Im zweiten Teile der Abhandlung giebt der Verf. Formeln für die Darstellung der Thetafunctionen mit doppelten Argumenten durch solche mit einfachen, ferner bemerkenswerte Determinantenformeln für Thetafunctionen von zwei Systemen zu je vier Argumentenreihen, wie sie in der Riemann'schen Thetaformel auftreten. Für beide Formelsysteme wird ihre Bedeutung für die Geometrie der Kummer'schen Fläche erörtert. Kr.

E. Jahnke. Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. J. für Math. **119,** 234-252.

E. Jahnke. Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions thêta de deux arguments et leur application à la dynamique. C. R. **126,** 1013-1016.

Die erste Abhandlung ist eine weitere Ausführung der unter dem gleichen Titel Berl. Ber. 1896 (F. d. M. **27,** 363, 1896) erschienenen Arbeit des Verf. In derselben wird gezeigt, dass man ein orthogonales Neunersystem A von sehr allgemeiner Natur durch Zusammensetzung eines orthogonalen Sechzehnersystems $\mathfrak{C}$ einerseits und der beiden zugehörigen Neunersysteme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ andererseits mit einem orthogonalen Neunersysteme E erhalten kann, und sodann weiter, dass dieses Neunersystem A das von F. Kötter (Berl. Ber. 1895; F. d. M. **26,** 517, 1895 und J. für Math. **116,** F. d. M. **27,** 363, 1896) mitgeteilte liefert, wenn man die Parameter der Systeme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in passender Weise

durch Thetafunctionen zweier Argumente ersetzt, während man die Elemente des Systems E willkürlich lässt.

In der zweiten Abhandlung weist der Verf. darauf hin, dass man auch umgekehrt die Parameter des Systems E durch Thetafunctionen ersetzen, die der Systeme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ willkürlich lassen kann, und giebt an, dass man dann im einfachsten Falle, wo an Stelle des Systems E das Caspary'sche orthogonale System aus Thetafunctionen einer Variable gesetzt wird, Formeln erhält, welche das Problem der Rotation zweier mit einander verbundenen Körper in dem von Wangerin (Univers. Schrift Halle 1889; F. d. M. **21,** 938, 1889) und Volterra (Annali di Mat. (2) **24;** F. d. M. **27,** 627, 1896) behandelten Falle zum Abschluss bringen. Kr.

E. Jahnke. Expression des dérivées des fonctions thêta de deux arguments au moyen des carrés des fonctions thêta. C. R. **126,** 1083-1085.

Die vorliegende Note giebt, anknüpfend an eine frühere Abhandlung des Verf. (C. R. **125;** F. d. M. **28,** 401, 1897), eine Methode an, nach welcher die für die Thetafunctionen zweier Variablen gebildeten Differentialausdrücke:

$$\vartheta((x))\overset{(2\varrho)}{\vartheta}((x))-\binom{2\varrho}{1}\vartheta'((x))\overset{(2\varrho-1)}{\vartheta}((x))+\binom{2\varrho}{2}\vartheta''((x))\overset{(2\varrho-2)}{\vartheta}((x))\mp\cdots$$

und speciell die zweiten logarithmischen Derivirten dieser Functionen durch Thetaquadrate dargestellt werden können. Kr.

H. F. Baker. On the hyperelliptic sigma functions. Math. Ann. **50,** 462-472.

H. F. Baker. On the hyperelliptic sigma functions. American J. **20,** 301-384.

Die vorliegenden Abhandlungen enthalten eine auf Riemann'scher Grundlage ruhende Darstellung der Theorie der hyperelliptischen Functionen, in der insbesondere gezeigt wird, dass man die Thetaquotienten $\frac{\vartheta(u+v)\vartheta(u-v)}{\vartheta^2(u)\vartheta^2(v)}$ als ganze rationale Functionen der zweiten logarithmischen Derivirten $\frac{\partial^2\log\vartheta(u)}{\partial u_\mu\partial u_\nu}$, $\frac{\partial^2\log\vartheta(v)}{\partial v_\mu\partial v_\nu}$ darstellen kann. Kr.

G. Humbert. Sur la décomposition des fonctions Θ en facteurs. C. R. **126,** 394-397.

G. Humbert. Sur les fonctions abéliennes singulières. C. R. **126,** 508-510.

G. Humbert. Sur la transformation des fonctions abéliennes. C. R. **126,** 814-817.

G. HUMBERT. Sur les transformations singulières des fonctions abéliennes. C. R. **126,** 882-884.

G. HUMBERT. Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes. C. R. **127,** 857-860.

Die vorliegenden Abhandlungen beschäftigen sich mit jenen speciellen Thetafunctionen zweier Variablen, deren Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ durch eine Relation von der Form:

$$\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12}+\gamma\tau_{22}+\delta(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)+\varepsilon = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ganze Zahlen bezeichnen, mit einander verknüpft sind.
Kr.

E. BOREL. Sur les caractéristiques des fonctions Θ. S. M. F. Bull. **26,** 89-90.

Ordnet man die 2^{2p} Charakteristiken $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_p\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\dots\varepsilon_p'\end{pmatrix}$ in ein quadratisches Schema, derart, dass für die 2^p in einer Horizontalreihe stehenden Charakteristiken die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, für die 2^p in einer Verticalreihe stehenden die Zahlen $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_p'$ die nämlichen Werte haben, so stehen in jener Horizontalreihe, für welche $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 0$ ist, 2^p gerade, in jeder anderen 2^{p-1} gerade und 2^{p-1} ungerade Charakteristiken. Daraus ergeben sich als Gesamtzahl g_p aller geraden und als Gesamtzahl u_p aller ungeraden Charakteristiken die bekannten Zahlen:

$$g_p = 2^p+(2^p-1)\,2^{p-1} = 2^{p-1}(2^p+1),$$
$$u_p = (2^p-1)2^{p-1} \qquad = 2^{p-1}(2^p-1).$$

Kr.

D. Kugelfunctionen und verwandte Functionen.

J. H. GRAF und E. GUBLER. Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen. Erstes Heft: Die Bessel'schen Functionen erster Art. Bern: K. J. Wyss. VI + 142 S. 8⁰.

Das vorliegende Lehrbuch, das sich genau dem Lehrgange anschliesst, den Ludwig Schläfli in seinen Vorlesungen und Manuscripten eingeschlagen hat, beginnt mit einer historischen Einleitung, die den Zusammenhang der Bessel'schen Functionen mit andern Problemen der reinen und angewandten Mathematik darlegt. Insbesondere wird der (von Schläfli gefundene) Zusammenhang der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen mit der Riccati'schen Gleichung erörtert, dann die Schwingungsprobleme und die Aufgaben der Wärmetheorie, die auf Bessel'sche Functionen führen, endlich sehr ausführlich das Kepler'sche Problem, das Anlass zur Entwickelung der wichtigsten Formeln der Bessel'schen Functionen mit ganzzahligen Indices giebt.

Die für diesen Fall gewonnene Reihe dient nun, indem für den

Index eine beliebige Zahl genommen wird, als Definition der allgemeinen Bessel'schen Function erster Art $\overset{a}{J}(x)$. In Kap. I werden die hauptsächlichsten Eigenschaften von $\overset{a}{J}(x)$ entwickelt, namentlich die Recursionsformeln, die Differentialgleichung, der $\overset{a}{J}(x)$ genügt, etc. Es wird ferner Schläfli's complementäre Function K eingeführt, die für ganzzahlige Indices die Bessel'sche Function zweiter Art ergiebt, und es wird gezeigt, dass K den nämlichen Relationen wie J genügt. Daran schliesst sich die Ableitung gewisser Formeln von Weber und Lommel, und zum Schluss wird untersucht, wie sich die Werte von J und K ändern, wenn das Argument um eine beliebige Anzahl Halbkreise aus der positiven Hälfte der reellen Axe gedreht wird.

Es folgt (Kap. II) die Darstellung von $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{a}{K}(x)$ durch verschiedene complexe Integrale, insbesondere solche, deren Integrationsweg eine Schlinge oder Schleife bildet, dann (Kap. III) die Berechnung angenäherter Werte für ein grosses Argument. Hier werden neben den üblichen Formeln neue entwickelt, und in einem Anhange wird die Frage behandelt, wie sich $\overset{a}{J}(x)$ verhält, wenn der Parameter a und das Argument x gleichzeitig unendlich werden, jedoch ein endliches Verhältnis haben (in der Ueberschrift steht fälschlich „verschwinden" statt „unendlich werden").

Weiter wird (Kap. IV) die Ableitung der Functionen nach dem Parameter untersucht, und es werden die wichtigsten Sätze über die Wurzeln von $\overset{a}{J}(x) = 0$ entwickelt.

Ein Schlusskapitel (V) behandelt die Entwickelung einer Function nach Bessel'schen Functionen desselben Parameters; endlich bringen die letzten Seiten einige litterarische Anmerkungen.

Das viele Eigenartige, das das Buch enthält [insbesondere heben wir neben der interessanten historischen Einleitung die ausgiebige Benutzung complexer Integrale, wie sie in der Theorie der Bessel'schen Functionen von Schläfli besonders angewandt sind, ferner verschiedene neue Formeln in den Kap. III und IV hervor], lässt dasselbe als eine dankenswerte Bereicherung unserer Litteratur über Bessel'sche Functionen erscheinen. Wn.

Karl Baer. Die Kugelfunction als Lösung einer Differenzengleichung. Pr. (No. 313) Realsch. Kiel. 25 S. 4°.

Den Ausgangspunkt für die Entwickelung der Theorie der Kugelfunctionen bildet hier die zwischen drei Kugelfunctionen mit auf einander folgenden Indices geltende Recursionsformel, die man als eine Differenzengleichung ansehen kann. Dieser Ausgangspunkt, der für die Bessel'schen Functionen bereits mehrfach benutzt ist, für die Kugelfunctionen aber neu sein dürfte, bietet den Vorteil, dass man nicht nur die Kugelfunctionen erster und zweiter Art, sondern auch die Kugelfunctionen

mit gebrochenem sowie complexem Index (die Kegelfunctionen) in derselben Art behandeln kann; der Unterschied zwischen den verschiedenen Functionen besteht dann nur in der Verschiedenheit der Anfangsbedingungen, d. h. der Werte, welche die Functionen für zwei gegebene Werte des Index annehmen.

Der in Rede stehenden Recursionsformel sucht der Verf. zunächst durch ein Integral von der Form

$$\int_a^b u^n f(u)du$$

zu genügen und gelangt so zu dem Laurent'schen Integral (Liouville J. (3) **1**, 373; F. d. M. **7**, 292, 1875), das hier zunächst für den Fall, dass $x^2>1$ und der reelle Teil von $(n+1)$ grösser als Null ist, in der Form auftritt:

$$P^n(x)=\frac{1}{i\pi}\int_\xi^{1:\xi} u^n U du, \quad Q^n(x)=\int_0^\xi u^n U du,$$

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}, \quad \xi=x-\sqrt{x^2-1}.$$

Durch Einführung complexer Integrationswege kann man dann zu beliebigen x und n übergehen. Dabei ergiebt sich noch, dass der Ausdruck $2i\pi P^n(x)$ aufgefasst werden darf als die Periode der inversen Function u des Integrals

$$J=\int_0^u u^n U du.$$

Weiter wird gezeigt, wie man aus den vorstehenden Integralen durch Einführung von neuen Veränderlichen oder durch Abänderung des Integrationsweges die üblichen Formeln für die Kugelfunctionen ableiten kann, z. B. das Laplace'sche und das Dirichlet'sche Integral etc.

Sucht man der zu Grunde gelegten Differenzengleichung statt durch ein Integral durch die Reihe zu genügen:

$$\varphi(u)=\sum_0^\infty u^n R^n(x)$$

($R^n(x)$ ist die Function, die der Differenzengleichung genügt), so ergiebt sich die erzeugende Function der Kugelfunctionen, $\varphi(u)=U$ für $P^n(x)$ und

$$\varphi(u)=U\cdot\tfrac{1}{2}\log\frac{x-u+U^{-1}}{x-u-U^{-1}}$$

für $Q^n(x)$. Mit Hülfe dieser erzeugenden Functionen werden weitere Eigenschaften der Kugelfunctionen abgeleitet, z. B. die Darstellung von $P^n(x)$ als vielfacher Differentialquotient, die Neumann'sche Integraldarstellung von $Q^n(x)$ u. a. Erwähnt seien noch die folgenden neuen Gleichungen:

$$P^n(\cos w) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^m(\cos w)}{n+m+1} \sin(n+m+1)w,$$

$$Q^n(\cos w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P^m(\cos w)}{n+m+1} e^{-(n+m+1)iw}.$$

Der Zusammenhang zwischen zwei Lösungen der Differenzengleichung führt sodann auf die Formel

$$Q^n(x) = P^n(x)\left\{Q^0(x) - \sum_0^{n-1} \frac{1}{(n+1)\,P^n(x)\,P^{n+1}(x)}\right\}$$

und andere analoge.

Zum Schluss endlich wird gezeigt, wie jede Potenzentwickelung einer Function auf eine Kugelfunctionenentwickelung einer andern Function führt. Gilt innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises die Gleichung

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_n u^n,$$

so multiplicire man mit Udu und integrire zwischen den Grenzen ξ und $1/\xi$, resp. 0 und ξ, so erhält man:

$$\frac{1}{i\pi}\int_{\xi}^{1:\xi} f(u)U du = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P^n(x),$$

$$\int_0^{\xi} f(u)U du = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q^n(x).$$

Diese Reihen werden noch auf ihre Convergenz untersucht und dann auf specielle Fälle angewandt. Wn.

F. Rogel. Note über Kugelfunctionen. Prag. Ber. 1898, No. 30, 3 S.

Neuer Beweis, dass die Kugelfunction $P^{(\nu)}(x)$ ein höherer Differentialquotient eines einfachen Ausdruckes ist, nämlich

$$P^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\nu!\,2^\nu} D_x^\nu (x^2-1)^\nu.$$

Sda.

R. Hargreaves. The integral $\int P_n^2\,dx$, and allied forms in Legendre's functions between arbitrary limits. London M. S. Proc. **29**, 115-123.

Aus den Recursionsformeln, die $\frac{dP_n(x)}{dx}$ einerseits mit P_n und P_{n+1}, andererseits mit P_n und P_{n-1} verbinden, leitet der Verf. die folgenden Gleichungen ab:

$$(1)\begin{cases}(2n+3)P_{n+1}^2-(2n+1)P_n^2 = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1-x^2}{n+1}(P_nP'_n-P_{n+1}P'_{n+1})\right\}\\ \qquad = \dfrac{d}{dx}\{x(P_n^2+P_{n+1}^2)-2P_nP_{n+1}\}.\end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben sofort den bekannten Wert von $\int_0^1 P_n^2 dx$; ferner folgt daraus die Formel

$$(2)\begin{cases}(2n+1)\displaystyle\int_0^x P_n^2\,dx = xP_n^2-\frac{2(n-1)}{2n-1}P_nP_{n-1}\\ \qquad +2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P_{k-1}P_k}{(2k-1)(2k+1)}\end{cases}$$

und eine entsprechende für $\int_0^x (1-x^2)P_n^2\,dx$.

Ganz analoge Relationen ergeben sich für die Kugelfunctionen zweiter Art; speciell wird

$$\int_1^\infty (2n+1)\,Q_n^2\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots,$$

$$\int_0^1 (2n+1)\,Q_n^2\,dx = \frac{\pi^2}{4}-\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right\}.$$

Weiter werden aus den Recursionsformeln, die zwischen den Functionen P einerseits und den Functionen Q andererseits bestehen, einige Folgerungen gezogen, von denen die folgende hier Platz finden möge:

$$\int_0^1 (2n+1)\,P_n\,Q_n\,dx = (-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\cdots\right\}.$$

Zum Schluss werden die Formeln auf den Fall, dass der Index der Kugelfunction nicht mehr eine ganze Zahl n ist, sondern von der Form $n-\frac{1}{2}$, d. h. auf die sogenannten Ringfunctionen ausgedehnt. Die hier erhaltenen Relationen sind solche zwischen elliptischen Integralen; eine der einfachsten würde in der für die Theorie der elliptischen Functionen üblichen Bezeichnung so lauten:

$$\int_k^1 \frac{2k'^2E'^2dk}{k^3} = \left(k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{E'^2}{k}+kK'^2\right]-4E'K'.$$

Bemerkt werden mag, dass in den obigen Formeln Q so definirt ist,

dass diese Function für reelle x stets reell ist, also

$$Q_0(x) = \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \text{ für } x^2 > 1; \qquad Q_0(x) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \text{ für } x^2 < 1.$$

Wn.

L. Gegenbauer. Generalizzazione di alcuni relazioni contenute nella nota del Prof. Morera „Sui polinomi di Legendre“. Palermo Rend. **12**, 21-22.

Die Methode, mittels deren Morera (vergl. F. d. M. **28**, 405, 1897) gewisse die Kugelfunctionen betreffende Recursionsformeln hergeleitet hatte, lässt sich anwenden, um entsprechende Formeln für die allgemeineren Functionen $C_n^{\nu}(x)$ zu gewinnen, welche die Coefficienten von α^n bei der Entwickelung von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$ nach steigenden Potenzen von α bilden. Wn.

L. Crawford. A proof of Klein's theorem in connection with Lamé's functions. Quart. J. **30**, 307-312.

Zu einem von F. Klein aufgestellten Satze, der sich auf die Verteilung der Wurzeln der Lamé'schen Functionen bezieht, wird hier ein Analogon abgeleitet, bei dem an Stelle der genannten Functionen die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2U}{du^2} = U\{n(n+1)\wp(u)+B\}$$

treten. Bekanntlich giebt es, bei geeigneter Wahl der Constante B, $2n+1$ Lösungen jener Gleichung in endlicher Form, die in vier Typen zerfallen (vergl. die Arbeit des Verf. Quart. J. **29**; F. d. M. **28**, 287, 1897). Einen dieser Typen bilden, falls n eine gerade Zahl ist, $\frac{1}{2}n+1$ ganze Functionen von $\wp(u)$ vom Grade $\frac{1}{2}n+1$, und die sämtlichen Wurzeln aller dieser Functionen sind reell und liegen zwischen e_1 und e_3. Der zu beweisende Satz besagt nun, dass unter den in Rede stehenden $\frac{1}{2}n+1$ Functionen U_n nur eine vorhanden ist, bei der eine gegebene Zahl r von Wurzeln zwischen e_1 und e_2, die übrigen $\frac{1}{2}n+1-r$ zwischen e_2 und e_3 liegen. Der Beweis lässt sich leicht für den Fall $e_1 = e_2$ führen, wo also r Wurzeln mit e_2 zusammenfallen, und der Fall $e_1 \neq e_2$ lässt sich dann auf diesen durch geometrische Betrachtungen zurückführen. Jede Wurzel der Gleichung $U_n = 0$ entspricht nämlich einer Krümmungslinie auf dem Ellipsoid mit den Axen $\sqrt{\wp(u_1)-e_3}$, $\sqrt{\wp(u_1)-e_2}$, $\sqrt{\wp(u_1)-e_1}$ (u_1 ist ein constanter Wert), und zwar geben die Wurzeln von $U_n = 0$, die zwischen e_1 und e_2 liegen, Krümmungslinien der einen, die zwischen e_2 und e_3 liegenden Krümmungslinien der andern Schar. Lässt man aber $e_1 = e_2$ werden, d. h. führt man das dreiaxige Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid über, so bleiben bei jeder Aenderung der Axe die Krümmungslinien der einen Schar von denen der anderen verschieden; man kann also von der Zahl

der Krümmungslinien im Falle $e_1 = e_2$ auf die Zahl der Krümmungslinien im Falle $e_1 > e_2$ schliessen. — In ähnlicher Weise wird der Satz für einen Typus der Lösungen geführt, falls n ungerade. Wn.

H. M. Macdonald. Note on Bessel functions. London M. S. Proc. **29**, 110-115.

In seiner bekannten Arbeit über die Bessel'schen Functionen (Math. Ann. **16**, 1; F. d. M. **12**, 400, 1880) stellt Sonine diese Functionen mittels des Integrals

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})}\frac{dt}{t^{n+1}}$$

dar, wobei die Grenzen so zu wählen sind, dass der Exponentialfactor an ihnen verschwindet; und zwar ergiebt sich diese Darstellung aus der Recursionsformel, die zwischen dreien jener Functionen mit auf einander folgenden Indices besteht. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die obige Formel direct aus der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen hergeleitet, indem für die Lösung dieser Gleichung der Ansatz

$$y = \int_{s_0}^{s_1} e^{xs} S ds$$

gemacht und die Function S von s passend bestimmt wird, ebenso die Grenzen s_0 und s_1. Weiter wird gezeigt, wie man von der Sonine'schen zu der Weber'schen Integraldarstellung der Bessel'schen Functionen (Math. Ann. **37**, 404; F. d. M. **22**, 518, 1890) gelangen kann. Man verwandelt das Integral (1) durch Anwendung einer bekannten Formel der Γ-Functionen in ein Doppelintegral und wird durch Transformation des letzteren auf das Weber'sche Integral geführt. Nebenbei ergiebt sich noch die Hargreave'sche (Phil. Mag. 1848) symbolische Darstellung von $J_n(x)$ und $Y_n(x)$ für ganzzahlige n. Wn.

H. M. Macdonald. Zeroes of the Bessel functions. London M. S. Proc. **29**, 575-584.

Der Verf. geht von folgendem allgemeinen Satze der Functionentheorie aus: Die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Function $f(z)$ innerhalb eines Bereiches, an dessen Grenze $|f(z)| = \text{const.}$ ist, übertrifft die Zahl der Nullstellen von $f'(z)$ in demselben Bereiche stets um eine Einheit. Daraus folgt, dass, wenn alle Coefficienten von $f(z)$ reell und alle Wurzeln von $f(z)$ reell und von einander verschieden sind, zwischen je zwei Wurzeln von $f(z)$ eine und nur eine Wurzel von $f'(z)$ liegt. Kennt man die Wurzeln von $f'(z)$, so kann man die Wurzeln von $f(z)$ mittels gewisser Reihenentwickelungen berechnen.

Durch Anwendung des vorstehenden allgemeinen Satzes auf die Function

$$u_n = 2^n \Pi(n) z^{-n} J_n(z)$$

folgt das bekannte Resultat, dass zwischen je zwei Wurzeln von $J_n(z)$ stets eine und nur eine Wurzel von $J_{n+1}(z)$ liegt. Dass für reelle n, die grösser als -1, $J_n(z)$ nur reelle Wurzeln hat, wird dadurch bewiesen, dass für den Fall $1 > n > -1$ die Function u_n eine holomorphe Function von z und n ist und daher ihre Wurzeln sich continuirlich an die von $u_{\frac{1}{2}}$ und $u_{-\frac{1}{2}}$ anschliessen und aus letzteren berechnet werden können (cf. Picard, Traité d'Analyse **2**, Chap. 9). Zur Berechnung der Wurzeln von $J_n(z)$ kann die Formel von Stokes dienen, die sich aus der semiconvergenten Reihe für $J_n(z)$ ergiebt. Man erkennt von dieser Formel unmittelbar, dass sie für $n = \frac{1}{2}$ und $n = -\frac{1}{2}$ gilt, woraus nach den vorhergehenden Sätzen ihre allgemeine Gültigkeit folgt.

Weiter werden Werte des Index n, die < -1 sind, betrachtet. Ist $v_n = 2^n z^{-n} J_n(z)$, so gilt die Formel:

$$\text{(a)} \qquad \frac{z^2}{4} v_{n+1} v_{-n} + v_n v_{-(n+1)} = -\frac{\sin(n\pi)}{\pi},$$

und aus dieser folgt, dass die kleinste positive Wurzel von $J_{-n}(z)$ kleiner ist als die kleinste positive Wurzel von $J_n(z)$ und ebenso kleiner als die kleinste positive reelle Wurzel von $J_{-(n+1)}(z)$. Ferner trennen die Wurzeln von $J_n(z)$ und die von $J_{-n}(z)$ einander. Der Satz von Hurwitz (Math. Ann. **33**; F. d. M. **20**, 502, 1888) über die Zahl der complexen Wurzeln von $J_n(z)$, falls $n < -1$, lässt sich ebenfalls aus dem allgemeinen, an die Spitze gestellten Satze ableiten. Für den Fall, dass n zwischen -1 und -2 liegt, und ebenso wenn n zwischen $-(2m+1)$ und $-(2m+2)$ liegt, sind zwei Wurzeln von $J_n(z)$ rein imaginär, nicht aber wenn n zwischen $-2m$ und $-(2m+1)$ liegt. Das ergiebt sich für $-1 > n > -2$ dadurch, dass, wenn man $z = iy$ setzt, u_n zwischen $y = 0$ und $y = \infty$ sein Zeichen wechselt, u_{n+1} aber nicht. Für kleinere n findet man das Resultat mittels der Formel (a).

Zum Schluss werden noch Näherungsformeln zur Berechnung der complexen Wurzeln von $J_n(z)$ $(n < -1)$ angegeben, auf deren Wiedergabe jedoch hier verzichtet werden muss, da sie zu viel Raum beanspruchen würden. Wn.

M. B. Porter. On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions. American J. **20**, 193-214.

Gestützt auf die Sätze von Sturm (Liouville J. **1**) über die reellen Wurzeln solcher Functionen, die durch homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung definirt sind, untersucht der Verf. zunächst die Wurzeln von $J_n(x) = 0$. Die sich für positive Werte des Index n ergebenden Resultate sind bekannt, teilweise neu dagegen die für negative n. Zunächst ergiebt sich aus der bekannten Näherungsformel für die Wurzeln hoher Ordnung, dass der Satz, wonach die positiven Wurzeln von $J_n(x) = 0$ mit abnehmendem n abnehmen, auch für negative n gilt. Bei abnehmendem n geht jedesmal, wenn n gleich

einer ganzen negativen Zahl wird, eine positive Wurzel verloren (an ihre und der entsprechenden negativen Wurzel Stelle tritt ein Paar conjugirter complexer Wurzeln). Die übrig bleibenden Wurzeln müssen dann aber ihre frühere Ordnungszahl beibehalten, wenn der Satz über die Abnahme der Wurzeln mit abnehmendem n gültig sein soll. (Dieser Punkt tritt in der Darstellung des Verf. nicht deutlich genug hervor.) Von weiteren Resultaten seien noch die folgenden angeführt. Sind n und k beide negativ, so trennen die positiven Wurzeln von $J_n(x)$ und $J_{n+k}(x)$ einander, falls $-k < E(-n+1)+n$. Ferner: In jedem der Intervalle zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln von $J_n(x)$, $n<0$, liegt eine und nur eine Wurzel von $J_{n+i}(x)$, $i<0$, ausser in $E\left(\frac{-i-1}{2}\right)$ von diesen Intervallen, in denen keine Wurzel von $J_{k+i}(x)$ liegt. — Auch der Hurwitz'sche Satz über die Zahl der complexen Wurzeln von $J_n(x)$, $n<-1$, wird durch functionentheoretische Betrachtungen, die sich nicht in Kürze wiedergeben lassen, abgeleitet.

Weitere Formeln betreffen die Wurzeln der Functionen $g_{i-1}^{(n)}(x)$, auf die man bei wiederholter Anwendung der Recursionsformel der Bessel'schen Functionen geführt wird, die also durch die Gleichung definirt sind:

$$\text{(a)} \qquad J_{n+i}(x) = g_{i-1}^{(n)}(x) J_{n+1}(x) - g_{i-2}^{(n)}(x) J_n(x),$$

wobei i eine ganze Zahl ist. Für diese Functionen gilt der Satz, dass, wenn $n>0$, die positiven Wurzeln von $g_{i-1}^{(n)}(x)$ mit wachsendem x wachsen. Durch Anwendung der Gleichung (a) auf solche Bessel'schen Functionen, deren Ordnungszahl die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist, folgt ferner, dass zwei derartige Functionen nie eine Wurzel gemeinsam haben können.

Im zweiten Teile seiner Arbeit dehnt der Verf. die für Bessel'sche Functionen abgeleiteten Resultate auf die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aus. Zunächst stellt er mehrere Sätze auf, die sich auf die Variation der Wurzeln von F mit den Parametern beziehen. Als Beispiele seien die folgenden erwähnt. Ist x_r die r^{te} Wurzel von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zwischen 0 und 1, so wächst x_r, wenn $\alpha-\beta$ abnimmt. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_\omega$ die Wurzeln von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zwischen 0 und 1, so liegt in jedem der Intervalle $x_1 \ldots x_2, x_2 \ldots x_3, \ldots, x_\omega \ldots 1$ eine Wurzel von $F(\alpha-k, \beta+k, \gamma, x)$, ausgenommen i Intervalle, die keine Wurzel der letztgenannten Function enthalten; dabei ist

$$\eta+i-1 < k < \eta+i, \qquad \beta+k<0, \qquad \eta = -\beta-E(-\beta).$$

Zum Schluss wird die Anzahl der Wurzeln von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zwischen 0 und 1 bestimmt. Ist

$$\lambda = \gamma-1, \qquad \mu = \alpha-\beta, \qquad \nu = \alpha+\beta-\gamma,$$

so ist diese Zahl

$$\text{für } \lambda>0,\ \nu>0: E(1-\beta),$$
$$\text{für } \lambda>0,\ \nu<0: E[1-(\gamma-\alpha)].$$

Für $\lambda < 0$ muss man statt der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Reihe $y = x^{-\lambda} F\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}, 1-\lambda, x\right)$ betrachten. Ist N die (nach dem vorigen Satze zu berechnende) Zahl der Wurzeln von y, so ist die Zahl der Wurzeln von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entweder N oder $N+1$, und zwar ist von diesen beiden Zahlen die gerade oder die ungerade zu nehmen, je nachdem $y > 0$ oder < 0 für $x = 1$ ist.

Wn.

M. B. Porter. Note on the roots of Bessel's functions. American M. S. Bull. (2) **4**, 274-275.

Kurze, auf dem Rolle'schen Satze beruhende Skizze eines Beweises; aus einer Abhandlung im American J. **20**. Vergl. das vorangehende Referat.

Lp.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Principien der Geometrie.

W. Killing. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Zweiter Band. Mit 8 Figuren im Text. Paderborn: F. Schöningh. VI + 361 S. gr. 8°.

Bei der Anzeige des ersten Bandes dieses Werkes in F. d. M. **25**, 853, 1893, ist das Bestreben des Verf. anerkannt worden, aus den von verschiedenen Seiten her angestellten Forschungen über die Grundlagen der Geometrie in zusammenfassender Weise das Endergebnis zu ziehen und dasselbe fasslich darzustellen. Diesem Ziele strebt auch der vorliegende zweite Band zu, und es wird jeder Leser aus ihm sowohl Belehrung als auch Anregung erhalten, mag nun Zustimmung oder Widerspruch durch die eigenen Ausführungen des Verf. hervorgerufen werden. Die ruhige Art des Vortrags, der bei jedem Autor das Verdienstliche der Leistung anerkennt, der die Gründe für Abweisung des Gemissbilligten abwägend vorführt, wird nicht verfehlen, einen wohlthuenden Eindruck zu machen und auch bei entstehendem Widerspruche etwaige Entgegnungen auf sachliche Erörterungen in gleich angemessener Form zu beschränken. Sowohl für Universitätslehrer, welche über den Gegenstand Vorlesungen zu halten haben, als auch für Oberlehrer, welche bei dem Unterrichte in der Elementargeometrie ja immer in der Entwickelung der ersten Begriffe arbeiten, wird das Werk ein ausgezeichneter Ratgeber sein.

Bezüglich des vom Verf. Gewollten entnehmen wir dem Vorworte folgende Stellen: „Nur die Projectivität ist sowohl in ihrem selbständigen Aufbau als auch in ihrer Beziehung zur Metrik als abgeschlossen zu betrachten. Im übrigen konnte es nur meine Aufgabe sein, einen Ueberblick über die bisherigen Untersuchungen zu geben, um den Leser in den Stand zu setzen, zwischen sicheren und zweifelhaften Resultaten zu unterscheiden und den Punkt zu erkennen, an dem weitere Forschungen

anzusetzen haben, wenn sie einen endgültigen Erfolg in Aussicht stellen sollen. Von welchen Grundlagen man in der Geometrie ausgehen will, wird in etwa stets Sache besonderer Vorliebe sein; nur muss man verlangen, dass nicht willkürlich Wissenszweige von einander getrennt werden, die ihrer Natur nach eng zusammengehören. Mag manchem in meinen „Grundsätzen der Geometrie“ die Rücksichtnahme auf die Erfahrung weniger gefallen, mag man es tadeln, dass von ihnen aus der Aufbau nicht systematisch durchgeführt ist; jedenfalls wird man anerkennen müssen, dass sie auf ein einheitliches Gebiet führen. In der That tritt die nahe Verwandtschaft aller einzelnen Zweige, die wir im weiteren Sinne als Raumformen bezeichnen, von mehr als einer Seite zu Tage.“

Wie der erste Band, so umfasst auch der gegenwärtige vier Abschnitte, die als fünfter bis achter fortlaufend gezählt sind.

Der V. Abschnitt, betitelt Congruenz und Messung, bespricht zuerst die euklidischen Grössensätze und erörtert die Rolle der Bewegung in der Geometrie der Alten. Nach einer Prüfung des Aufbaus der Geometrie gemäss der Riemann'schen Arbeit: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, wird dann die Messung der krummen Linien, der Flächen, der Körper und der geraden Strecke behandelt. Die weiteren Ausführungen des Abschnittes drehen sich um das Princip, das O. Stolz als „Archimedisches“ bezeichnet hat. Die Stetigkeit und der Verhältnisbegriff bei Euklid, Cantor's transfinite Zahlen, eine zweite Erweiterung des Zahlgebietes und Veronese's transfinite Zahlen bilden die Themata einzelner Paragraphen. Zuletzt lässt ein „Rückblick“ die Hauptergebnisse noch einmal am Leser vorüberziehen.

Der Abschluss der projectiven Geometrie macht den Inhalt des VI. Abschnittes aus. Als wichtigstes Ergebnis wird der Nachweis bezeichnet, dass sich die projective Geometrie vollständig aufbauen lässt, ohne metrische Beziehungen im geringsten zu benutzen. „Damit ist ein Problem endgültig gelöst, auf das die Wissenschaft in neuerer Zeit immer stärker hingeführt ist, und das Staudt zuerst in voller Klarheit ausgesprochen und dessen Lösung er bereits kräftig gefördert hat.“ Von den Klein-Staudt'schen Voraussetzungen ausgehend, bespricht der Verf. die idealen Gebilde und untersucht den projectiven Raum als Ganzes. Bei der Darstellung des Weges, auf dem man von der Projectivität zur Metrik gelangt, wird zur Begründung die Theorie der Transformationsgruppen, die im VIII. Abschnitt behandelt werden, herbeigezogen und in einigen ihrer Resultate benutzt. Der Uebergang von der Projectivität zur Metrik, der schon im ersten Bande auf einem vom Verf. als „recht lästig“ bezeichneten Wege vollzogen war, wird jetzt einfach und übersichtlich gemacht. Nachdem dann noch die Fano'sche Begründung der Projectivität (vgl. F. d. M. **24**, 618, 1892) skizzirt ist, wird wieder in einem Rückblicke die Summe der Betrachtungen gezogen; „dieser kurze Ueberblick zeigt, welche hohe Bedeutung der projectiven Geometrie zukommt.“

Der VII. Abschnitt geht nun endlich näher auf die Grundbegriffe

und Grundsätze der Geometrie ein, ist daher für den Unterricht in der Elementargeometrie besonders wichtig, muss sich auch, entgegen der Tendenz des Werkes, mit philosophischen Fragen beschäftigen. Die ersten Paragraphen betreffen den Winkel, die Ebene und die Gerade als Raumgebilde, die Gerade als die kürzeste Linie; Fläche, Linie und Punkt. Bei der Erörterung des Raumbegriffes muss der Verf. auf Wundt's Raumtheorie etwas näher eingehen, „obschon er sonst die Behandlung aller philosophischen Fragen von seinem Werke ausschliesst“; denn „dieser Philosoph nimmt, wie überhaupt auf die übrigen Wissenschaften, so auch auf die Ergebnisse der mathematischen Forschung sorgfältig Rücksicht“. Als Vorläuferin der Helmholtz'schen Arbeit über die Grundlagen der Geometrie wird ferner eine Abhandlung Ueberweg's kurz besprochen („Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt“. Arch. f. Philol. u. Pädag. **17**, 1851). Die Grundlagen der Geometrie von J. M. de Tilly (F. d. M. **11**, 354, 1879) und der Aufbau der Geometrie von Veronese (F. d. M. **24**, 483ff., 1892 u. **26**, 546, 1895) werden skizzirt und kritisirt. Nunmehr stellt der Verf. seine „Grundbegriffe und Grundsätze“ der Geometrie auf und lässt sich über die allgemeinen Raumformen des weiteren aus.

Im VIII. Abschnitte wird die Anwendung der Transformationsgruppen auf die vorliegenden Fragen gemacht. Zu diesem Zwecke wird zuerst ein Ueberblick über die Theorie der Transformationsgruppen gegeben, wobei natürlich auf Lie's grosses Werk zur näheren Belehrung verwiesen wird. Die folgenden Paragraphen behandeln Beispiele und Invarianten von Transformationsgruppen, die Invariante in einem besonderen Falle. Die Gruppen, die einer in den Differentialen homogenen linearen Gleichung und einer in den Differentialen quadratischen Gleichung genügen, werden in zwei weiteren Paragraphen untersucht, und dann folgt die Darstellung des Zusammenhanges zwischen den allgemeinen Raumformen und den Transformationsgruppen. Nachdem so gezeigt ist, dass die Theorie der allgemeinen Raumformen eng mit derjenigen der Transformationsgruppen zusammenhängt, wird die Frage nach denjenigen Eigenschaften aufgeworfen, welche zur Charakterisirung der eigentlichen Raumformen geeignet sind. Dies führt zur Erörterung der von Helmholtz angegebenen Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, und zu Lie's Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Eine andere Charakterisirung der eigentlichen Raumformen wird vom Verf hinzugefügt. Ein Rückblick auf das Ganze führt die Ansichten des Verf. dem Leser noch einmal übersichtlich vor die Augen. Lp.

M. Pieri. I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. Torino Mem. (2) **48**, 1-62.

In der Einleitung wird der Gegensatz hervorgehoben zwischen der elementaren Geometrie, deren Begriffe und Postulate ihren Ursprung in Thatsachen der Erfahrung haben, und der projectiven Geometrie, wie sie von v. Staudt begründet wurde, die rein abstract ihre Begriffe bilden und rein deductiv zu ihren Resultaten gelangen kann, ohne auf das

Hülfsmittel der Anschauung angewiesen zu sein. In dem empirischen Ursprunge der Begriffe und mehr noch in der ausschliesslichen Verwendung der Wortsprache bei den logischen Operationen mit diesen Begriffen erblickt der Verf. in Uebereinstimmung mit Pasch eine Hauptursache von Unklarheiten, verschiedenartigen Auffassungen desselben Gegenstandes, wie sie bei der exactesten aller Wissenschaften nicht vorkommen dürften. Er unternimmt es daher, ohne dem gegenteiligen Verfahren seinen Wert abzusprechen, die Grundgesetze der Geometrie der Lage erstens rein abstract und speculativ, ohne Beziehung auf das Anschauliche, zweitens in der Sprache und den Schlussweisen von Peano's Algebra der Logik darzustellen, jedoch — zur Erleichterung für den Leser — überall unter Hinzufügung der gewohnten Ausdrucksweisen, abgesehen von einzelnen verwickelteren, in der Wortsprache schwer darstellbaren Resultaten. Die Zahl der erforderlichen Grundbegriffe ist auf zwei reducirt, den „projectiven Punkt“ und die „Verbindungslinie zweier projectiven Punkte“. Auch die im Gange der Untersuchung allmählich erforderlich werdenden 19 Postulate enthalten nur diese Begriffe. Ueber die Unabhängigkeit dieser Postulate von einander und die Möglichkeit, ihre Zahl zu reduciren, wagt der Verf. noch kein Urteil; ausreichend haben sie sich in allen Fällen erwiesen. Im übrigen werden in den 12 Abschnitten der Arbeit nach einander behandelt: Die primitiven Elemente (projectiven Punkte), projective Geraden und Ebenen, das ebene Viereck und die harmonische Beziehung, projective Strecken und Dreiecke, Transformationen, harmonische Correspondenzen nebst dem Satze von Staudt, der gewöhnliche und der absolute projectivische Raum. In einem Anhange wird die Frage der Unabhängigkeit der 19 Postulate von einander erörtert. Schg.

G. Veronese. Segmenti e numeri transfiniti. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 79-87.

Erwiderung auf die Einwände von Schönflies (Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projectivische Geometrie, Deutsche Math.-Ver. **5**, 79-81. Sur les nombres transfinis de M. Veronese, Rom. Acc. L. Rend. (5) 6_2, 362-68; F. d. M. **28**, 63 u. 415, 1897) gegen die Veronese'schen transfiniten Zahlen, sowie auf einige Bemerkungen von Klein über die Fondamenti di geometria. Vi.

P. Cassani. Sui fondamenti della geometria. Considerazioni e proposte. Ven. Ist. Atti (7) **10**, 42-60.

Nach allgemeinen Betrachtungen über das Wesen der Geometrie macht der Verf. einen neuen Versuch, ein zum Aufbau der Geometrie genügendes System von Definitionen und Axiomen aufzustellen. Er leitet dabei die Gerade und die Ebene nicht, wie Lobatschefsky und W. Bolyai, aus dem Begriffe der Kugelfläche ab, sondern aus dem des Kreises, den er als den Ort aller Punkte definirt, die von zwei festen Punkten gleiche und constante Abstände haben. El.

C. Burali-Forti. Les postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1,** 1897, 247-250.

Kurzer Bericht über die Bestrebungen des Verf., zu einem vollständigen System von Postulaten für die euklidische Geometrie zu gelangen. St.

W. Burnside. The construction of the straight line joining two given points. Lond. M. S. Proc. **29,** 125-132.

Legt man der Geometrie der Ebene eine hyperbolische Massbestimmung zu Grunde, so giebt es drei Arten von Punkten: Punkte im Endlichen, Punkte im Unendlichen und ideale Punkte, und die Aufgabe, zwei gegebene Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden, bietet je nach der Art der Punkte sechs verschiedene Möglichkeiten, von denen nur eine, bei der die beiden Punkte im Endlichen liegen, durch das Lineal allein gelöst werden kann. Der Verf. giebt im Anschluss an eine frühere Arbeit über die Kinematik des nichteuklidischen Raumes (F. d. M. **26,** 535, 1895) einfache geometrische Constructionen für die fünf anderen Fälle. St.

F. Engel. Zur nichteuklidischen Geometrie. Leipz. Ber. **50,** 1898, 181-191.

In seiner 1829 und 1830 erschienenen Arbeit „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie" macht Lobatschefsky die beiläufige Bemerkung, aus gewissen Formeln folge, dass jedem geradlinigen Vierecke, das drei rechte Winkel enthält, ein geradliniges rechtwinkliges Dreieck zugeordnet sei, dessen Seiten und Winkel durch die Seiten und den spitzen Winkel des Vierecks vollständig bestimmt sind. Hieraus ergeben sich, wie Engel bemerkt hat, zwei Auflösungen der Aufgabe, in der Lobatschefsky'schen Ebene durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen, von denen die erste bereits Johann Bolyai in § 34 des „Appendix" (1832) angegeben und analytisch bewiesen hatte, während die zweite, die noch einfacher ist, erst im Jahre 1897 von Engel veröffentlicht wurde. Der erste Teil der vorliegenden Abhandlung enthält nun eine rein geometrische Herleitung der Bemerkung Lobatschefsky's, so dass man also mit einem Schlage beide Parallelenconstructionen rein geometrisch beweisen kann.

Der zweite Teil der Abhandlung betrifft die Lobatschefsky'sche Function $\Pi(x)$, die den zu einem Lote x gehörigen Parallelwinkel darstellt. Um $\Pi(x)$ zu bestimmen, benutzt Lobatschefsky recht schwierige Grenzübergänge und gelangt schliesslich zu einer Functionalgleichung, aus der die Definitionsgleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$ der Function $\Pi(x)$ folgt. Dieselbe Gleichung wird auch von Johann Bolyai abgeleitet, der ebenfalls Grenzübergänge, jedoch keine Functionalgleichung gebraucht. Engel zeigt nun, dass man auch die Grenzübergänge vermeiden kann, sobald man die beiden bekannten Sätze der Lobatschefsky'schen Geometrie voraussetzt: 1. Sind s und s' zwei Grenzlinienbogen zwischen zwei

parallelen Axen, und ist x das Stück, das auf jeder dieser beiden Axen zwischen den Bogen s und s' liegt, so ist $s' = s.e^{-x}$; 2. für Grenzbogendreiecke auf einer Grenzfläche gelten alle Sätze der euklidischen Geometrie. St.

P. Mansion. Mélanges de géométrie euclidienne et non-euclidienne. (Ohne Ort und Datum.) 24 u. 14 S. 8°.

Eine Zusammenstellung kleinerer Aufsätze, die der Verf. grösstenteils schon anderwärts veröffentlicht hatte (z. B. in Brux. S. sc. 1895-97). Sie enthält: 1. Bemerkungen über die nichteuklidische Geometrie vor Lobatschefsky auf Grund des Buches von Stäckel und Engel: Die Parallelentheorie von Euklid bis auf Gauss. 2. Die Hauptprincipien der nichteuklidischen Geometrie Riemann's. 3. Die drei Arten der Metageometrie (Riemann'sche, Lobatschefsky'sche, euklidische Geometrie). 4. Relationen zwischen den Abständen von 5 oder 6 Punkten in den verschiedenen Geometrien. Der Verf. bespricht und entwickelt die Relationen von Schering und von Lagrange und giebt eine neue Form der Distanzrelation zwischen fünf Punkten der Riemann'schen Geometrie. 5. Sind die Riemann'sche Ebene und die euklidische Kugelfläche identisch? 6. und 8. Eine elementare Methode zur Darstellung der Principien der nichteuklidischen Geometrie. 7. Der analytische Ausdruck für das Volumen in der nichteuklidischen Geometrie. El.

F. Dauge. Sur la limite vers laquelle tend un certain triangle lobatchefskien. Mathesis (2) 8, 267-272.

Grenze des Dreiecks ABC_n, das aus ABC durch n Operationen folgendermassen abgeleitet wird: Bei dem Dreiecke ABC_{k+1} ist die Mitte der Seite AC_{k+1} auch die Mitte von BC_k. Der Verf. beweist, dass die Winkel C_nAB, AC_nB nicht die Null zur Grenze haben, im Widerspruch mit einer Behauptung Legendre's. Mn. (Lp.)

F. Dauge. Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemannienne. Mathesis (2) 8, 5-20.

P. Mansion. Pour la géométrie non-euclidienne. Mathesis (2) 8, 33-43.

Dauge sucht zu beweisen, dass es nicht möglich ist, sich nichteuklidische dreidimensionale Gebilde vorzustellen, besonders nicht die Riemann'schen Gebilde; die ebenen nichteuklidischen Gebilde sind in Wahrheit Figuren, die auf Kugeln oder Pseudosphären gezeichnet sind. Ein Beweis von Mansion in der Riemann'schen dreidimensionalen Geometrie lässt sich in der euklidischen dreidimensionalen Geometrie deuten.

Dagegen antwortet Mansion, das beweise gar nichts: man könne

sogar den fraglichen Beweis in der euklidischen oder nichteuklidischen eindimensionalen Geometrie deuten. Man darf vernünftige Wahrheiten nicht verwerfen, weil die Vorstellung (die sinnliche Anschauung) zu ihrer Darstellung unvermögend ist. Alle Einwände, die man gegen die nichteuklidische Geometrie erheben kann, lassen sich gegen die euklidische Geometrie wenden. Auseinandersetzung der allgemeinen Principien dieser letzteren. Die sogenannten Postulate sind Ergänzungen der Definitionen.

Mn. (Lp.)

P. Mansion. Deux nouvelles démonstrations du postulatum d'Euclide. Mathesis (2) **8**, 25.

P. Mansion. Encore une démonstration du postulatum d'Euclide. Mathesis (2) **8**, 188-191.

In allen Beweisen, bei denen man dazu kommt, zu zeigen, dass die Summe der Winkel eines gewissen n-Ecks grösser als $2n-4$ Rechte ist, schneidet sich in Wahrheit der Umfang dieses Vielecks, und somit stellt der Beweis einfach das Lambert'sche Defect-Theorem her.

Mn. (Lp.)

W. P. Alexejewsky. Ueber die Definition der Länge in der nichteuklidischen Geometrie. Charkow Ges. (2) **6**, 139-153. (Russisch.)

Als Definition wird angenommen: Länge des Segmentes cx ist die Coordinate x des Endpunktes des Segmentes. Es ist nicht notwendig, den Coordinatenanfang im Anfangspunkte des Segmentes anzunehmen, wie auf der gemessenen Geraden, so auch auf dem Massstabe; deshalb kann die Länge des Segmentes ohne Ausdehnung durch eine beliebige Zahl ausgedrückt werden. Si.

F. Klein. Zur ersten Verteilung des Lobatschefsky-Preises. Kasan Ges. (2) 8_1, 1-27.

Bericht in F. d. M. **28**, 417, 1897; auch in Math. Ann. abgedruckt (s. S. 35 dieses Bandes). Si.

Bericht über die erste Verteilung des Lobatschefsky-Preises. Kasan Ges. (2) **8**. (Russisch.)

Enthält die russische Uebersetzung des Gutachtens von F. Klein über den dritten Band der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen, von P. Nasimow über Fontené's „Hyperespaces à n—1 dimensions", von D. Seiliger über Cesáro's „Geometria intrinseca", von Th. Suworow über die Gérard'sche Thèse und den Bericht der Commission.

Si.

W. Kahan. Skizze des geometrischen Systems von Lobatschefsky. Spaczinski's Bote No. 269, 120-126; No. 270, 150-153. (Russisch.)

Fortsetzung der in F. d. M. **26**, 533, 1895 besprochenen Arbeit. Anwendung der Lobatschefsky'schen Geometrie auf die Analysis.

Si.

HADAMARD. Sur la géométrie non-euclidienne. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 24-25.

„Commentar zu den von Poincaré in der Revue générale des Sciences vom 15. Decbr. 1891 ausgesprochenen Gedanken.“ Lp.

HADAMARD. Sur la forme de l'espace. Bordeaux Procès - verbaux 1897/98, 83-85.

Um die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen der Natur des Raumes an sich und derjenigen der in ihm zu bewerkstelligenden Bewegungen darzuthun, denkt sich der Verf. in dem nach gewöhnlicher Art vorgestellten Raume ein beliebiges Parallelepiped und nimmt an, man betrachte nicht mehr als verschieden von einander solche Punkte, deren Verbindungsgerade die geometrische Summe von Strecken ist, die den Kanten des Parallelepipeds gleich und parallel sind, mit anderen Worten: dieses letztere wird als ein Perioden - Parallelepiped betrachtet. Der so erdachte Raum E' hat dieselben infinitesimalen Eigenschaften wie der gewöhnliche Raum E, sein Volumen ist, wie der Riemann'sche Raum, begrenzt, trotzdem mit demselben nicht vergleichbar.

Lp.

L. BIANCHI. Sull'applicabilità di due spazi colla medesima curvatura di Riemann costante. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 147-155.

Von dem bekannten Satze von Riemann: „Zwei Räume, welche dieselbe Dimension und dieselbe constante Krümmung haben, können über einander gelegt werden“, gab Lipschitz den ersten Beweis in seinen Untersuchungen über die quadratischen Differentialausdrücke. Der Verf. giebt hier einen zweiten sehr einfachen, welchen er in seinen Universitäts-Vorlesungen des Jahres 1894-95 benutzte und in die deutsche Uebertragung seines Lehrbuchs der Differentialgeometrie eingefügt hat. — In seiner Beweismethode betrachtet der Verf. zuerst den Fall, dass die zwei Räume eine verschwindende Krümmung haben; unter dieser Voraussetzung folgt der Lehrsatz aus der Reducirbarkeit ihrer Linearelemente auf die Form $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$. Haben die gegebenen Räume eine negative Krümmung $-1/R^2$ (pseudo-sphärische Räume), so sind ihre Linearelemente auf die Form $ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2)/y_1^2$ überführbar. Hieraus kann der Riemann'sche Satz gefolgert werden. Haben endlich die gegebenen Räume eine positive Krümmung R^2 (sphärische Räume), so bemerkt der Verf., dass das Theorem für $n = 2$ augenscheinlich ist, und dehnt es durch die vollkommene Induction auf ein beliebiges n aus. Auf diese Weise erhält er die folgende typische

Form des linearen Elementes eines sphärischen Raumes:

$$ds^2 = R^2(dy_1^2 + \sin^2 y_1 \,.\, dy_2^2 + \sin^2 y_1 \,.\, \sin^2 y_2 \,.\, dy_3^2 + \cdots + \sin^2 y_1 \,.\, \sin^2 y_2 \ldots \sin^2 y_{n-1} dy_n^2).$$

La.

A. N. Whitehead. The geodesic geometry of surfaces in non-Euclidean space. Lond. M. S. Proc. **29,** 275-324.

Lobatschefsky und Johann Bolyai haben gezeigt, dass in der hyperbolischen Geometrie die Kugel, wenn ihr Halbmesser ins Unendliche wächst, nicht in die Ebene, sondern in eine krumme Fläche, die „Grenzkugel", übergeht, und dass die geodätische Geometrie der Grenzkugel mit der euklidischen Geometrie identisch ist. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht etwa der Grenzkugel eigentümlich; sie kommt vielmehr allen Flächen des hyperbolischen Raumes zu, deren absolutes Krümmungsmass gleich Null ist. Der Verf. bestimmt die Rotationsflächen dieser Art, discutirt die Gestalt ihres Meridians und findet, dass man zwei Typen zu unterscheiden hat, zwischen denen die Grenzfläche den Uebergang bildet. Auch für den elliptischen Raum führt er die entsprechende Untersuchung durch; hier giebt es nur einen solchen Typus. Es möge noch bemerkt werden, dass Whitehead seine Resultate mittels Grassmann's Methode herleitet, die er mit grosser Eleganz handhabt.

St.

J. M. Page. The general transformation of the group of Euclidian movements. Annals of Math. **12,** 87-94.

Der Verf. untersucht nach Lie'schen Principien die Form der allgemeinsten Gruppe G_3, resp. G_6 der euklidischen Bewegungen in Ebene und Raum.

Durch passende Wahl rechtwinkliger Coordinatenaxen kann die Gruppe G_3 in die Gestalt einer blossen Rotation gebracht werden. Es werden dann die Quadraturen angegeben, die nötig sind, um die Gleichung der G_3 in endlicher Gestalt, sowie die Differentialinvarianten der G_3 aufzustellen. Bei der G_6 werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem zwischen den Coefficienten eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllt ist oder nicht. Im ersten Falle kann man die G_6 auf eine Rotation um eine Axe zurückführen, im zweiten Falle tritt noch eine Translation längs der Axe hinzu; hiermit werden bekannte kinematische Sätze bestätigt.

My.

J. Andrade. Le groupe d'équivalence et ses bases cinématiques. C. R. **126,** 1775-1777.

Während der Verf. in einer früheren Abhandlung (F. d. M. **28,** 417, 1897) gezeigt hatte, wie man bei der Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt wirken, veranlasst wird, zwischen den drei Geometrien von Lobatschefsky, Euklid und Riemann zu unterscheiden, untersucht

er jetzt in entsprechender Weise die Zusammensetzung von Rotationen. Sehr beachtenswert ist sein Vorschlag, dass die Gesamtheit der Sätze, die unverändert in allen drei Geometrien gelten, als „qualitative Geometrie“ bezeichnet werden möchte. St.

W. M. Strong. Is continuity of space necessary to Euclid's geometry? American M. S. Bull. (2) **4**, 443-448.

Mit Bezug auf eine Dedekind'sche Bemerkung („Was sind und was sollen die Zahlen?“ Vorwort, S. XII) über die Ausführbarkeit aller Constructionen der Elemente Euklid's in einem lückenhaften Raume, in dem nämlich nur die durch algebraische Zahlen darstellbaren Punkte als vorhanden angenommen sind, construirt sich der Verf. einen „quadratischen Raum“, in dem ausser den rationalen Operationen nur noch Quadratwurzel-Ausziehungen zugelassen sind, und zeigt, dass dieser quadratische Raum für die Ausführung aller elementar-geometrischen Constructionen ausreicht. Lp.

G. Brunel. Sur la décomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 18-21.

Bemerkungen zur Zerlegung zweier geometrischen Gebilde in congruente Stücke zum Zwecke des Nachweises der Inhaltsgleichheit, insbesondere über die Unmöglichkeit einer solchen Zerlegung bei zwei Pyramiden, was Bricard zu beweisen versucht hat (vergl. F. d. M. **27**, 407, 1896). Lp.

Hadamard. Sur les notions d'aire et de volume. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 25-27.

Vorschlag zu einer Abänderung des gewöhnlichen Ganges: 1. Das Product einer Seite und der zugehörigen Höhe ist für alle drei Seiten eines Dreiecks dasselbe. Die Hälfte dieses Productes heisst Inhalt des Dreiecks. 2. Die Verbindungslinien eines Punktes in der Ebene eines Dreiecks mit den drei Ecken desselben bestimmen mit den Seiten drei Dreiecke, deren algebraische Summe gleich dem Inhalte des Dreiecks ist. 3. Inhaltserklärung eines Polygons nach 2. Lp.

M. Frolov. La théorie des parallèles, démontrée rigoureusement. Essai sur le livre 1er des éléments d'Euclide. Paris, Bâle et Genève: Georg et Co. 46 S. 8°.

Dass auch dieser Versuch, das elfte euklidische Axiom zu beweisen, missglückt ist, hat der Referent in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Jahrgang 1898, hist. litt. Abt. S. 74-75) ausführlich nachgewiesen. St.

Weitere Litteratur.

L. BIANCHI. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Mem. Soc. Ital. delle Scienze (3) **11,** 267-352.

L. CERTO. Sull'equivalenza. Bollettino dell'Associazione Mathesis **2,** 1897-98, 17-19. Vi.

N. F. DUPUIS. On the transcendental geometry. Proc. and Trans. Roy. Soc. Canada (2) **3,** 3-16.

G. FRATTINI. Grandezze finite e indefinite. Roma 1897, 2 S. Vi.

G. LECHALAS. L'axiome de la libre mobilité. Revue de métaphys. **6,** 746-758.

H. POINCARÉ. On the foundations of geometry. Monist **9,** 1-43.

B. A. W. RUSSELL. Les axiomes propres à Euclide sont ils empiriques? Revue de métaphys. **6,** 759-776.

H. F. STECKER. Non-euclidean cubics. American M. S. Bull. (2) **5,** 9-10.

G. J. TSCHELPANOW. Bericht über die neueste Litteratur über die Raumanschauung. (1895-1898.) No. 4, 1-44. (Russisch.) Si.

F. VILLAREAL. Geometrias imaginarias ó no Euclidianas. Anales Soc. Cient. Argentina **46,** 23-32, 67-92, 128-148.

Kapitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie).

G. BRUNEL. Sur les surfaces et les espaces à un seul côté. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 26-27.

Gegenüber der Aussage von Poincaré in der Abhandlung Analysis situs (J. de l'Éc. Pol. (2) **1;** F. d. M. **26,** 541, 1895), dass es in einem n-dimensionalen Raume keinen $(n-1)$-dimensionalen, einseitigen geschlossenen Raum gebe, führt der Verf. Beispiele aus dem dreidimensionalen Raum an, die das Gegenteil zeigen. Dies rührt von der rein analytischen Definition des Ausdruckes „geschlossen" bei Poincaré her, der dabei die topologische Bedeutung des Ausdrucks nicht berücksichtigt hat. Lp.

N. DELAUNAY. Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes. S. M. F. Bull. **26,** 43-52.

Das Merkmal einer „einseitigen" Fläche besteht darin, dass die Normale eines ihrer Punkte entgegengesetzte Richtung erhalten hat, wenn der Punkt nach einer passend gewählten Bewegung auf der Fläche in seine Anfangsstellung zurückgekehrt ist. Modelle solcher Flächen, von

denen zuerst Möbius, später Darboux einzelne Beispiele gegeben haben, liefern u. a. rechteckige oder ringförmige, an einer Stelle (AB) offen geschnittene Papierstreifen $(ABBA)$, deren Ränder AB und AB so an einander befestigt werden, dass A auf B und B auf A fällt. Der Verf. stellt die allgemeinen Gleichungen der Regelflächen dieses Charakters auf und giebt eine allgemeine geometrische Definition der abwickelbaren unter ihnen. Es ergeben sich dabei Zusammenhänge mit der Theorie der Rückkehrpunkte der Curven und Analogien mit der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche. Auch die Eigenschaft des Längsschnittes eines in obiger Art ringförmig geschlossenen Bandes wird bemerkt, jedoch ohne Hinweis auf die hierher gehörigen Untersuchungen Simony's. Schg.

F. Dumont. Sur les surfaces réglées du troisième ordre à un seul côté. S. M. F. Bull. **26**, 137-138.

Aus den von Delaunay aufgestellten Bedingungsgleichungen für die Einseitigkeit einer Regelfläche (s. voriges Referat) geht hervor, dass diese Eigenschaft ein Unterscheidungsmerkmal ist zwischen dem von Darboux gegebenen einfachsten Beispiele einer solchen Fläche und der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung. Schg.

Hadamard. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 60-62.

Wie man auf einem einschaligen Hyperboloide in sich geschlossene Linien ziehen kann, die sich nicht zu einem Punkte zusammenziehen lassen, demnach auch geodätische Linien von diesem Typus vorhanden sind, so kann es, wie an einem bestimmten Beispiele gezeigt wird, auf anderen Flächen unendlich viele wesentliche Typen geschlossener Linien, also auch geodätischer Linien geben. Ausser denselben existiren solche geodätischen Linien, die zu den eben besprochenen asymptotisch sind, und andere, die ins Unendliche gehen. Falls eine geodätische Linie nicht zu den erwähnten Kategorien gehörte, müssten unendlich viele geschlossene geodätische Linien von immer höherem Typus vorhanden sein. Lp.

Hadamard. Sur les lignes géodésiques. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 115-117.

In Bezug auf die vierte Art der Geodätischen, die sich einer bestimmten geschlossenen Geodätischen nähern, dann sie verlassen, um sich einem complicirteren Typus zu nähern, dann zu einem dritten übergehen, und so fort, wird die Existenz gezeigt; ferner wird auch nachgewiesen, dass diese Geodätischen im Cantor'schen Sinne perfecte Mengen bilden, die nie continuirlich sind. Lp.

G. Brunel. Des contours tracés sur les surfaces. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 128-131.

Hadamard. Sur les lignes géodésiques. Ibid. 131.

Das von Brunel in der ersten Note bewiesene Theorem der Analysis Situs kann so ausgesprochen werden: Wenn ein reducibler Umlauf keine reducible Schleife gestattet, so sind die Gauss'schen Indices bezüglich aller Gebiete positiv. Mit Hülfe desselben folgert Hadamard: Jedem Typus von Linien, die zwei gegebene Punkte A, B verbinden, entspricht eine normale Geodätische dieses Typus, und nur eine. Jedem Typus von Linien, die einen gegebenen Punkt A mit einer gegebenen Geodätischen L verbinden, entspricht eine normale Geodätische dieses Typus, und nur eine. — Diese Sätze können indessen auch noch auf anderem Wege erschlossen werden. Lp.

P. Heegaard. Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang. Kjöbenhavn. 104 S. 8°.

G. Brunel. Polygones autoinscrits. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 35-39.

Ein Polygon ist sich selbst einbeschrieben und zugleich umbeschrieben, wenn durch jede Ecke eine Seite geht, die von den beiden die Ecke bildenden Seiten verschieden ist. Durch Verbindung dieser Aufgabe mit den aus n Elementen gebildeten Zweier- und Dreiersystemen (vergl. diesen Band S. 181 ff.) gelingt der Nachweis, dass solche Polygone nur für $n \gtreqqless 7$ existiren können, ohne dass jedoch die Realität dieser Lösungen erwiesen ist. Aus der Theorie der Configurationen $(33)_7$ und $(33)_8$ ist sogar bekannt, dass es keine reellen sich selbst eingeschriebenen Sieben- und Achtecke giebt. Durch ein kurz skizzirtes praktisches Verfahren hat der Verf. eine Anzahl sich selbst ein- und umbeschriebener Polygone hergestellt. Lp.

G. Brunel. Polygones à autoinscription multiple. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 43-46.

Ein Polygon heisst k-fach sich selbst einbeschrieben, wenn auf jeder der Geraden, von denen ein Abschnitt eine der Seiten des Polygons bildet, ausser den beiden Ecken, die diesen Abschnitt begrenzen, noch je k Ecken des Polygons liegen. Dabei wird dann weiter angenommen, dass nicht zwei Seiten des Polygons auf einer und derselben Geraden liegen. Der Fall $k = 1$ ist in der Note behandelt, über welche vorstehend berichtet ist. Der Fall $k = 2$ wird in der gegenwärtigen Note mit Hülfe der Configuration aus 35 Geraden untersucht, die sich zu je vieren in 35 Punkten schneiden, und auf denen ausserdem je vier von diesen 35 Punkten liegen. Die Frage, ob die so aufgestellten Tabellen wirklichen Polygonen entsprechen, bleibt unerledigt. Lp.

G. Brunel. Sur un problème de partitions. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 24-27.

Behandlung der von Hadamard aufgeworfenen Frage: Zwei Reihen von Punkten $1, 2, 3, \ldots, n$ und $1', 2', 3', \ldots, n'$ sind derartig, dass von jedem Punkte jeder Reihe zwei Kanten ausgehen, die an zwei Punkten oder an einem einzigen Punkte der anderen Reihe endigen; welches ist die Anzahl der verschiedenen Configurationen, die einem bestimmten Werte von n entsprechen? Die Aufgabe wird allgemein gelöst und die Lösung an einer Tabelle erläutert. „Hier, wie auch sonst oft in der Topologie, ergiebt sich die Aufzählung der möglichen Fälle aus ihrer Darstellung durch Symbole, die ihre wirkliche Bildung vermitteln, und die ausserdem diese Bildung liefern würden, wenn man sie verlangte.“

Lp.

G. Brunel. Sur le problème des alignements. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 28-32.

Bei einer Reihe von Aufgaben, die Cayley und Sylvester in Ed. Times während der siebziger Jahre gestellt haben, handelt es sich darum, eine gewisse Anzahl von Bäumen so zu pflanzen, dass diese Bäume in derselben Anzahl auf eine Reihe von Linien verteilt werden. Nach einem Hinweise der Verwandtschaft dieser Aufgaben mit dem Probleme der Configurationen und der combinatorischen Aufgabe der Zweier, Dreier, Vierer, ... (vergl. diesen Band S. 181 ff.) entwickelt der Verf. diese Gedanken näher an dem Falle des aus 9 Elementen gebildeten Dreiersystems.

Lp.

L. Klug. Die Configuration des Pascal'schen Sechseckes im allgemeinen und in vier speciellen Fällen. Kolozsvár: A. K. Ajtai. 132 S. 8°. Mit 3 Taf.

Bereits Veronese hatte die Untersuchung der Cfg. des Pascal'schen Sechsecks in der Weise weitergeführt, dass er die Gesamtheit der Schnittpunkte und der aus ihnen durch fortgesetztes Schneiden und Verbinden entstehenden neuen Punkte und Geraden ins Auge fasste. Diesen Weg hat der Verf. ebenfalls betreten und noch einige neue Resultate erhalten. Die Grundlage der Betrachtung ist die auf Plücker zurückgehende Auflösung der Configuration in Gruppen perspectiver Dreiecke. Bekanntlich lässt sich eine 10_3, wie schon S. Kantor that, in ein Viereck und ein Vierseit spalten; diese Vierecke und Vierseite hat der Verf. in ihren gegenseitigen Beziehungen besonders untersucht. Er giebt übrigens eine sehr ausführliche Discussion der gesamten Configuration.

Die Erörterung von vier speciellen Sechsecken bildet den Schluss.

Sfs.

F. Morley. On a regular rectangular configuration of ten lines. Lond. M. S. Proc. **29**, 670-673.

Sind a, b, c drei windschiefe Geraden, (bc), (ca), (ab) ihre gemeinsamen Lote, so kann man diese sechs Geraden als räumliches Sechseck auffassen und in ihm wieder die gemeinsamen Lote der drei Gegen-

seiten construiren. Der Verf. beweist nun, dass für diese drei Lote eine gemeinsame Normale existirt. Die Gesamtheit dieser 10 Geraden bildet die bezügliche Configuration. Sfs.

E. Ciani. **Sopra una certa configurazione di punti e rette relativa alla quartica piana.** Lomb. Ist. Rend. (2) **31,** 310-311.

Ist a eine Doppeltangente einer C_4, so bilden die 27 Polaren der 27 Punkte, in denen a von den übrigen 27 Doppeltangenten getroffen wird, eine Configuration $(27_5, 45_3)$; sie steht einer bereits von Martinetti beschriebenen Configuration dual gegenüber, die einer allgemeinen C_3' eingeschrieben ist. Analog ist diejenige des Verf. einer Curve dritter Klasse und vierter Ordnung umbeschrieben, die a als Doppeltangente hat. Sfs.

E. Ciani. **Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer.** Batt. G. **36,** 68-76.

Im Anschluss an seine früheren Arbeiten (F. d. M. **27,** 381, 1896) über die verschiedenen Typen Kummer'scher Configurationen, die zu denselben sechs Fundamentalcomplexen gehören, zeigt der Verf., dass, wenn unter diesen Configurationen eine singuläre auftreten soll, bei der mindestens drei der 16 Punkte auf einer Geraden liegen, dann im allgemeinen eine (16_7) entsteht, erzeugt durch die 16 Schnittpunkte von zwei Geradenquadrupeln derselben F_2, die doppelt gezählt die Kummer'sche Fläche darstellt. Der Verf. giebt zweitens eine Aufzählung und Construction aller Typen von Gruppen von sechs Punkten auf einer C_2, von der Art, dass ein, zwei, resp. mehr (ν) Tripel von drei durch einen Punkt gehenden Geraden durch sie laufen. Er kommt dadurch zugleich zu dem Resultat, dass diejenige Lage der sechs Punkte, die in den singulären Ebenen einer mehrfach tetraedroidalen Kummer'schen Configuration auftritt, jeden der gefundenen Typen repräsentiren kann. Die Maximalzahl ν ergiebt sich auch hier als sechs. Sfs.

K. Spindler. **Ein Beitrag zur Einführung in das Gebiet der räumlichen Configurationen (Fortsetzung).** Pr. (No. 553) Gymn. Diedenhofen. 28 S. 4°.

Aufzählung der allereinfachsten Eigenschaften der Configuration der desmischen Tetraeder. Sfs.

E. Cesaro. **Des polyèdres superposables à leur image.** Belg. Mém. **53,** 40 S.

E. Cesaro. **Sur quelques propriétés des polyèdres non-centrés superposables à leur image.** Belg. Mém. **53,** 15 S.

Die zweite Abhandlung, welche in Belg. Bull. (3) **33,** 392-394 besprochen ist, enthält neue Beweise von Lehrsätzen, die in der ersten

Abhandlung hergeleitet sind. Ueber diese vergleiche man Belg. Bull. (3) **32,** 226-231 und F. d. M. **27,** 382, 1896. Mn. (Lp.)

A. Berger. Om de konvexa Polyedrarne. Stockholm. 26 S. 8°.

Em. Weill. Quelques remarques sur le théorème d'Euler concernant les polyèdres. Nouv. Ann. (3) **17,** 120-128.

Der Verf. giebt einige Beispiele nicht einfach zusammenhängender Polyeder, für die der Euler'sche Satz nicht gilt. Sfs.

G. Gallucci. Studio sui tetraedri biomologici con applicazione alla configurazione armonica ed alla configurazione di Klein. Napoli Rend. (3) **4,** 62-70.

P. del Pezzo. Rapporto. Ibid. 61.

Der Verf. dehnt die Untersuchung der bezüglichen Configuration auch auf diejenigen Geraden aus, die nur zwei oder drei der 60 Fundamentalpunkte enthalten, und zeigt ihre Verteilung sowie die durch sie gehenden F_2. Grundlage ist die vorhergehende Analyse einer Gruppe von je zwei Geradenquadrupeln derselben F_2, des Systems ihrer 16 Schnittpunkte und der aus ihnen gebildeten Tetraeder, die im allgemeinen aus Paaren hyperboloidischer Tetraeder bestehen, aus zweifach perspectiven, falls die Geradenquadrupel projectiv sind, aus vierfach perspectiven, wenn sie harmonisch sind. Sfs.

G. Gallucci. Discussione elementare dei casi di pluriomològia dei tetraedri. Periodico di Mat. **13,** 95-101.

Die Erörterung der Fälle mehrfacher Homologie der Dreiecke verdankt man Schröter und Rosanes (Math. Ann. **2**). Die entsprechende Forschung für die Tetraeder hat Ed. Hess in der Abhandlung angestellt: „Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Tetraeder“ (Math. Ann. **28**), wo die verschiedenen Fälle sowohl für das Dreieck als auch für das Tetraeder bis in die Einzelheiten behandelt sind. Die auf vier Arten homologen Tetraeder waren schon gründlich von O. Hermes, Stephanos, Veronese, Reye, Vietor u. a. studirt. Hess bewies, dass nur noch ein Fall möglich ist, derjenige der bloss auf zwei Arten homologen Tetraeder, und ermittelte einige Eigenschaften solcher Tetraeder. Das Verfahren von Hess ist analytisch, und dasjenige der anderen diesen Gegenstand behandelnden Arbeiten ist durchaus nicht elementar. Schröter allein geht in einer Abhandlung (J. für Math. **109**) auf elementare Herleitung der Grundeigenschaften der desmischen Tetraeder aus unter Benutzung einer a priori gegebenen Construction. Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes besteht in einer Umarbeitung der Hess'schen Erörterung, aber auf synthetische und ganz elementare Art; ferner werden aus der wirklichen Construction der

auf vier oder auf zwei Arten homologen Tetraeder ihre Haupteigenschaften abgeleitet. Lp.

G. Bbunel. Réseaux réguliers. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 3-7.

G. Brunel. Polymérisation du carbone. Ibid. 8-10.

In einem (räumlichen) Netze sei S (sommets) die Anzahl der Ecken, A (arêtes) die Anzahl der Kanten, q die Anzahl der mit den Kanten des Netzes gebildeten unabhängigen, in sich geschlossenen Umläufe, so besteht die Beziehung (1) $A - S + 1 = q$. „Regelmässig" wird das Netz genannt, wenn von jeder Ecke gleich viel (n) Kanten ausgehen. Für diese Zahl n besteht die weitere Beziehung (2) $nS = 2A$; mithin (3) $(n-2)A = n(q-1)$ oder auch

$$(4)\qquad \frac{1}{A} = \frac{1}{q-1} \cdot \frac{n-2}{n}, \quad \frac{1}{S} = \frac{n-2}{2(q-1)}.$$

Indem nun für q und n aufsteigende Zahlenwerte eingesetzt werden, entwirft der Verf. Tabellen der charakteristischen Zahlen für die regelmässigen Netze, über deren Typen und Existenz einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

In der zweiten Note wird auf den Zusammenhang dieser Betrachtungen mit den Structurformeln der Chemie aufmerksam gemacht; ein Beispiel aus den Kohlehydraten dient zur Erläuterung. Lp.

G. Brunel. Sur les configurations régulières réciproques tracées sur une surface fermée quelconque. Bordeaux Procès-verbaux 1893/94, 63-65.

Reciprok und regelmässig heisst die auf einer Fläche gezeichnete Configuration, wenn die Anzahl der Flächen gleich der Anzahl der Ecken ist. Dann hat man $A = n\lambda/(n-4)$, $S = 2\lambda/(n-4)$. Hieraus werden für $\lambda = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ die zulässigen Zahlen bestimmt (vergl. das vorangehende Referat). Lp.

G. Brunel. Configurations tracées sur une surface fermée quelconque et ne possédant qu'un sommet et qu'une face. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 13-15.

Die verallgemeinerte Euler'sche Formel $F + S = A - \lambda$ giebt für $F = S = 1$ als kleinste mögliche Zahlen $A = \lambda + 2$, wo λ eine für die Fläche mit der aufgezeichneten Figur charakteristische Zahl ist. Es werden einige Betrachtungen über die Constructionen solcher Figuren angestellt; die einfachsten Fälle auf einer einseitigen Fläche und auf einem Torus dienen zur Erläuterung. Lp.

G. Brunel. Sur les configurations régulières tracées sur des surfaces fermées quelconques. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 4-8.

Wenn von jeder Ecke einer auf einer Oberfläche verzeichneten Configuration dieselbe Anzahl n von Kanten ausgeht, und wenn jede Fläche von m Seiten begrenzt wird, so heisst die Configuration „regulär", und man hat in der Bezeichnung der vorangehenden Referate $mF = nS = 2A$. Die Zahl λ, welche für Flächen wie die Kugel gleich -2 ist, sonst aber > -2 sein kann, ist für zweiseitige Flächen eine gerade Zahl, kann also gleich $(p-1)$ gesetzt werden; dann heisst p das Geschlecht der Fläche. Für jedes Geschlecht giebt es nur eine beschränkte Anzahl von Wertepaaren für m und n. Vom Verf. ist schon 1895 auf einer Ausstellung zu Bordeaux eine Tafel für den Fall der Oberflächen vom Geschlechte 2 mit den 25 Systemen algebraisch möglicher Configurationen bekannt gegeben. Im Jahre 1896 hat H. S. White dieselbe Frage behandelt (vergl. F. d. M. **27**, 817, 1896) und ist zu denselben Resultaten gekommen. Den Benennungen „specielle" und „abgeleitete" Configurationen dieses Autors entsprechen bei Brunel die Namen Primconfigurationen und zusammengesetzte. In einer Tabelle werden für $\lambda = 1, 2, \dots, 24$ die Wertepaare für m und n zusammengestellt, die regulären Primconfigurationen entsprechen. Lp.

G. Brunel. Sur quelques configurations polyédrales. Bordeaux Procès-verbaux 1897-98, 20-23.

Auf einer geschlossenen Oberfläche vom Geschlechte Null betrachte man solche Configurationen, dass von jeder Ecke dieselbe Anzahl k von Kanten ausgehe. Ist f_p die Anzahl der von p Kanten begrenzten Flächen, so giebt das verallgemeinerte Euler'sche Theorem (1) $4k = \Sigma[2p-(p-2)k]f_p$. Für $k = 3$ also:

$$(2)\quad 12 = 5f_1 + 4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + 1.f_5 + 0.f_6 - 1f_7 - 2f_8 - \cdots;$$

es fällt also die Anzahl der Sechsecke aus dieser Relation heraus. Hat die Configuration $P_m(n,r)$ ausser r Sechsecken nur noch m-Ecke in der Anzahl m, so folgt aus (2), dass nur die Configurationen $P_2(3,r)$, $P_3(4,r)$, $P_4(6,r)$, $P_5(12,r)$ noch existiren. In den Configurationen $P_2(3,r)$ ist $r = x^2+xy+y^2-1$, wo x, y beliebige ganze Zahlen $\gtreqless 0$ bezeichnen, mit Ausnahme des Paares 0,0. Lp.

G. Brunel. Configurations régulières sur des surfaces quelconques. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 224-226.

Während die früheren Untersuchungen des Verf., die auf beliebigen geschlossenen Oberflächen gezeichneten Configurationen betrafen, beschäftigt er sich in dieser Note mit derselben Frage bei Oberflächen, die durch Konturen in willkürlicher Anzahl begrenzt sind. Lp.

H. S. White. The construction of special regular reticulations on a closed surface. American M. S. Bull. (2) 4, 376-382.

Fortsetzung der Betrachtungen aus American M. S. Bull. (2) **2**,

116-121 (F. d. M. **27**, 817, 1896). Ist r die Anzahl der in jeder Ecke zusammenstossenden Kanten, s die Anzahl der jede Fläche begrenzenden Kanten, p das Geschlecht (deficiency) der krummen Oberfläche, welche Trägerin des regelmässigen Netzes ist, so ist durch diese drei Zahlen das letztere charakterisirt. Die frühere Mitteilung bezog sich auf die Fälle $p = 2$ und $p = 3$. Unter den tabulirten Zahlen bestehen gewisse Zusammenhänge, welche die Ableitung von Typen aller zu derselben Oberfläche gehörigen aus einem einzigen Grundnetze wahrscheinlich machen, falls $p < 9$ ist. Nachdem jedoch Davis das Vorkommen ausnahmsweiser Paare von Charakteristiken r, s nachgewiesen hat, denen solcher Zusammenhang abgeht, schliesst der Verf. diese „Davis-Netze" aus und beschränkt das Problem auf die Construction eines Grundnetzes für jede Oberfläche. Dies kann immer nach einer von Riemann herrührenden Methode geschehen, der sogenannten kanonischen Zerschneidung einer Riemann'schen Fläche mit gewissen unzweifelhaft zulässigen Abänderungen. Als die drei wesentlichen Teile der systematischen Verification jeder Tabelle zulässiger Netze bezeichnet der Verf.: 1. die wechselseitigen Ableitungen zweier dualen Netze auseinander, 2. zwei (duale) Verfahren zur Vervielfältigung der Anzahl der Ecken oder der Flächen, 3. die Zerschneidung einer Riemann'schen Fläche in ein Grundpolygon. Diesen drei Punkten sind die drei Paragraphen der Arbeit gewidmet. Dem zweiten Paragraphen ist eine Tabelle der speciellen regulären Netzzahlen beigegeben. Lp.

E. W. Davis. Note on special regular reticulations. American M. S. Bull. (2) **4**, 529-530.

Mit Bezug auf die Untersuchungen von White über reguläre Netze auf beliebigen Flächen weist der Verf. nach, dass, wenn die Anzahl der Flächen F kleiner als die Anzahl der Ecken E ist, daraus nicht notwendig für dieselbe Fläche ein anderes reguläres Netz folgt mit derselben Anzahl der Flächen F und einer Anzahl von Ecken E_1, die höchstens gleich E sei. Zum Schlusse bemerkt er aber, dass alle seine Versuche zur Verwirklichung solcher berechneten Ausnahmenetze misslungen seien, dass aber auch kein Beweis der Unmöglichkeit ihrer Construction geglückt sei.

Lp.

H. Brunn. Ueber verknotete Curven. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 256-259.

Eine allgemeine Reduction eines Knotens auf sein einfachstes Schema wird hier so gegeben, dass man zunächst alle Doppelpunkte der ebenen Projection des Knotens (Curvenschema) in einen Punkt bringt, so dass alle Knoten selbst im Raume in eine Gerade fallen. Sfs.

E. Hess. Ueber eine anschauliche Darstellung der regelmässigen Einteilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. Marb. Ges. z. Beförd. d. Naturw. 1898, 89-108.

Gegenstand der Darstellung sind die den vierdimensionalen regelmässigen Polytopen auf der Kugel entsprechenden Gebietsteilungen. Die Methode besteht in ihrer stereographischen Projection in den dreidimensionalen Raum, nebst Benutzung des Polyederkaleidoskops, das aus einem Fundamentalbereich der bezüglichen Raumteilung das Gesamtbild entstehen lässt. Sfs.

G. Brunel. Sur un problème de stéréotomie. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 10-12.

Mit Hülfe der bekannten Zerschneidung eines Rechteckes in solche Stücke, dass dieselben zu einem Quadrate zusammengesetzt werden können, und unter Zuhülfenahme der Fläche $xyz = 1$ ermittelt der Verf. Zerschneidungen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, so dass die Stücke sich zu einem Würfel zusammenfügen lassen. Lp.

G. Brunel. Décomposition d'un carré en quatre parties superposables. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 161-163.

Das Quadrat wird schachbrettartig in $4n^2$ quadratische Felder geteilt; dann wird gezeigt, wie man längs der Grenzen der Felder Schnitte zu legen hat. Durchgeführt für $n = 4$. Lp.

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

G. Lazzeri e A. Bassani. Elementi di geometria. Con 312 figure intercalate. Seconda edizione migliorata. Livorno: Raffaello Giusti. XVI + 380 S. 8°.

Die Verschmelzung des Unterrichtes in der Planimetrie mit dem in der Stereometrie ist von den Verf. des vorliegenden Lehrbuchs an der Accademia Navale zu Livorno vollzogen worden; der dabei befolgte Lehrgang wurde erst vier Jahre lang erprobt, bevor die im Gebrauche gewesenen lithographirten Entwürfe zu einem Lehrbuche vereinigt wurden, das 1891 in erster Auflage erschien. Ausser diesem Grundgedanken der gleichzeitigen Einführung des Schülers in die ebenen und räumlichen geometrischen Gebilde war die Rückkehr zur rein geometrischen, euklidischen Methode unter Ausschluss arithmetischer Beweise das weiter erstrebte Ziel, wobei die Elementi di geometria von Sannia e d'Ovidio erfolgreich vorangegangen waren (vergl. F. d. M. **20**, 525, 1888). Inzwischen hat sich die Zahl der Anhänger einer Behandlung der ganzen Geometrie vom ersten Unterricht an in Italien beträchtlich vermehrt (vergl. die Berichte auf S. 58 dieses Bandes), und daher konnten die

Verf. mit Genugthuung eine verbesserte Auflage ihres tüchtigen Werkes herausgeben. Wegen des allgemeinen Interesses, das eine so einschneidende, von hervorragenden Geometern befürwortete Aenderung im Unterrichte der elementaren Geometrie beansprucht, setzen wir das Inhaltsverzeichnis her, aus dem jeder die Folge der Gegenstände beurteilen kann.

Vorbegriffe. I. Buch. 1. Die geometrischen Figuren. Gerade und Ebene. 2. Strecken, Winkel und Dieder. 3. Erste Begriffe über den Kreis und die Kugel. 4. Parallele Gerade. Zu Ebenen parallele Gerade. Parallele Ebenen. 5. Senkrechte Gerade und Ebenen. — Uebungsaufgaben.

II. Buch. 1. Vielecke. Congruenz von Dreiecken und Vielecken. Construction von Dreiecken und Vielecken. Vierecke. 2. Vielkante. Congruenz von Dreikanten und Vielkanten. Construction von Dreikanten und Vielkanten. 3. Polyeder. Pyramide. Prisma. Parallelepiped. 4. Abstände. — Uebungsaufgaben.

III. Buch. 1. Beziehungen zwischen Geraden, Ebenen und Kugeln. Beziehungen einer Geraden zu einem Kreise oder einer Kugel und einer Ebene zu einer Kugel. Beziehungen von Winkeln zu einem Kreise. Beziehungen zwischen zwei Kreisen in einer Ebene und zwischen zwei Kugeln. Einige Aufgaben. 2. Beziehungen von Polygonen zu einem Kreise und von Polyedern zu einer Kugel. Regelmässige Vielecke. Regelmässige Polyeder. 3. Geometrie auf der Kugel. Sphärische Winkel und Vielecke. Kreise auf der Kugel. Sphärische Vielecke, einem Kreise auf der Kugel ein- oder umbeschrieben. 4. Rotationsflächen und Rotationskörper. Kegelfläche und Kegel. Cylinderfläche und Cylinder. — Uebungsaufgaben.

IV. Buch. 1. Allgemeine Theorie der Gleichheit. 2. Gleichheit von Polygonen und von Polyederoberflächen. Umwandlung der Vielecke in gleiche Rechtecke einer nämlichen Reihe. Beziehungen von Rechtecken oder Quadraten über den Seiten eines Dreiecks oder eines Vierecks. Einige Aufgaben. Gleichheit einiger Polyederoberflächen. 3. Gleichheit sphärischer Vielecke und sphärischer Pyramiden. 4. Gleichheit der Prismen. 5. Grenzgrössen. 6. Gleichheit der Polyeder. 7. Gleichheit beim Kreise und bei krummflächigen Körpern. Gleichheit beim Kreise. Gleichheit bei dem Körper und der Oberfläche des Cylinders. Gleichheit bei der Oberfläche und dem Körper des Kreiskegels. Gleichheit bei der Oberfläche und dem Körper der Kugel.

V. Buch. 1. Theorie der Proportionen. Commensurable und incommensurable Grössen, proportionale Grössen. Proportionalität von Strecken, Flächen und Körpern. 2. Homothetie und Aehnlichkeit. Homothetische Figuren. Aehnliche Figuren. Einige Aufgaben. 3. Messen. Masseinheiten. Länge der Kreislinie. Inhalte der Oberflächen. Volumina der Körper. 4. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie. Algebraische Beziehungen zwischen den Elementen eines Dreiecks, eines Kreisvierecks und eines Tetraeders. Messung der Seiten, der Apotheme und der Flächen einiger regelmässigen, einem Kreise ein- oder umbeschriebenen Vielecke als Function des Radius. Messung der Ober-

flächen und der Inhalte der regelmässigen Polyeder. Berechnung der Zahl π. — Uebungsaufgaben.

Zum Schlusse bemerken wir nur noch, dass sowohl die innere wissenschaftliche Durcharbeitung als auch die äussere Ausstattung des Werkes auf gleicher Höhe stehen. Die den einzelnen Büchern beigegebenen Uebungsaufgaben erreichen die stattliche Anzahl von 1067.

Lp.

J. A. Third. Modern geometry of the point, straight line, and circle, an elementary treatise. Edinburgh and London: William Blackwood and Sons. VIII + 227 S. 8°.

In diesem Buche wird die Kenntnis der ersten sechs Bücher der euklidischen Elemente vorausgesetzt; es kann also als eine Ergänzung zum Euklid angesehen werden, zugeschnitten auf englische Schulen. Als eine Einleitung in die neuere Geometrie, so weit dieselbe gegenwärtig in die Mittelschulen hineingenommen werden kann, ist das Buch vortrefflich. Der Stoff ist gut angeordnet, die Auswahl der Sätze ist verständig, und die Darstellung ist klar.

Gbs. (Lp.)

Močnik. Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien. Bearbeitet von J. Spielmann. 1. Abt. 25. Auflage, 2. Abt. 20. Auflage. Wien u. Prag: F. Tempsky. IV + 82 u. 91 S. 8°.

Es ist dies ein Lehrgang der elementaren Geometrie, der wesentlich auf Anschauung gegründet ist; er beginnt mit der Betrachtung des Würfels und Cylinders und fügt daran die Lehre von den Körpern, Flächen, Linien und Punkten und hiermit die Einleitung in die Geometrie. Im ersten Teil wird die Planimetrie behandelt, und zwar: gerade Linien, Kreis, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Congruenz, Kreiseigenschaften, Vierecke, Vielecke.

Im zweiten Teile folgt dann die Flächengleichheit der ebenen Figuren, ihre Ausmessung, die Ausmessung des Kreises; dann die Aehnlichkeit der Dreiecke und Polygone, ferner planimetrische Rechenaufgaben, die durch Quadratwurzelziehung gelöst werden. Dann folgt die Stereometrie und zwar: Gerade Linien und Ebenen im Raume, Körper und ihre Ausmessung. Druck und Ausstattung des Buches sind befriedigend.

Mz.

J. Alexandroff. Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution. Traduit du russe, sur la sixième édition par D. Aitoff. Paris: A. Hermann. XI + 154 S. 8°.

Das Buch ist nach denselben Principien angelegt wie Petersen's „Methoden und Theorien“, einerseits etwas ausführlicher bei den Musterbeispielen und gelösten Aufgaben, andererseits aber auch wieder nicht so weitgehend; so fehlen z. B. das Schneiden von Kreisen unter bestimmten Winkeln und die Berührungsaufgabe des Apollonius. Die

einzelnen Kapitel behandeln den geometrischen Ort, den Aehnlichkeitspunkt, die Symmetrie, die Parallelverschiebung und die Drehung, die Inversion und die Anwendung der Algebra auf geometrische Aufgaben. Jedesmal wird zuerst die Methode ausführlich erörtert, dann durch mehrere vollständig gelöste Beispiele erläutert, worauf die einschlagenden Uebungsbeispiele folgen. — Der Uebersetzer glaubt trotz der vorhandenen reichen Litteratur über geometrische Aufgaben gerade in Frankreich eine Lücke auszufüllen; seine Arbeit dürfte auch bei uns in Deutschland für die Interessenten genügen. Mehr und Besseres, als z. B. Reidt's Planimetrische Aufgaben II, bietet es übrigens nicht. Lg.

E. Sailer. Die Aufgaben aus der Elementar-Mathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den K. bayerischen humanistischen und technischen Unterrichts-Anstalten in den Jahren 1873 bis 1893 gestellt wurden. München: Th. Ackermann. 167 S. 8°.

Es ist dies ein sehr nützliches Buch, aus welchem auf dem Gebiete der Elementarmathematik, soweit diese Pensum der Prima höherer Lehranstalten ist, viel gelernt werden kann; auch manche wertvolle Anregung ist aus diesem Buche zu schöpfen. Dasselbe enthält eine grosse Zahl von Aufgaben, deren Lösung vollständig, zuweilen auf mehr als eine Art gegeben wird, und ferner eine grosse Zahl von Sätzen mit ihren Beweisen. Im ersten Teil ist die Planimetrie, im zweiten die Stereometrie, im dritten die ebene Trigonometrie behandelt. Um nur einen Begriff von den hier vorkommenden Aufgaben zu geben, sei folgende erwähnt: Von vier gleich grossen Kugeln, deren Radien r sind, berührt jede die übrigen. Alle vier werden von der Mantelfläche eines abgestumpften Kegels berührt, dessen eine Endfläche drei der Kugeln und dessen andere Endfläche die vierte berührt. Man berechne den Mantel und das Volumen dieses Kegelstumpfs.

Von Lehrsätzen sei erwähnt: Im regelmässigen n-Eck ist die Summe der Quadrate über sämtlichen Seiten und Diagonalen gleich $n^2.r^2$, wo r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist. Wenn nun selbstverständlich das Allermeiste richtig ist, so geht es doch nicht ganz ohne Fehler ab. Ref. bemerkte in einer Aufgabe vom Jahre 1887 (Seite 152 des Buches) durch ein Versehen mit einer trigonometrischen Formel geradezu ein falsches Resultat. Da ist nämlich für $\sin\alpha \sin\beta$ der Wert $-\frac{1}{2}[\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]$ gesetzt, während doch bekanntlich: $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$. Und dadurch wird eine Gleichung für die Unbekannte $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, welche in Wirklichkeit vom zweiten Grade ist, zu einer Gleichung ersten Grades gemacht.

Indessen, wer das Buch benutzt, muss soviel Trigonometrie wissen, dass ihn dies nicht weiter anficht; er wird es eben corrigiren. Die Thatsache bleibt aber bestehen, dass das Buch dem Lernenden viel Nutzen bietet. Der Druck des Buches ist gut und deutlich; die Figuren könnten etwas schärfer ausgeführt sein. Mz.

A. Richter. Trigonometrische Aufgaben für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 41 S. 8°.

A. Richter. Resultate und Erläuterungen zu den trigonometrischen Aufgaben. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 40 S. 8°.

Auch diese Aufgaben sind, wie die auf S. 134 dieses Bandes angezeigten arithmetischen Aufgaben des Verf., mit besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge zusammengestellt, nachdem eine langjährige Praxis zur Prüfung derselben im Unterricht gedient hat. Das Resultatenheft wird nur für Lehrer abgegeben. Lp.

Weitere Lehrbücher.

E. Betti e F. Brioschi. Gli elementi di Euclide. Con note, aggiunte ed esercizî ad uso de' ginnasi e de' licel. 32ª ristampa. Firenze: Le Monnier. VIII + 60 S. 16mo.

C. Bioche. Éléments de géométrie, à l'usage des classes de lettres. 2e édition, corrigée. Paris: Belin. 191 S. 12mo.

A. Böttcher. Die ebene Geometrie. Für den Unterricht an der Realschule bearbeitet. 2. Aufl. Leipzig: Dürr. 152 S. 8°.

H. Bos. Géométrie élémentaire. 15e éd. Paris: Hachette et Cie. 288 S. 12°.

W. W. Cheriton. A simplified Euclid. Book I. Preface by Elliott Kitchener. London: Rivingtons. IV + 111 S. [Nature **58**, 150.]

E. Combette. Cours abrégé de géométrie élémentaire. Paris.

G. Degenhardt. Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Progr. Frankfurt a. M. 30 S. 4°. Mit 4 Tafeln.

W. Dilworth. A new sequel to Euclid. Part I, II, III. London: Blackie. 80 + 124 S. 8°.

A. Grévy. Géométrie à l'usage des classes de lettres. Géométrie dans l'espace. Paris: Nony et Cie. 140 S.

C. Guichard. Traité de géométrie. Géométrie élémentaire (plane et dans l'espace). Paris: Nony et Cie. VII + 448 S. 8°.

B. Habenicht. Der Schlüssel zur Geometrie. Ein Buch für Anfänger oder Zurückgebliebene an allen Lehranstalten. Quedlinburg. 24 S. 12°.

J. Hadamard. Leçons de géométrie élémentaire (géométrie plane). Cours complet de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de G. Darboux. Paris: Colin. XVI + 308 S. 8°.

H. S. Hall and F. H. Stevens. Textbook of Euclid's elements. London. 138 S.

H. Köstler. Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. 2. Heft. Lehre vom Flächeninhalt. Constructionslehre. 3. Aufl. Halle: L. Nebert. 42 S. 8°.

C. Lackemann. Die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- und Uebungsbuch für den geometrischen Unterricht an 6-klassigen höheren Lehranstalten, auf Grund der preussischen Lehrpläne von 1892 bearbeitet. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. 3. Aufl. Breslau: F. Hirt. 64 S. 8°.

C. F. Lindman. Euclides' fyra första Böcker, med smärre förändringar och tilläg. 9. upplaga. Stockholm. VIII + 114 S. 8°.

F. G. Mehler. Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. 21. Aufl. von G. Baseler. Berlin: G. Reimer. X + 266 S. 8°.

A. Moya. Elementos de matematicas. 4. edicion. Tomo II: Geometria y trigonometria. Madrid. 343 S.

B. Niewenglowski et L. Gérard. Cours de géométrie élémentaire. Géométrie plane. Paris: Carré et Naud. XX + 362 S.

R. Olesen. Geometrisk Begynderbok. Uddrag af „La Cour, Historisk Mathematik" med en del aendringer og tilföjelser. Vejle. 56 S. 8°.

G. Z. Reggio. Elementi di geometria e trigonometria ad uso degli istituti tecnici. Torino. 375 S.

E. Riedel. Katechismus der Stereometrie, mit einem Anhang über Kegelschnitte, sowie über Maxima und Minima, begonnen von R. Schurig, vollendet und einheitlich bearbeitet von E. R. Leipzig: J. J. Weber. X + 278 S. 12°. (Weber's illustrirte Katechismen. No. 175.)

E. Rouché et C. de Comberousse. Éléments de géométrie, conformes aux derniers programmes officiels, suivis d'un complément, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales, et de notions sur le lever des plans et le nivellement. Paris: Gauthier-Villars. 652 S. 8°.

M. Burillo de Santiago. Elementos de matematica. 2. edición. Tomo II: Geometria y trigonometria. Madrid. 344 S. 4°.

E. Schindler. Das natürliche System der Elemente der Geometrie, der Normalunterrichtsgegenstand für unsere höheren Schulen. Leipzig: Dürr. 27 S. 8°.

P. Simon. Géométrie élémentaire, à l'usage des classes de lettres. Deuxième partie: géométrie dans l'espace. Paris: Verneau. 147 S. 8°.

H. Sonnet. Primeros elementos de geometria, con las principales aplicaciones al dibujo lineal, al levantamiento de planos, á la agrimensura etc. Traducidos del francès por D. J. Frontera. Sexta edicion. Paris: Hachette. 239 S. 16mo.

J. Sutherland. Primer of geometry. London: Longmans. 126 S. 8°.

E. von Tobel. Geometrie für Secundarschulen. Weitere Ausführungen für die Hand des Lehrers. Zürich: Füssli. VII + 100 S. 8°.

G. A. Wentworth. Textbook of geometry (plane and solid). Revised edition. Boston. XII + 437 S. 8°.

M. Zwerger. Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Mathematik mit einer Sammlung von Aufgaben. 12. Aufl. des Leitfadens der Mathematik von Herm. Müller. 2. Abt. Ebene Geometrie. München: J. Lindauer. VIII + 158 S. 8°.

Frères des écoles chrétiennes. Exercices et problèmes de géométrie (extraits du cours supérieur de géométrie). Paris: Poussielgue. 96 S. 16mo.

L. Henkel. Anleitung zur Behandlung planimetrischer Constructionsaufgaben. Bielefeld: Velhagen und Klasing. IV u. 20 S. gr. 8°.

G. Müller. Wissensstoff der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes. 2. Teil. Aufgabensammlung für das geometrische Rechnen. Stuttgart: W. Kohlhammer. 56 S. 8°.

M. Schuster. Aufgaben für den Anfangsunterricht in der Geometrie. Oldenburg: A. Littmann. III + 96 S. 8°.

K. Schwering. Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen. Düren. 15 S. 4°. [Bericht auf S. 156 dieses Bandes.]

W. Weeks. Exercises on the first book of Euclid. London. 64 S. 12°.

C. Bourlet. Leçons de trigonométrie rectiligne. Paris: Colin et Cie. XII + 323 S.

E. S. Crawley. Elements of plane and spherical trigonometry. A textbook for colleges and schools. Second edition, revised and enlarged. Philadelphia: Crawley. 175 S. 12mo.

A. G. J. Eurenius. Lärobok i plan Trigonometri. 2. upplaga. Stockholm. 169 S. 8°.

B. Féaux. Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. 7. Aufl. von F. Busch. Paderborn: F. Schöningh. VI + 187 S. 8°.

D. Fellini. Le funzioni angolari e la risoluzione dei triangoli rettilinei. Parma. 46 S. 12°.

H. B. Goodwin. Elementary plane trigonometry. Abridged from the work on plane and spherical trigonometry used as a textbook in the Royal Navy. London: Longmans. 208 S. 8°.

H. S. Hall and S. R. Knight. Key to elementary trigonometry. New York: Macmillan. 12mo.

E. Hammer. Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie bearbeitet. 2. Aufl. Stuttgart: J. B. Metzler's Verlag. XIV + 572 S. Mit 1 Taf.

W. W. Lane. Spherical trigonometry, theoretical and practical, exemplified by solution of a large number of spherical triangles. London: Macmillan & Co. VIII + 116 S. [Nature **59**, 268.]

F. v. Lühmann. Uebungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie. Berlin: L. Simion. VIII + 81 S. 8°.

F. Nau. Cours élémentaire de trigonométrie rectiligne à l'usage des candidats au baccalauréat et des candidats à l'Institut agronomique. Paris: Poussielgue. XVI + 140 S. 8°.

J. W. Nicholson. Elements of plane and spherical trigonometry. New York: Macmillan. VIII + 101 S.

J. Pichot. Éléments de trigonométrie rectiligne, à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires, des candidats aux baccalauréats classique et moderne, à l'École de St.-Cyr et à l'Institut agronomique. Nouvelle édition, entièrement revue et mise en harmonie avec les derniers programmes par A. Ducatel. Paris: Hachette. 223 S. 8°.

H. E. Tombeck. Cours de trigonométrie rectiligne, à l'usage des lycées et des candidats aux écoles du gouvernement. 6e édition, revue et corrigée. Paris: Hachette. 141 S. 8°.

G. W. Usill and F. J. Browne. Trigonometry at a glance; a graphic demonstration of the various functions. London: Philip. 4°.

P. Hoyer. Zu Herrn Schotten's Definition des Winkels. Hoffmann Z. **29**, 93-95.

J. C. V. Hoffmann. Zusatz zu vorstehendem Artikel. Ebenda, 95-96.

Der erste Verf. will den Winkel als ein Flächengebilde definiren, das entsteht, wenn ein Strahl in der Ebene sich um seinen Anfangspunkt dreht. Der zweite kommt auf seine Auseinandersetzungen in **20,** 408ff. und 581ff., sowie in **27,** 413ff. zurück, wo er den Winkel als „Figur“, und zwar als „Eineck“, definirt hat. Lp.

Joh. Petersen. Nogle Saetninger om kongruente Figurer. Nyt. Tidss. for Math. **9**B, 1-11.

Neue Beiträge zur Theorie der congruenten Figuren. Der Verf., welcher mehrere Abhandlungen über Liniengeometrie geschrieben hat, beschäftigt sich hier mit der Geometrie der congruenten Figuren in der Ebene. Namentlich beschäftigt er sich mit der Zusammensetzung von Drehungen. Es werden die folgenden Sätze bewiesen. Wenn drei congruente Figuren Σ_1, Σ_2, Σ_3 mittels Drehungen um die Punkte O_1, O_2, O_3 zur Deckung gebracht werden können, dann gehen alle die Geraden, die drei correspondirende Punkte A_1, A_2, A_3 enthalten, durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $O_1O_2O_3$, während der geometrische Ort der Punkte A_1, A_2, A_3 aus drei Kreisen besteht, die in Bezug auf die Seiten O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3 mit dem Umkreise des Dreiecks $O_1O_2O_3$ symmetrisch sind. Drei correspondirende Geraden, die durch denselben Punkt P gehen, bilden drei Büschel, die durch die mit dem Höhenschnittpunkte symmetrischen Punkte in Bezug auf die Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ gehen. Der geometrische Ort des Punktes P ist der Umkreis des Dreiecks. Aus diesen Sätzen wird gefolgert:

Wenn ein Viereck $ABCD$ einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, dessen Brennpunkte F und F_1 sind, dann liegen die Höhenschnittpunkte der Dreiecke FAB, FCD, F_1BC, F_1AD auf derselben Geraden, während die umgeschriebenen Kreise durch denselben Punkt gehen. V.

G. A. Gibson. The treatment of proportion in elementary geometry. Edinb. M. S. Proc. **16**, 99-110.

Der Aufsatz rügt die im englischen Unterricht und in englischen Lehrbüchern vorkommenden Unklarheiten bei der Darstellung der euklidischen Verhältnislehre und befürwortet die Begründung des Verhältnisbegriffes auf den Zahlbegriff. F.

A. Peter. Einteilung aller in der elementaren Geometrie auftretenden Vierecke. Hoffmann Z. **29**, 178-180.

A. Peter. Die Methode der Umlegung bei Vierecksconstructionen. Ebenda, 260-265.

Im ersten Aufsatze wird gemäss einem einheitlichen Einteilungsprincipe zu den bekannten Benennungen noch das „Brennstrahlviereck" hinzugefügt, d. h. ein Viereck, in dem die Summe zweier anstossenden Seiten gleich der Summe der beiden anderen ist. Der zweite Artikel löst einige Constructionsaufgaben, bei denen die Methode der Umklappung im Raume zur Anwendung kommt, für solche Vierecke, zwischen deren Bestimmungsstücken eine Bedingung besteht. Lp.

L. Benoit. Sur quelques propriétés du trapèze. Bull. Soc. Vaud. (4) **34**, 220-224.

A. Emmerich. Bemerkungen über das ungleichseitige Dreieck mit zwei gleichen Aussenwinkelhalbirenden. Hoffmann Z. **29**, 90-91.

Die Bemerkungen beziehen sich auf zwei Lösungen der betreffenden, vom Verf. gestellten Aufgabe in Bd. **25** derselben Zeitschrift und auf einen vom Verf. in **26**, 173-175 ausgesprochenen Satz („Ergänzung zum Lehmus'-Steiner'schen Satze". F. d. M. **26**, 565, 1895). Lp.

De Tilly. Simple remarque sur le triangle. Mathesis (2) **8**, 217-218.

H. A. Sayre. The problem of Pappus. Annals of Math. **12**, 139-140.

Die Lösung der bekannten Aufgabe: Durch einen Punkt auf der Halbirenden eines rechten Winkels eine Sehne von gegebener Länge zu legen, ist gleichbedeutend mit der Ermittelung zweier Strecken aus ihrem Producte und ihrer Summe. Js.

P. W. Flood. Question 13429. Ed. Times **68**, 41-42.

Rein geometrische Construction eines Dreiecks, von welchem die Basis, die zugehörige Höhe und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben sind. Lp.

E. Marx. Geometrisches. Pr. (No. 700) Gymn. Friedland i. Meckl. 11 S. 4° mit 1 Taf.

Der Verf. behandelt folgende Aufgabe: Auf einer Geraden sind vier Punkte A, B, C, D (in dieser Folge) gegeben. Ausserhalb der Geraden soll ein fünfter Punkt E so gefunden werden, dass Winkel AEB = Winkel BEC = Winkel CED wird. Es wird die bekannte geometrische Lösung gegeben, nämlich: Zu A, B, C suche man den vierten harmonischen Punkt F, und zu B, C, D den vierten harmonischen Punkt G; dann treffen sich die Halbkreise über BF und CG in E. Hierauf folgt die algebraisch-trigonometrische Behandlung derselben Aufgabe, in welcher die Strecken AE, BE, CE, DE sowie der Winkel AEB aus den gegebenen Strecken AB, BC, CD berechnet werden; dann folgt die Betrachtung einzelner Fälle.

Der Zweck der Arbeit ist, den Primanern ein ausgeführtes Beispiel einer Uebungsaufgabe zu geben, wobei sie einen grossen Teil des Primapensums wiederholen können. Mz.

J. Moser. Harmonische Strahlen und Punkte. Pr. (No. 187) St. Matthias-Gymn. Breslau. 16 S. 4°.

Nachdem auf den ersten Seiten Ergänzungen zum ersten Teil (F. d. M. **26**, 565, 1895) gegeben sind, die man auch in den Lehrbüchern findet, z. B. die Grösse und Construction der drei Mittel an derselben Figur, wird in der Fortsetzung die Valenz einer Geraden der Potenz eines Punktes gegenübergestellt; die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits werden noch einmal bewiesen und einige Sätze über harmonicale Punkte und Linien des Dreiecks auf umständliche Weise hergeleitet, die sich als bekannt herausstellen, wenn man sie anders ausspricht. So ist die Beziehung zwischen den auf der Harmonicalen ausgeschnittenen Strecken einfach die Involutionsbeziehung am vollständigen Viereck. Lg.

G. Lazzeri. Il baricentro di un sistema di punti. Suppl. al Period. **1,** 1-3.

Der Verf. hatte unter den Nummern 332-335 hübsche Fragen über die Schwerpunkte von fünf bis acht Punkten in der Ebene oder im Raume gestellt. Da keine befriedigenden Antworten eingelaufen sind, giebt er selbst für die erste Frage die rein geometrische Behandlung und schliesst neue Preisfragen an. Lp.

C. J. Rueda. Nueva demostración de un teorema de geometría. Archivo de Mat. **2,** 121-123.

Chasles hat das Carnot'sche Theorem bezüglich eines durch eine Transversale geschnittenen Polygons aus dem Satze des Ceva hergeleitet. Rueda leitet umgekehrt den Ceva'schen Satz aus dem Carnot'schen ab. Tx. (Lp.)

A. Schiappa Monteiro. Sur une question relative au triangle et à la génération des hyperboles adjointes répondant aux cercles adjoints de M. Brocard. Lisboa Jorn. da Ac. (2) **5.**

Der Verf. beschäftigt sich mit der von Cesàro gestellten Aufgabe: Zu beweisen, dass drei durch die drei Ecken eines Dreiecks gelegte Transversalen auf den Gegenseiten sechs solche Abschnitte bestimmen, dass die Differenz zwischen dem Producte dreier nicht zusammenstossenden Abschnitte (oder solcher, die keinen Endpunkt gemeinsam haben) und dem Producte der drei anderen den Wert hat $\frac{abc}{a'b'c'}\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 lmn$. Hierin bedeuten Δ, a, b, c den Inhalt und die Seiten des gegebenen Dreiecks, Δ' und a', b', c' den Inhalt und die Seiten des durch die drei Transversalen gebildeten Dreiecks, endlich l, m, n die Abschnitte dieser Transversalen zwischen den Ecken und den Gegenseiten des ersten Dreiecks (vergl. das folgende Referat). Tx. (Lp.)

Fr. Ferrari. Una generalizzazione dei teoremi di Ceva e di Menelao. Periodico di Mat. **13,** 1-5.

Verbindet man drei Punkte A_1, B_1, C_1 auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks $ABC = \Delta$ mit den Ecken A, B, C, so bestimmen diese Transversalen $AA_1 = \alpha$, $BB_1 = \beta$, $CC_1 = \gamma$ ein Dreieck Δ' mit den Seiten a', b', c', und es ist:

$$\frac{abc}{a'b'c'}\alpha\beta\gamma\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 = A_1C.B_1A.C_1B - BA_1.CB_1.AC_1,$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}abc = A_1C.B_1A.C_1B + BA_1.CB_1.AC_1,$$

wo Δ_1 = Dreieck $A_1B_1C_1$ ist.

Vier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 auf den Seiten bezw. AB, BC, CD, DA eines windschiefen Vierecks $ABCD$ bestimmen acht Segmente; für dieselben gelten die Relationen:

$$\frac{a'b'c'd'}{abcd}\alpha\beta\gamma\delta\left(\frac{T'}{T}\right)^3 = A_1B.B_1C.C_1D.D_1A - AA_1.BB_1.CC_1.DD_1,$$

$$abcd\left(\frac{T_1}{T}\right) = AA_1.BB_1.CC_1.DD_1 - A_1B.B_1C.C_1D.D_1A.$$

Hierin bedeuten a, b, c, d die Seiten des Vierecks $ABCD$, T das Volumen des Tetraeders $ABCD$, T' und a', b', c', d' das Volumen und die Seitenflächen des Tetraeders, gebildet aus den vier Ebenen ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Inhalte dieser Transversaldreiecke, T_1 das Volumen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$. Lp.

W. S. Cooney. Questions 13481, 13568, 13716. Ed. Times **68,** 95-96; **69,** 45-46, 94-95.

Ueber den Seiten eines beliebigen Dreiecks werden nach aussen die

Quadrate gezeichnet, und die Ecken des Dreiecks werden mit den Endpunkten der zur Gegenseite parallelen Quadratseite verbunden. An diese Figur knüpft sich eine Reihe von Sätzen aus der Geometrie der Lage und der metrischen Geometrie. Lp.

F. Celestri. Quistione 408. Periodico di Mat. **13,** 165-166, 193-194.

Von einem Punkte O der Ebene werden $n(>2)$ Strahlen gezogen, welche die Ebene in n gleiche Winkel teilen. Bewegt sich nun ein Punkt P auf einer Kreislinie mit dem Centrum O, so bleibt constant: 1. Die Summe der Quadrate der Abstände des Punktes P von jenen Strahlen, 2. der Inhalt des Vielecks, welches die Fusspunkte der Lote von P auf die Strahlen zu Ecken hat. Der Satz bleibt auch bestehen, wenn die von P ausgehenden Geraden alle unter einem und demselben Winkel α gegen die betreffenden zugehörigen Strahlen geneigt sind. — Beweise von C. Merizzi und von Celestri selbst, der den zweiten Teil des Satzes auch noch dahin verallgemeinert, dass die von O ausgehenden Strahlen nicht mehr gleiche Winkel mit einander bilden. Lp.

J. Langr. Beitrag zu den Polygonen. Časopis **27,** 228-231. (Böhmisch.)

Zwei Sätze, welche durch Einführung des vom Verf. nicht beachteten Begriffes des Schwerpunktes eines Systemes von n Punkten an Einfachheit gewinnen. Sda.

J. Kürschak. Ueber das regelmässige Zwölfeck. Ungar. Ber. **15,** 196-197.

Das in den Kreis beschriebene regelmässige Zwölfeck hat den dreifachen Flächeninhalt des über dem Radius gezeichneten Quadrates.

Dieser bekannte Satz wird hier ohne jegliche Rechnung, nur durch Zerlegung der Figur nachgewiesen. Man denke sich den Kreis, in ihm zwei senkrechte Durchmesser und in deren Endpunkten die Tangenten. Man hat dann vier Quadrate mit dem Radius als Seite. Auch zeichne man in den Kreis das regelmässige Zwölfeck, zu dessen Ecken die vier Berührungspunkte der Tangenten gehören. Eines der vier Quadrate wird nun mit Hinzunahme der darin liegenden Zwölfecksecken, nach denen auch Radien gehen, deren Winkel zu halbiren sind, in zwölf Felder (Dreiecke) zerlegt, die sich zum Teil in den drei anderen Quadraten wiederfinden, so dass die Gleichheit des Zwölfecks und der Summe der drei Quadrate daraus hervorgeht. Mz.

R. Guimarães. On a geometrical problem. Edinb. M. S. Proc. **16,** 47-48.

Mit Hülfe des Stewart'schen Lehrsatzes wird die Aufgabe gelöst: einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und durch zwei gegebene Punkte geht. Gbs. (Lp.)

K. Karamata. Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreiecks. Hoppe Arch. (2) **16**, 113-118.

Es wird der in jedem Lehrbuch behandelte Satz noch einmal bewiesen: Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der vier Berührungskreise aller Dreiecke, welche einem festen Kreise über einer festen Sehne als Grundlinie eingeschrieben sind, ist das System zweier Kreise. Lg.

H. B. Billups. On the connection between the inscribed and escribed circles of a triangle. Math. Gazette 1898, 177-180.

Joh. Gehrke. Om nogle Egenskaber ved et Cirkelsystem. Nyt. Tidss. for Math. **9** B, 11-15.

Ueber einige Eigenschaften der Systeme von Kreisen. Der Verf. beweist zuerst den Satz: Gegeben seien ein Kreis O und zwei Punkte A und B. Dann ist, wenn C das Radicalcentrum von O und von einem willkürlichen Kreise durch A und B ist, das Verhältnis $CA:CB$ dem Verhältnisse der Potenzen von A und B in Bezug auf O gleich. Hieraus werden verschiedene elementare Sätze abgeleitet. Z. B.: Wenn vier Kreise O_1, O_2, O_3, O_4 gegeben sind, und wenn M, N, P die Radicalcentren beziehungsweise von $O_1O_2O_3$, $O_1O_3O_4$, $O_1O_4O_2$ sind, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varDelta MNP$ einem in O eingeschriebenen Dreiecke ABC homolog ist, die, dass das Product der drei Verhältnisse bezw. der Potenzen von A in Bezug auf O_2, O_3, von B in Bezug auf O_3, O_4, von C in Bezug auf O_4, O_2 gleich $+1$ sei. V.

Haberland. Weitere Sätze über die Apollonischen Kreise des Dreiecks. Pr. (No. 703) Realsch. Neustrelitz. 14 S. 4°. Mit 1 Taf.

Als Fortsetzung einer Abhandlung (F. d. M. **28**, 449, 1897), welche die Beziehungen der Radien der Apollonischen Kreise zu den Seiten, Winkeln, Winkelhalbirenden, Höhen und dem Flächeninhalt des Dreiecks, die Construction und die Lage der Mittelpunkte, die Beziehungen zum Umkreis, dem Grebe'schen Punkte und den Winkelgegentransversalen behandelte, werden weitere Beziehungen der Centrale dieser Kreise zu der Harmonicalen des Dreiecks, der Verbindungslinie der Apollonischen Pole zu dem Umkreis, die Berechnung der Entfernung dieser Pole, die Beziehungen der Centrale der Apollonischen Kreise zu den Brocard'schen Punkten und dem Brocard'schen Kreise zusammengestellt. Lg.

A. Richter. Beitrag zur Lösung des Apollonischen Berührungsproblems. Wandsbek. 30 S. 4°.

F. Hall. Die älteren rein geometrischen Beweise zu Steiner's Construction der Malfatti'schen Aufgabe. Pr. (No. 384) Progymn. Wattenscheid. 13 S. 4° mit Fig.-Taf.

Ergänzungen zu Wittstein's Schriften über die Geschichte des Malfatti'schen Problems (Erlangen 1871, Nördlingen 1878). Scht.

G. Mulsow. Mascheroni'sche Constructionen. Pr. (No. 691) Gymn. Schwerin. 16 S. 4°.

In der Festschrift anlässlich der dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hatte F. Klein die Bemerkung gemacht, dass die 17-Teilung des Kreises mit alleiniger Anwendung des Zirkels noch nicht ausgeführt sei. Der Verf. führt nun eine Construction vor, die diese Bedingung erfüllt. Die Construction schliesst sich einerseits an die bekannte auf Perioden der Wurzeln beruhende Lösung des Problems an, andererseits an die von Mascheroni (geometria del compasso, 1797) gegebenen Grundlagen. Scht.

H. Dolański. Zwei Probleme: Dreiteilung des Winkels und Quadratur des Kreises. Reval: H. Kluge. 27 S. mit 1 Taf. gr. 8°.

Fr. Strempel. Ein Annäherungsverfahren zur Verwandlung von Kreisbogen in gerade Linien und umgekehrt. Pr. (No. 690) Gymn. u. Realgymn. Rostock. 14 S. 4° mit 2 Taf.

Macht man im Einheitskreis den Bogen AB gleich der Tangente $AC=\varphi$, dann schneidet die Gerade BC auf dem Radius AM das Stück $AX=x=\dfrac{\varphi(1-\cos\varphi)}{\varphi-\sin\varphi}$ oder angenähert $x=3-\frac{1}{10}\varphi^2$ ab. — Diese Gleichung wird benutzt, um folgende Regel abzuleiten: Man halbire $AM=1$ in E und verlängere AE bis J so, dass $EJ=2\frac{1}{2}$ ist, schlage über EJ als Durchmesser den Kreis, mache in ihm die Sehnen $JK=JL$ gleich der halben zu verwandelnden Strecke φ und verbinde die Mitte N der Sehne KL mit dem Endpunkte der Tangente $AC=\varphi$, so schneidet NC den Bogen $AB=\varphi$ ab. Lg.

C. Morell. A method for the rectification of the circumference. Journ. Franklin Inst. **146**, 479.

C. Morell. A method for the quadrature of the circle. Ibid. 479.

M. d'Ocagne. Extrait d'une Lettre. Nouv. Ann. (3) **17**, 47.

Elementarer Beweis eines geometrischen Satzes von Tarry, den der Briefschreiber in Nouv. Ann. (3) **16**, 474-476 schon anders bewiesen hatte. (F. d. M. **28**, 441, 1897). Lg.

M. Pelíšek. Ueber metrische Relationen von Transversalen. Casopis **27**, 26-31, 81-95, 165-190. (Böhmisch.)

Ausgehend von einer Relation über Transversalen eines Kreises, die im Jahre 1870 von Mannheim in den C. R. ausgesprochen wurde, leitet der Verf. mit Zuhülfenahme der Affinität und der centralen Collineation der Kegelschnitte eine Reihe Relationen von ähnlichem Typus ab, von denen manche sich durch ihre grössere Allgemeinheit bemerkbar machen. Die vielen Einzelresultate der Arbeit entziehen sich wegen Raummangels einer näheren Erörterung. Sda.

U. Ceretti. Geometria elementare recente. Periodico di Mat. **3**, 10-19.

Im Periodico di Mat. **6**, 23-34 (F. d. M. **23**, 508, 1891) hatte Lugli eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der neueren Untersuchungen aus der Dreiecksgeometrie begonnen; nachdem der vorzeitige Tod des verdienten Herausgebers des Periodico die Aussicht auf Vollendung des Artikels zerstört hat, giebt jetzt Ceretti eine Ergänzung in zwei Abschnitten, betitelt: direct ähnliche Figuren und harmonische Polygone. Lp.

G. Candido. Cenni di geometria del triangolo. Suppl. al Period. **1**, 6-8, 22-25, 70-71, 89.

Zusammenstellung einer Reihe von Sätzen der neueren Dreiecksgeometrie als Ergänzung der gewöhnlichen Lehrbücher der Elementargeometrie. Lp.

G. Candido. Sul cerchio di Taylor. Nota di geometria recente. Periodico di Mat. **13**, 37-41.

Von dem „Taylor'schen Kreise", der durch die 6 Fusspunkte der von den Fusspunkten der Höhen eines Dreiecks auf die Seiten gefällten Lote bestimmt ist, werden die wichtigeren Eigenschaften zusammengestellt und bewiesen, zum Teil mit originalen Methoden. Lp.

A. Droz-Farny. Sur un théorème de Schroeter et sur la droite δ de Longchamps. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 136-146.

Im J. de Math. spéc. für 1886 hat G. de Longchamps analytische Entwickelungen über denjenigen Kreis in der Ebene eines Dreiecks gegeben, der nach einem Vorschlage von Neuberg den Namen Longchamps'scher Kreis erhalten hat. Der Verf. des gegenwärtigen Aufsatzes wendet einige neue Zusätze zu einem Schroeter'schen Satze an, um jenen Kreis nach synthetischer Methode zu untersuchen. Dabei leitet er auch die Eigenschaften einer Parabel ab, deren auf analytischem Wege entdeckte Existenz ihm Sidler aus Bern mitgeteilt hatte. Lp.

A. Gob. Sur deux transversales remarquables du triangle. Mathesis (2) 8, 129-131.

J. Neuberg. Sur un groupe de trois paraboles. Mathesis (2) **8**, 131-134.

Durch die Ecken eines Dreiecks ABC kann man drei Gerade AA', BB', CC' ziehen, die in A', B', C' mit den Gegenseiten den Winkel θ einschliessen. Wenn θ sich ändert, so hüllen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ drei Parabeln ein, deren Axen den Symmedianen parallel sind, und deren Brennpunkte die Projectionen des Höhenschnittes auf die Medianen sind. Die merkwürdigen Transversalen von Gob sind die Asymptoten eines Kegelschnittes, der den Lemoine'schen Punkt von ABC zum Mittelpunkte hat und die Seiten in den Fusspunkten der Höhen berührt.

Mn. (Lp.)

A. J. van Breen. Merkwaardige punten en lijnen van den vlakken driehoek. 2[de] vermeerde Druk. Amsterdam: W. Versluys. 88 S. 8°.

J. F. d'Avillez. Sur un certain triangle. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 131-132.

Als Fortsetzung des Aufsatzes im J. de Math. élém. (4) **5** (F. d. M. **27**, 400, 1896) giebt die gegenwärtige Note einige neue Eigenschaften solcher Dreiecke, bei denen die Euler'sche Gerade einer der drei Seiten parallel ist.

Lp.

Déprez. Question 9746. Ed. Times **69**, 27-28.

Einfacherer Beweis des in F. d. M. **28**, 453, 1897 angegebenen Satzes über zwei bestimmte Simson-Geraden eines Dreiecks (von W. E. Jeffares).

Lp.

Bücking. Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks; als besonderen Fall die Steiner'sche Curve des Dreiecks. Hoppe Arch. (2) **16**, 271-319.

Die inhaltsreiche Abhandlung geht aus von dem Satz: Dreht sich eine Gerade um einen Punkt P, so umhüllt ihre Seitensymmetriegerade einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt π, und giebt, daran anschliessend, interessante Lagenbeziehungen zwischen P und π, z. B. die Bedeutung der zu einander senkrechten Seitensymmetriegeraden als Scheiteltangenten der eingeschriebenen Parabeln; P ist gleichzeitig Mittelpunkt des Kegelschnitts nur, wenn er im Schwerpunkte liegt; π ist Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem P in dem Dreiecke und der Fläche seiner Scheitelwinkel, ausser derselben oder im Unendlichen liegt. Bewegt sich P auf einer Geraden, so beschreibt π eine Kegelschnittschar; der Ort der Nagel'schen Punkte dieser Schar ist ein dem Dreiecke umgeschriebener Kegelschnitt. — Schliesslich werden die normalen Seitensymmetriegeraden als Fusspunktlinien oder Simsongeraden des Dreiecks

betrachtet. Als solche umhüllen sie die sogenannte Steiner'sche Curve, die hier von einem neuen Gesichtspunkte aus erscheint. Lg.

A. M. Zuccagni. Sulla distanza di un punto arbitrariamente scelto nel piano di un triangulo dal baricentro del medesimo. Suppl. al Period. **1**, 9-12.

Elementare Ableitung der von Henke in Hoffmann Z. **28**, 494 bis 496 (F. d. M. **28**, 452, 1897) bewiesenen Formel nebst einigen anderen ähnlichen Beziehungen. Lp.

Ch. Michel. Sur la règle des analogies de M. Lemoine. Nouv. Ann. (3) **17**, 24-43, 92-93.

Genaue Fassung und strenger Beweis des von E. Lemoine aufgestellten Princips über die Analogien der metrischen Relationen zwischen Seiten, Linien und Winkeln des Dreiecks. Auf Seite 92 wird aus einem Briefe von G. Fontené mitgeteilt, dass auch in dessen Buch, Géométrie dirigée, alle Formeln die Anwendung der Zeichen verlangen, dergestalt, dass eine Formel mehrere absolute Formeln in sich fasst. Lg.

W. Fuhrmann. Beiträge zur Transformation algebraisch-trigonometrischer Functionen. Pr. (No. 19) des Realgymn. auf der Burg. Königsberg i. Pr. 12 S. 4°.

Dieser Aufsatz enthält eine grosse Anzahl von Formeln aus der Trigonometrie und Algebra, deren Beweis selbst schon zweckmässige Uebung den Schülern bietet, die aber auch sonst zum Lösen von Aufgaben sehr gut gebraucht werden können. Einige Bezeichnungen werden zur Abkürzung eingeführt und im Eingang erklärt; unter anderem die von d'Ocagne eingeführte Function $(a_1, a_2, \dots, a_k)^{(m)}$. Diese bedeutet die Potenz $(a_1+a_2+\dots+a_k)^m$, wenn nach der Entwickelung durch den polynomischen Satz die Coefficienten durch die Einheit ersetzt werden. Z. B. $(a, b)^{(h)} = \frac{a^{h+1}-b^{h+1}}{a-b}$. Auch soll $(a_1, a_2, \dots, a_k)^{(0)} = 1$ sein. Es folgen nun:

A. Transformationen, die nur einen Winkel enthalten.

$$\text{Z. B.:}\quad \frac{1+\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}\varphi)^2 \quad \text{u. dgl.}$$

B. Einige algebraische Transformationen mit Benutzung der Bezeichnung von d'Ocagne.

C. Transformationen von Functionen mit zwei Winkeln. Z. B.:

$$\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\psi\cos\psi = (\cos\varphi+\cos\psi)\,(\sin\varphi, \sin\psi)^{(2)} - \sin(\varphi+\psi)\,(\sin\varphi+\sin\psi) \quad \text{u.a.m.}$$

Eine Fortsetzung ist in Aussicht gestellt. Mz.

M. Escary. Remarques concernant les formules fondamentales de la trigonométrie. Paris: Hermann. 11 S. 8°.

W. Fr. Meyer. Sobre identidades algebricas en la trigonometría plana. Archivo de Mat. **2**, 146-148.

Der Verf. weist auf einige algebraische Beziehungen zwischen trigonometrischen Ausdrücken hin, die aus der Vergleichung der Formeln sich ergeben: $P_a = a - b\cos C - c\cos B = 0$, $C_a = b^2 + c^2 - a^2 - 2bc\cos A = 0$, $S_a = b\sin C - c\sin B = 0$. (Vergl. Deutsche Math. Ver. 7_1, 147-154). Tx. (Lp.)

A. Andreini. Di alcune note relazioni trigonometriche per mezzo del teorema di Tolomeo e di quello di Legendre. Suppl al Period. **2**, 6-9.

Ableitung der Additionstheoreme und anderer Formeln aus den Eigenschaften des Kreisvierecks. Lp.

J. Neuberg. Questions 13493, 13520. Ed. Times **68**, 25, 59.

1. Lösung der Gleichungen $\sin x \cos y = c$, $\sin z \cos x = b$, $\sin y \cos z = a$.

2. $\sin^2 x - \sin^2(y-z) = a$, $\sin^2 y - \sin^2(z-x) = b$, $\sin^2 z - \sin^2(x-y) = c$; zu berechnen $\sin(x+y+z)$. Lp.

A. Pleskot. Bemerkung zur Auflösung des Dreieckes, dessen Seiten gegeben sind. Časopis **27**, 269-271. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

V. Laska. Einige Sätze der Trigonometrie. Časopis **27**, 217-220. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

A. Cabreira. Methodos novos para determinar o lado e a área de qualquer polygono regular. Lisboa Jorn. da Ac. (2) **5**.

Der Artikel enthält einige Formeln, in denen der Inhalt, die Länge einer Seite u. dergl. m. von einem regelmässigen n-seitigen Vielecke vorkommen. Tx. (Lp.)

V. Jarolímek. Ueber das reguläre Fünfzehneck. Časopis **27**, 231-233. (Böhmisch.)

Bedeutet a_n die Seite eines regulären einem Kreise einbeschriebenen n-Eckes, so gelten für die Seite eines regulären Fünfzehneckes die

folgenden Relationen: $2a_{15}^2 = a_5^2 - a_3 . a_5 + a_6^2$

und $$a_{15} = \frac{a_5 . a_6^2 - a_3 . a_{10}^2}{2a_6 . a_{10}}.$$ Sda.

A. Libický. Ueber das Dreieck, dessen Seiten eine arithmetische Reihe bilden. Časopis **27**, 141-155. (Böhmisch.)

Der Verf. beweist, dass bei einem solchen Dreiecke 1. die Sinus der inneren Winkel, 2. die Cotangenten ihrer Hälften, 3. die reciproken Werte der Radien der anbeschriebenen Kreise, 4. die reciproken Werte der Höhen je eine arithmetische Reihe bilden. Bemerkungen über die Schwerpunkts-Transversalen. Constructionen des Dreieckes unter gegebenen Bedingungen. Sda.

J. Jack. A new proof of the formulae for right-angled spherical triangles. Edinb. M. S. Proc. **16**, 39-40.

J. Jack. Note on Napier's rules. Edinb. M. S. Proc. **16**, 40-41. Gbs.

E. O. Lovett. Note on Napier's rules of circular parts. American M. S. Bull. (2) **4**, 552-554.

Der Verf. will durch seine Note, unter Hinweis auf eine beigegebene Figur, die Aufmerksamkeit auf den Napier'schen Begriff der Napier'schen Regeln über die Kreisteile in der Theorie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks lenken. (Vergl. das folgende Referat.) Lp.

O. Dziobek. Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck. Hoppe Arch. (2) **16**, 320-326.

In einer Abhandlung (Ges. W. I, Nachlass, S. 481-490) hat Gauss für ein gegebenes rechtwinkliges sphärisches Dreieck ein Fünfeck besonderer Art, nämlich ein solches, dessen fünf Diagonalen sämtlich Quadranten sind, von ihm Pentagramma mirificum genannt, angegeben, aus dessen Betrachtung unter anderen sich sogleich die Neper'schen Analogien ergeben. Der Verf. unternimmt es nun, diese Figur so zu erweitern, dass sie auf irgend ein gegebenes schiefwinkliges sphärisches Dreieck angewandt werden kann. Dieses Dreieck sei ABC; dann sei A' Pol von BC (Pol eines Kreisbogens soll hier ein Punkt heissen, der zu dem Bogen die Lage von Pol zu Aequator hat; welcher von den beiden Polen dabei genommen wird, bleibt gleichgültig, da die Pole als Gegenpunkte der Kugel im wesentlichen einander ersetzen). Ebenso sei B' Pol von CA, C' Pol von AB; dann ist also $A'B'C'$ das Polardreieck zu ABC. Die drei grössten Kreise durch AA', BB', CC' sind nun die Höhen sowohl des Dreiecks ABC als auch des Dreiecks $A'B'C'$ und gehen daher durch denselben Punkt D. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$

liegen somit perspectivisch, und die Schnittpunkte E, F, G resp. der Seiten BC, $B'C'$ ferner CA, $C'A'$ und AB, $A'B'$ liegen in einem grössten Kreise. Hier hat man nun eine geshlossene Figur von zehn Punkten: $A, B, C, \quad A', B', C', \quad D, E, F, G.$
Durch jeden Punkt gehen drei Kreise, und auf jedem der Kreise liegen drei Punkte. Jedem der zehn Punkte entspricht einer der zehn Kreise als Aequator. In dieser Figur sind nun zwölf Gauss'sche Fünfecke (oder nach oben Pentagramma mirificum) enthalten. Eins derselben ist z. B. $A'DCEG$. Um diese alle aufzufinden und übersichtlich zu gruppiren, hat der Verf. neue Bezeichnungen eingeführt.

Dies mag genügen, um den Gegenstand der Arbeit zu kennzeichnen. Erwähnt sei noch, dass die Figur in nahe Beziehung zu einem Tetraeder mit Höhenschnitt gesetzt wird. Die Betrachtung dieses Tetraeders führt dann auch auf eigentümliche Formeln für die Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks. (Vergl. das vorangehende Referat.)

Mz.

A. Andreini. Relazione fra l'area e la somma degli angoli di un poligono sferico qualunque. Periodico di Mat. **13,** 138-144.

Die Frage nach der Winkelsumme eines ebenen Polygons bei beliebig gegebenem Umfange, der mehr als einen Umlauf macht und sich selbst beliebig oft schneidet, ist schon öfter behandelt (vergl. z. B. Gallenkamp's Elemente der Mathematik). Indem der Verf. die Frage gleich für Kugelvielecke in Angriff nimmt, kommt er nach Einführnng zweier Zahlen, die er als „Art“ (specie, σ) und „Geschlecht“ (genere, γ) bezeichnet, zu dem Satze: Der Inhalt eines sphärischen Polygons ist gleich der Summe seiner Winkel, vermindert um so vielmal π, wie die Differenz seiner Seitenzahl und des doppelten Unterschiedes zwischen der Art und dem Geschlecht beträgt; in Formel:

$$A = S - \pi[L - 2(\sigma - \gamma)].$$

Lp.

A. Del Re. Questione 293. Periodico di Mat. **13,** 24, 47-48, 107-108.

Gehen von einem Punkte O drei zu einander rechtwinklige Gerade aus, die man durch eine beliebige Ebene π in A, B, C schneidet, und sind M und M' zwei symmetrisch zu π gelegene Punkte, so ist:

$$\frac{4\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2)^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}.$$

Beweise von Castelli, Del Re und Retali. Lp.

R. Hoppe. Ueber das gleichseitige und das Höhenschnitts-Tetraeder. Nachtrag dazu. Hoppe Arch. (2) **16,** 257-270, 333-335.

Bei einem gleichseitigen Tetraeder, d. h. einem solchen, dessen vier Grenzflächen gleich sind, ist der Schwerpunkt zugleich Centrum der um-

beschriebenen und der einbeschriebenen Kugel. Bei einem Höhenschnitts-Tetraeder, d. h. einem solchen, bei dem die vier Höhen sich in einem Punkte schneiden, sind die Fusspunkte der Höhen auch Höhenschnittpunkte der Dreiecke, auf denen sie liegen. Wenn ein Höhenschnitts-Tetraeder gleichseitig ist, muss es ein reguläres Tetraeder sein. Der Höhenschnittpunkt, das Centrum der Umkugel und der Schwerpunkt eines Höhenschnitts-Tetraeders liegen in gerader Linie. Diese und andere Eigenschaften der beiden genannten Tetraeder-Arten werden rechnerisch bewiesen. Die Betrachtungen im Nachtrag beziehen sich auf das einem gleichseitigen Tetraeder umbeschriebene Parallelepipedon. Scht.

G. Holzmüller. Notiz über die Stumpfe der Körper p^{ter} Ordnung. Hoffmann Z. **29**, 318-320.

Elementare Berechnung des Volumens und des Schwerpunktes dieser Körper. Lp.

G. Lazzeri. Volume del segmento sferico ad una e due basi. Suppl. al Period. **1**, 3-5.

Geometrische Deutung der verschiedenen Formeln. Lp.

R. Guimarães. Calculo do volume de um segmento espherico, independentemente do conhecimento do volume dos corpos esphericos. Lisboa Jorn. da Ac. (2) **5**.

Dieser Artikel enthält einen Beweis der Formel der Elementargeometrie, die das Volumen des durch Rotation eines Kreisabschnittes um einen Durchmesser erzeugten Körpers giebt. Tx. (Lp.)

V. Retali. Sui sistemi pentasferici ortogonali. Periodico di Mat. **13**, 108-109.

Sind fünf Kugeln paarweise orthogonal zu einander, so sind ihre Radien durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\varrho_a^2}+\frac{1}{\varrho_b^2}+\frac{1}{\varrho_c^2}+\frac{1}{\varrho_d^2}=0$$

verbunden. Der Verf. zeigt, dass man diese Relation als eine natürliche Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes ansehen kann. Lp.

L. Ripert. Sur la sphère et les quadriques de douze points du tétraèdre général. Mathesis (2) **8**, 218-221. Mn.

M. Laporte. Sur des sections du cube. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 29.

Kapitel 4.
Darstellende Geometrie.

W. J. KURDÜMOW. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. St.Petersb. Abt. I: B. **1**, XL + 430 S. (1895); **2**, VII + 404 S. (1897); Abt. II: II + 142 S. (1894); Abt. III: III + 232 S. (1893).

Der im Jahre 1898 erschienene zweite Band der ersten Abteilung schliesst dieses umfangreiche Lehrbuch des Professors am Institute der Strassenbauingenieure in St. Petersburg. In der Einleitung zum ersten Teile giebt der Verf. eine Skizze der Entwickelung der darstellenden Geometrie in Russland, besonders eine Geschichte des Unterrichts in der darstellenden Geometrie an dem genannten Institute, dessen erster Professor für dieses Fach Potier war, ein Schüler Monge's. Teil I enthält die Einleitung in die darstellende Geometrie, die Theorie der orthogonalen Projectionen (Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen), die Anwendung der Theorie auf die Lösung geometrischer Aufgaben. Teil II bringt die Erzeugung und die geometrischen Eigenschaften der Curven und Flächen (Regelflächen, Translationsflächen, Flächen mit veränderlichen Erzeugenden, die Darstellung der Curven und Flächen in orthogonalen Projectionen). In Teil III folgen cotirte Projectionen (Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen, Umlegung, Lösung einfachster Aufgaben, krumme Linien und Flächen, Hauptaufgaben über topographische Flächen und krumme Flächen). Teil IV umfasst die Axonometrie in recht- und schiefwinkligen Projectionen, ihre Anwendung auf die Lösung geometrischer Aufgaben und auf Schattenconstructionen. Si.

N. CHARRUIT. Cours de géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr. Paris: Nony & Cie. IV + 299 S. gr. 8°.

Bei einem so oft dargestellten Gegenstande genügt die Wiedergabe des Inhaltsverzeichnisses.

Erster Teil. Darstellende Geometrie (S. 1-46). Kap. 1. Darstellung des Punktes und der geraden Linie. — Punkt. Gerade. Uebungsaufgaben. Kap. 2. Darstellung der Ebene. — Ebene. Schnitt zweier Ebenen. Schnitt einer Geraden und einer Ebene. Uebungsaufgaben. Kap. 3. Rechtwinklige Geraden und Ebenen. Uebungsaufgaben. Kap. 4. Vertauschungen der Projectionsebenen. Uebungsaufgaben.

Zweiter Teil. Cotirte Geometrie (S. 47-116). Kap. 1. Darstellung des Punktes und der Geraden. — Punkt. Gerade. Uebungsaufgaben. Kap. 2. Darstellung der Ebene. — Ebene. Schnitt zweier Ebenen. Schnitt einer Geraden und einer Ebene. Uebungsaufgaben. Kap. 3. Rechtwinklige Geraden und Ebenen. Uebungsaufgaben. Kap. 4. Allgemeine Methoden. — Methode der verticalen Hülfsebenen. Methode der Rotationen. Methode der Umklappungen. Uebungsaufgaben. Kap. 5. An-

wendungen der allgemeinen Methoden auf Ermittelungen von Abständen und Winkeln. — Abstände. Winkel zweier Geraden. Winkel zweier Ebenen. Winkel einer Geraden und einer Ebene. Lösung einer Aufgabe der darstellenden Geometrie. Uebungsaufgaben. Kap. 6. Polyeder. — Darstellung der Polyeder. Ebener Schnitt der Polyeder. Schnitt einer Geraden und eines Polyeders. Schnitt zweier Polyeder. Uebungsaufgaben.

Dritter Teil. Darstellung der Linien und Oberflächen (S. 117-186). Kap. 1. Allgemeines über die Linien und Oberflächen. — Linien. Oberflächen. Uebungsaufgaben. Kap. 2. Berührungsebene einer Oberfläche. Umgeschriebene Kegel und Cylinder. Scheinbarer Umriss. — Berührungsebene. Umgeschriebener Kegel und Cylinder einer Oberfläche. Scheinbarer Umriss einer Oberfläche. Kap. 3. Berührungsebenen an den Kegel- und Cylinderflächen. Uebungsaufgaben. Kap. 4. Berührungsebenen an den Umdrehungsflächen. Uebungsaufgaben. Kap. 5. Kugel und Berührungsebenen. Uebungsaufgaben. Kap. 6. Umkugel und Inkugel eines Tetraeders. Schnitt einer Geraden und einer Oberfläche. — Umkugel. Inkugel. Schnitt einer Geraden und einer Oberfläche. Uebungsaufgaben.

Vierter Teil. Ebene Schnitte der Oberflächen (S. 187-278). Kap. 1. Allgemeines. Ebener Schnitt der Kugel. — Allgemeines. Ebener Schnitt der Kugel. Durchschnitt einer Kugel und eines Polyeders. Uebungsaufgaben. Kap. 2. Ebener Schnitt des Cylinders. — Kreiscylinder. Schnitt eines Cylinders und eines Polyeders. Schiefer Cylinder. Uebungsaufgaben. Kap. 3. Ebener Schnitt des Kegels. — Kreiskegel. Schnitt eines Kegels und eines Polyeders. Schiefer Kegel. Uebungsaufgaben. Kap. 4. Anwendungen der Eigenschaften der Umdrehungsflächen auf Fragen der Abstände und Winkel. Construction dreiseitiger Ecken.

Note I. Natur der orthogonalen Projection eines Kegelschnittes auf eine Ebene (S. 279-287). Note II. Ebener Schnitt eines Umdrehungskegels, auf eine Ebene als Kreis projicirt (S. 289-296).

Die Durchführung und Darstellung entspricht den französischen Traditionen; die Ausstattung des Buches ist vortrefflich. Lp.

W. Binder. „Die cotirte Darstellung auf einer Bildebene" nebst einem Vorschlage: Zur einheitlichen Darstellung in der darstellenden Geometrie. II. Pr. Wiener-Neustadt. 16 S. mit 1 Fig.-Taf.

Diese Forsetzung des Aufsatzes (vergl. F. d. M. **28**, 461, 1897) enthält hauptsächlich die cotirte Darstellung der Kegelschnitte. Hau.

E. Engelbrecht. Zur Frage des darstellend-geometrischen Unterrichts an unseren Real- und Ober-Realschulen. Pr. (No. 235) Oberrealsch. Gleiwitz. 19 S. 4°.

Die Abhandlung erörtert die Verhältnisse, die für den Unterricht

in der darstellenden Geometrie, dem stereometrischen Zeichnen und dem planimetrischen Zeichnen durch die Schulreform vom Jahre 1890 gegeben sind. Hk.

R. Nicodemi. Figure nello spazio dedotte dalle rappresentazioni di esso in geometria descrittiva. Atti della Accademia Pontaniana. **28** oder (2) **3**. Mem. No. 3, 14 S.

In einer beliebigen Darstellungsmethode von denjenigen, welche in der darstellenden Geometrie Anwendung finden, entspricht jeder Geraden, jeder Ebene und jedem Punkte des Raumes ein Paar von Elementen der Darstellungsebene, welche ganz beliebig oder in einer gewissen Art verbunden sind. Setzt man zwischen den Elementen jedes Darstellungspaares eine beliebige Beziehung fest, so scheidet man aus allen Geraden, Ebenen und Punkten des Raumes eine untergeordnete Mannigfaltigkeit aus, welche in der Ebene ipso facto dargestellt wird und durch diese Darstellung studirt werden kann. Solche Erzeugungs- und Untersuchungsmethoden werden vom Verf. durch zahlreiche Anwendungen illustrirt, in denen er voraussetzt, dass die Darstellungsmethode eine bicentrale (z. B. eine Monge'sche) oder eine gewöhnliche Centralprojection sei. Um diese Anwendungen kurz zu charakterisiren, bezeichnen wir mit B die erste, mit Γ die zweite dieser Darstellungsmethoden.

Mannigfaltigkeiten, welche aus Geraden bestehen. Die zwei Elemente (Gerade in B, Punkte in Γ), die eine Gerade des Raumes darstellen, sind entsprechend a) in einer Projectivität, b) in einer Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt; so entstehen ein Strahlensystem (1, 3) oder (3, 1) und ein Complex zweiten Grades. Wenn die zwei Punkte in Γ eine feste Entfernung haben oder die zwei Geraden in B einen gegebenen Winkel bilden, so entstehen Strahlencomplexe vierter oder zweiter Ordnung.

Mannigfaltigkeiten, welche aus Ebenen bestehen. Die zwei Parallelen, welche in Γ eine Ebene darstellen, haben eine gegebene Entfernung oder besitzen von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung; oder die zwei Geraden, welche in der Monge'schen Projection einer Ebene entsprechen, bilden einen gegebenen Winkel oder sind in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt.

Mannigfaltigkeiten, welche aus Punkten bestehen. Die zwei (durch eine Bedingung verbundenen) Punkte, welche in B oder Γ einen Punkt des Raumes darstellen, sind entsprechend in einer Collineation oder in einer Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt, oder haben eine gegebene Entfernung, oder sind endlich gleich entfernt gegen einen Punkt der Tafel. La.

E. Salfner. Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden. Hoppe Arch. (2) **16,** 347-357.

Die genannte Aufgabe wird für die vier Fälle, dass die drei ge-

gebenen Geraden a) ein Dreikant mit zwei rechten Winkeln bilden, b) ein allgemeines Dreikant bilden, c) parallel sind, d) windschief sind, descriptiv gelöst, indem in den Fällen b, c, d eine leicht construirbare Ortscurve vom vierten Grade zu Hülfe genommen wird. Der constructiven Erörterung ist jedesmal eine rechnerische Behandlung der Lösung beigefügt. Hk.

C. Pelz. Die Hauptsätze der stereographischen Projection als Corollarien des Satzes von Quetelet und Dandelin. Prag. Ber. 1898, No. 31, 4 S.

Aus dem ersten Teile des Quetelet-Dandelin'schen Satzes leitet der Verf. auf einfache Weise die beiden Hauptsätze der stereographischen Projection ab. Die Einfachheit des angewandten Verfahrens lässt die Annahme des Verf. gerechtfertigt erscheinen, „dass es vom didaktischen Standpunkte recht vorteilhaft sein dürfte, diese Hauptsätze aus dem oben genannten Theorem zu entwickeln“. Sda.

M. d'Ocagne. Construction de la perspective conique d'une sphère. Nouv. Ann. (3) **17**, 44-46.

Einfache Construction der Axen der perspectivischen Kontur-Ellipse der Kugel. Hk.

M. d'Ocagne. Sur les raccordements par arcs de cercle. Nouv. Ann. (3) **17**, 314-317.

Für die (unbestimmte) Aufgabe, die Endpunkte zweier Strecken durch zwei Kreisbogen zu verbinden, die sich selbst und je eine Strecke berühren, werden die Sätze bewiesen: die geometrischen Oerter a) des Berührungspunktes der zwei Bogen, b) ihrer gemeinschaftlichen Tangente, c) ihrer gemeinschaftlichen Centrale werden gebildet von drei concentrischen Kreisen, deren gemeinsamer Mittelpunkt auf der Winkelhalbirenden der zwei Strecken liegt. Die Bogen haben eine kleinste Differenz der Halbmesser, wenn ihre gemeinschaftliche Centrale parallel der Winkelhalbirenden ist. Hk.

E. Seipka. Zwei Aufgaben über die Flächen dritten und vierten Grades, welche zum Unterrichte in der darstellenden Geometrie besonders geeignet sind. Monatsh. f. Math. **9**, 1-16.

Die behandelten Flächen sind: 1) das Konoid, dessen Leitgerade auf der Ebene des Leitkreises in einem Punkte P desselben senkrecht steht, und dessen Richtebene der Kreistangente in P parallel und gegen die Kreisebene unter 45° geneigt ist, 2) die Regelfläche, die von einer Strecke erzeugt wird, deren Endpunkte auf zwei zu einander rechtwinkligen windschiefen Geraden gleiten. Der Aufsatz giebt die Darstellung dieser Flächen in Grund- und Aufriss und die constructive Ableitung ihrer interessanten Eigenschaften. Sie erweisen sich in der

That als recht instructive Beispiele für die descriptive Behandlung von windschiefen Regelflächen. Hk.

F. Prochazka. Photogrammetrische Constructionen. Časopis **27**, 1-12, 101-112. (Böhmisch.)

Bearbeitung der dem Verf. von F. Müller zur Disposition gestellten Aufzeichnungen über Photogrammetrie. Beziehungen zwischen der orthogonalen und der centralen Projection eines Punktes, zwischen den centralen Projectionen der Punkte, resp. Geraden, wenn die Bildebene zur Grundrissebene normal ist; Beziehungen zwischen den Projectionen der Geraden a) bei verticaler Bildebene, b) bei besonderer Lage der Geraden und allgemeiner oder aber verticaler Lage der Bildebene, Beziehungen zwischen den Projectionen eines ebenen Gebildes bei allgemeiner Lage der Bildebene, Bestimmung der wahren Gestalt eines ebenen Gebildes. Sda.

F. Prochazka. Beitrag zur Photogrammetrie. Časopis **27**, 312-317. (Böhmisch.)

Construction des Grundrisses eines Gebäudes oder einer Terrainpartie aus zwei photographischen, bei schiefer Bildebene erzielten Bildern. Sda.

W. Rulf. Zum Ovalwerk des Leonardo da Vinci. Monatsh. f. Math. **9**, 30-33.

Die Erzeugung einer Ellipse durch einen Punkt einer Strecke, deren Endpunkte auf zwei zu einander senkrechten Leitlinien gleiten (Kreuzzirkel, Papierstreifen - Construction), bleibt gültig, auch wenn die Leitlinien einen beliebigen Winkel einschliessen. Es ist aber ein Irrtum, anzunehmen (wie mitunter geschieht), die Leitlinien bilden dann zwei conjugirte Durchmesser der erzeugten Ellipse. Auch sind die zwei durch Bewegung der Strecken $a+b$ und $a-b$ erzeugten Ellipsen nicht identisch, sondern besitzen vier gemeinschaftliche, zu den Leitlinien parallele Tangenten, deren Abstände $= 2a$ und $2b$ sind. Dies wird auf elementar-geometrischem Wege nachgewiesen. Hk.

E. Brauer. Perspectiv-Reisser. Schlömilch Z. **43**, 163-166.

Der „Perspectiv-Reisser" beruht auf dem gleichen Princip wie Hauck's perspectivischer Apparat (s. F. d. M. **16**, 524, 1884), stellt aber eine Vereinfachung und Verbilligung desselben vor, die dadurch erzielt ist, dass auf die mechanische Verknüpfung zwischen Grundriss- und Aufriss-Fahrstift sowie auf die Veränderlichkeit des Winkels zwischen Bildebene und Aufrissebene verzichtet ist. Der Apparat liegt auf einem gewöhnlichen Reissbrett auf und besteht aus gleitenden Linealen aus Holz, deren Kanten an die zu fixirenden Punkte berührend angelegt werden. Hk.

A. KORSELT. Ueber den Tractoriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter. Schlömilch Z. **43**, 312-319.

Das vorgeführte Instrument, zur mechanischen Verzeichnung der Tractorie einer gegebenen Curve dienend, beruht auf dem Princip des Rädchens mit scharfem Rande, wie es in neuerer Zeit vielfach zur Anwendung gebracht worden ist. Es wird die Differentialgleichung der Tractorien aufgestellt und die Gleichung der Kreistractorie und der Geradentractorie entwickelt. Daran wird gezeigt, wie die Winkelvielteilung, sowie die Construction der Zahlen π und e mit Hülfe des Instruments mechanisch ausgeführt werden kann. Endlich wird seine Verwendung als Planimeter besprochen, welche auf das Princip des Prytz'schen Stangenplanimeters hinausläuft. In einer Zusatzbemerkung stellt Mehmke fest, dass als der eigentliche Erfinder des Tractoriographen mit scharfrandigem Rädchen der Marchese Poleni (1729) anzusehen ist. Hk.

H. S. HELE-SHAW. A new instrument for drawing envelopes, and its application to the teeth of wheels and for other purposes. Brit. Ass. Rep. 1898, 619-627.

Der Aufsatz giebt zuerst eine Beschreibung der verschiedenen Formen des neuen Instrumentes und liefert dann Beispiele für seinen Gebrauch als Curvenzirkel und für seine Anwendungen bei solchen Zwecken wie zur Anfertigung von Radzähnen. Das Instrument scheint eine Weiterbildung einer vom Verf. zu dem Behufe erdachten Anordnung zu sein, seinen Studenten die Enveloppe irgend einer ebenen Figur zu zeigen, die sich um eine feste Axe auf einer anderen sich umwälzenden Oberfläche dreht, indem beide zugleich auf einem Paare hypothetischer Kreise rollen. Diese Anordnung bestand nur aus zwei Bogen Papier, die sich um Zeichennägel als Centren drehten, während ein kleines Rad mit einer Anzahl projicirender Nadelspitzen an seinem Rande gleichzeitig beide Papierbogen fasste und sie hierdurch zwang, gleichzeitig sich umzuwälzen. Gbs. (Lp.)

W. K. PALMER. The designing of cone pulleys. Kansas Univ. Quart. **7**, 41-75.

Bei den sogenannten „Stufenscheiben“ zum Auflegen eines Riemens ohne Ende ist die Aufgabe: die Halbmesser in allen Stufenpaaren so zu bestimmen, dass derselbe Riemen auf alle Paare passt, dass also der Riemen für alle gleiche Länge hat. Beim gekreuzten Riemen ist dies der Fall, wenn die Summe der zwei Halbmesser constant ist. Beim offenen Riemen wird die Beziehung zwischen den zwei Halbmessern durch eine transcendente Gleichung ausgedrückt, welche durch graphische Construction gelöst werden kann. Eine solche Construction wurde schon von Reuleaux (in seinem „Constructeur“) angegeben. Diese Lösung

wird von dem Verf. auf eine wesentlich einfachere Form gebracht, welche sehr befriedigende Näherungsresultate liefert. Hk.

H. von der Heyden. Zu den Lehrmitteln. Bing's Kreiswinkel. Hoffmann Z. **29**, 180-181.

Angabe derjenigen Aufgaben, welche sich mit Hülfe des Winkels $\arc\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}) = 27°35'49{,}6''$ zeichnerisch lösen lassen. Lp.

Weitere Litteratur.

C. Alberti. Die darstellende Geometrie. Teil I. Stuttgart. VIII + 99 S. gr. 4°. Mit 78 Holzschnitten und Atlas von 41 farbigen Tafeln in Folio.

J. Bourgoin. Études architectoniques et graphiques. Mathématiques, arts d'industrie, architecture, arts d'ornements, etc. Tome I: Introduction générale, prolégomènes à toute géométrie comme à toute graphique. Paris: Schmid. X + 142 S. 8°.

C. Brisse. Cours de géométrie descriptive, professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures. Rédigé et annoté par H. Picquet. Paris: Baudry et Cie. VIII + 470 S. 8°.

J. Caron. Cours de géométrie descriptive. Géométrie cotée. Paris.

F. Claessens. Cours de géométrie appliquée. (Complément d'algèbre, trigonométrie rectiligne, courbes usuelles, lever des plans, arpentage, nivellement). Morlanwelz. 128 S. 8°.

V. Darchez. Nouveau cours de dessin géométrique. Partie III. Paris.

Descriptive and solid geometry and graphic arithmetic (elementary stage). Solutions to 150 questions taken from departmental examinations and Moffat's testpapers. London: Moffat. 8°.

H. Diesener. Darstellende Geometrie. Vierte verbesserte Auflage. Halle.

H. Ferval. Cours de géométrie cotée, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr et à l'École navale. Paris: Belin. 244 S. 8°.

H. Ferval. Éléments de géométrie descriptive. 2e édition. Paris.

G. Franceschi. I principali solidi geometrici sviluppati in modo di renderne facile la costruzione. Napoli. 24 S. Con 24 tavole.

G. Ganora. Elementi di disegno ornamentale geometrico. Parte I: Costruzioni grafiche nel piano. Torino. 140 S. 8°.

A. Gut. 18 Wandtafeln zum geometrischen Zeichnen. (Planimetrische Construction.) Für höhere Lehranstalten und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht. Wiesbaden: R. Bechtold & Co. 32 S. 8°. Mit 22 Taf. à 72,5 × 36 cm.

J. Hoch. Katechismus der Projectionslehre mit einem Anhang, enthaltend die Elemente der Perspective. 2. Aufl. Leipzig: J. J. Weber. VIII + 153 S. 12°. (Weber's illustrirte Katechismen. No. 130.)

L. Ibach et G. Mariaud. Préparation à l'École Saint-Cyr et à l'École navale. Géométrie cotée. Paris: Croville-Morant. 221 S. 8°.

J. F. Éléments de géométrie descriptive, avec de nombreux exercices. 6e éd. Paris: Poussielgue. 462 S. 16mo.

A. Jully. Éléments de géométrie expérimentale, à l'usage des élèves des cours professionnels et des ouvriers, avec de nombreuses applications au trait. Paris: Belin Frères. 296 S. 16mo.

E. Martin et F. Pernot. Cours de géométrie descriptive. Volume II: Surfaces de révolution, intersection des surfaces, surfaces du second ordre. Paris. 500 S. gr. 8°.

F. Napravnik. Geometrie und geometrisches Zeichnen. Wien. VIII + 200 S.

P. Pignant. Éléments de géométrie descriptive. Dijon: Jacquot et Floret. 55 S. 4°.

J. H. Spanton. Complete perspective course comprising the elementary and advanced stages of perspective, the projection of shadows and reflections, with exercises in theory and practice, also the practical applications of perspective. London and New-York: Macmillan and Co. XVIII + 282 S. [Nature **57**, 602.]

Th. Tapla. Vademecum der darstellenden Geometrie. Für Schüler gewerblicher Lehranstalten, für Schüler und Absolventen des Gymnasiums, sowie für Praktiker. Wien: C. Fromme. XIII + 163 S. gr. 16°. Mit 39 Taf.

H. Weishaupt. Das Ganze des Linearzeichnens für Gewerbe, Fortbildungs- und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht. (In 4 Abteilungen.) 1. Abteilung: Planimetrische Constructionslehre. 4. Aufl. von Max Richter. Leipzig: H. Zieger. X + 130 S. 8°. Mit 36 Taf. in Quer-Fol.

F. N. Willson. Descriptive geometry pure and applied; with a chapter on higher plane curves and the helix. A theoretical and practical treatise, including problems of intersection, development, tangency, etc. New York: Macmillan. XVI + 250 S. 4°.

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projective Eigenschaften. Bearbeitet von H. Schröter, 3. Auflage, durchgesehen von R. Sturm. Leipzig: B. G. Teubner. XVII + 537 S. 8°.

Die mathematische Welt kann sehr erfreut sein, dass nach Schröter's Tode das Steiner-Schröter'sche Buch für eine dritte Auflage von demjenigen Mathematiker durchgesehen ist, der in doppeltem Sinne Nachfolger Schröter's ist, und der also, wie kein anderer, dazu berufen war.

Sachlich ist im grossen und ganzen nichts Wesentliches geändert. Wohl aber findet man manche äusserlichen Aenderungen, Kürzungen, Umstellungen, Vereinfachungen der Bezeichnung und neuere Terminologie. Ein Teil der Hinzufügungen ist Schröter'schen Notizen entnommen, wie z. B. eine sehr einfache Behandlung der Quadratur des Parabelsegments; ein anderer Teil rührt von Sturm her, z. B. die ordentliche Einführung und Anwendung der auf Kegelschnitten liegenden projectiven Punktreihen und Strahlenbüschel, insbesondere der auf Kegelschnitten liegenden Involutionen, die in früheren Auflagen (allerdings in Uebereinstimmung mit den von Steiner in seinen Vorlesungen ausgesprochenen Ansichten Lp.) nicht so zu ihrem Recht kamen, wie sie es bei ihrer Fruchtbarkeit verdienen. Ferner ist neu die Unterscheidung der beiden Fälle der Aehnlichkeit zweier Kegelschnitte, Aehnlichkeit im engeren und im weiteren Sinne, wie sie z. B. bei zwei conjugirten Hyperbeln stattfindet.

Der Uebungsstoff, den Schröter in „Aufgaben und Sätzen" der zweiten Auflage hinzugefügt hat, ist noch vermehrt, insbesondere um metrische Beziehungen. Bei den im Buche erwähnten und schon verstorbenen Mathematikern ist die Lebenszeit hinzugefügt. Den Schluss des Buches bilden kurze Biographien Steiner's und Schröter's.

Scht.

F. Enriques. Lezioni di geometria projettiva. Bologna: N. Zanichelli. IX + 377 S.

Dieses neue und vortreffliche Lehrbuch der projectiven Geometrie ist auf Grund der Methode von Staudt bearbeitet; aber der Verf. hat diejenigen didaktischen und wissenschaftlichen Verbesserungen eingeführt, zu welchen die Resultate der neuesten Untersuchungen über die Grundlagen der ganzen Geometrie genötigt haben. Inhalt und Anordnung des Stoffes kann man aus der folgenden Inhaltsübersicht ersehen.

Einleitung. I. Grundsätze. II. Das Dualitätsgesetz. Vorläufige Theoreme. III. Harmonische Gruppen. IV. Das Stetigkeitspostulat und seine Anwendungen. V. Der Fundamentalsatz der Projectivität. VI. Projectivität unter Gebilden erster Stufe. VII. Involution bei Gebilden erster Stufe. VIII. Projectivität unter Gebilden zweiter Stufe. IX. Die Kegelschnitte. X. Projectivität zwischen Kegelschnitten. XI. Bestimmte Aufgaben. XII. Focaleigenschaften der Kegelschnitte. XIII. Metrische Eigenschaften der Kegel zweiter Ordnung. XIV. Projectivität unter Gebilden dritter Stufe. Anhang (abstracte Geometrie, projective Coordinaten, imaginäre Elemente, historische Uebersicht). La.

G. Kober. Die Grundgebilde der neueren Geometrie. I. Teil: Die Grundgebilde der Ebene. Hannover, Leipzig: Hahn'sche Buchhdl. VIII + 95 S. 8°.

Der Verf. des vorliegenden eigenartigen Buches will die schwierige Aufgabe lösen, unter Verzichtleistung auf die Mittel der Anschauung (erläuternde Figuren, symbolische Bezeichnungen) eine Einführung in die neuere Geometrie zu geben. Dieses Ziel sucht er dadurch zu erreichen, dass er die übliche deductive Methode mit dem ihr anhaftenden Mangel des beständigen Zurückgreifens auf frühere Sätze durch eine inductive ersetzt, bei der die nachträglichen Beweise vermieden werden. Auf diese Weise, glaubt er, werde die bildliche Darstellung des inneren Zusammenhanges, die Zeichnung, überflüssig, und es werde „die innere Vorstellung gewahrt, das mittelbare Erkennen in ein unmittelbares Schauen verwandelt", die Darstellung werde, „ihres mathematischen Gewandes entkleidet, auch dem Nichtmathematiker verständlich".

Auf die Fassung und Anordnung der Sätze ist eine bis ins Kleinste gehende Mühe verwendet worden, und auch die einleitenden Definitionen, so widerspruchsfähig sie naturgemäss zum Teil sein mögen, zeugen von grosser Sorgfalt. Deshalb kann dem Kenner der Geometrie die Lectüre des Buches nur empfohlen werden. Ob aber auch der Lernende den vom Verf. gewollten und erhofften Nutzen haben wird, erscheint zweifelhaft; und ein Nichtmathematiker gar wird in der Regel die notwendige Kraft der inneren Anschauung nicht besitzen.

Der Stoff ist auf zwei Kapitel verteilt, von denen das erste Punktreihe und Strahlenbüschel, das zweite Punkt- und Strahlenfelder behandelt. Jedes ist in zwei Unterabteilungen geschieden, in denen die Um- und Abbildungen der ersten, bezw. der zweiten Ordnung untersucht werden. Dabei sind zwei Grundgebilde einer Stufe, welche einander oder ein anderes Grundgebilde derselben Stufe tragen, als Um- oder Abbildungen von einander bezeichnet, und diese Benennungen führen zu einer Erklärung der allgemeinen Projectivität, die der Verf. bei Thomae gefunden hat. Das Buch schliesst mit der Entwickelung der Hauptsätze über Curvenbüschel und Curvenscharen zweiter Ordnung.

Ot.

M. Pieri. Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 780-798.

Durch diese neue Arbeit setzt der Verf. seine ausdauernden Forschungen (vergl. F. d. M. **26**, 605, 1895; **27**, 420 und 431, 1896; **28**, 469, 1897) über die verschiedenen Methoden fort, um die abstracte projective Geometrie zu begründen und zu entwickeln; hierbei hat er sich als Hauptzweck gesetzt, den Nachweis zu führen, dass man als Grundlage dieses Zweiges der Mathematik die Stammbegriffe „projectiver Punkt" und „Homographie" wählen kann. Die Grundsätze, durch welche dieselben eingeführt werden, sind die folgenden: I. Der projective Punkt und die Homographie sind Wesenklassen. II. Es existirt mindestens

ein projectiver Punkt. III. Ist a ein projectiver Punkt, so existirt immer ein anderer, von diesem verschiedener. IV. Jede Homographie ist eine Transformation projectiver Punkte in andere. V. Die umgekehrte Transformation einer Homographie ist eine Homographie. VI. Die Folge zweier Homographien kann durch eine einzige Homographie ersetzt werden, welche die Resultante oder das „Product“ der ersteren genannt wird; mit anderen Worten: die Homographien bilden eine Gruppe. VII. Sind zwei verschiedene projective Punkte gegeben, so existirt eine von Null und von dem ganzen Raum verschiedene Figur, die durch jede Projectivität in sich selbst übergeführt wird (d. h. in Bezug auf jede Projectivität covariant ist), welche jene Punkte in sich selbst transformirt. VIII. Zwei verschiedene Figuren von der im vorigen Satze beschriebenen Beschaffenheit können nicht existiren. — Zwei beliebige projective Punkte a, b bestimmen in Folge dessen eine Figur, welche die Verbindende von a mit b genannt wird und von der Verbindenden von b mit a nicht verschieden ist; sie enthält ausser a und b noch andere Punkte, und der Raum enthält Punkte, welche jener Verbindenden nicht angehören. Alle analogen Verbindenden bilden eine Klasse, deren Elemente „projective Gerade“ genannt werden. Wir müssen andere Folgerungen jener Grundsätze unerwähnt lassen, führen jedoch die folgenden neuen an: IX-X. Sind a, b zwei verschiedene projective Punkte, falls c zur Verbindungslinie ab gehört, ohne mit b zusammenzufallen, so wird b zur Verbindungslinie ac gehören. Die Begriffe „in gerader Linie zu sein“ und „projective Ebene“ können nachher wie gewöhnlich festgestellt werden. Die eindeutige Bestimmung einer projectiven Ebene durch drei Punkte, wie die Eigenschaften derselben, jede Gerade zu enthalten, welche zwei ihrer Punkte verbindet, und dass zwei ihrer Geraden sich schneiden, können aus dem folgenden neuen Grundsatz gefolgert werden: XI. Sind a, b, c projective Punkte, welche derselben projectiven Geraden nicht angehören, und ist a' ein projectiver Punkt, welcher bc angehört, ohne mit b oder c zusammenzufallen, b' ein projectiver Punkt, welcher ac angehört, ohne mit a oder c zusammenzufallen, so schneiden sich die Geraden aa', bb'. Man nehme ferner an: XII. Sind a, b, c drei projective Punkte, welche nicht in einer Geraden sind, so existirt mindestens ein projectiver Punkt, welcher der projectiven Ebene abc nicht angehört. Dann kann man den Desargues'schen Satz über perspective Dreiecke beweisen.

Der Verf. setzt darnach die folgenden Grundsätze fest: XIII. Jede Homographie, welche drei verschiedene projective Punkte einer projectiven Geraden in sich selbst transformirt, wird jeden anderen Punkt derselben Geraden in sich selbst transformiren. XIV. Auf einer projectiven Geraden liegen die drei verschiedenen projectiven Punkte a, b, c und ein vierter d; ist o ein anderer projectiver Punkt, welcher r nicht angehört, so wird jede Homographie welche oa, ob, oc fest lässt, auch od fest lassen. XV. Wenn zwei Quintupel von projectiven Punkten (a, b, c, d, e), (a', b', c', d', e') gegeben sind, und wenn es keine Ebene giebt, die alle Elemente eines derselben enthält, so existirt eine Homo-

graphie, welche die Punkte des ersten in die des zweiten überführt. — Will man auch zu den involutorischen Homographien und den harmonischen Gebilden gelangen, so muss man den folgenden Grundsatz festsetzen: XVI. Die drei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierseits können nie in gerader Linie sein. So ist man in der Lage, die Eigenschaften der Homographie zwischen Gebilden erster, zweiter oder dritter Stufe zu beweisen. Aber um die gewöhnlichen Zwecke zu erreichen, ist es nützlich, die Klasse der projectiven Punkte durch folgenden neuen Grundsatz einzuschränken: XVII. Sind a, b, c, d vier projective, nichtcoplanare Punkte, und ist p ein anderer projectiver Punkt, welcher sich in keiner der Ebenen bcd, acd, abd, abc befindet, so existirt ein Punkt, welcher beiden Figuren ap, bcd angehört. Will man ferner die Sätze begründen, welche Doppelemente, Trennung von Punkten u. s. w. betreffen, so muss man die folgenden Principe annehmen: XVIII. Wenn unter den Elementen a, b, c, d einer Geraden die Paare a, b und c, d sich trennen, so werden die Paare b, c und a, d sich nicht trennen. XIX. Falls umgekehrt weder die Paare a, b und c, d, noch die Paare b, c und a, d sich trennen, so werden a, c und b, d sich trennen. — Will man endlich die Stetigkeit einführen, so muss man nach dem Verf. einen neuen (XX.) Grundsatz annehmen, als welchen man das Dedekind'sche Postulat in projectivem Sinne annehmen kann.

La.

Ed. Weyr. Die projective Geometrie der Grundgebilde erster Stufe. Prag. 189 S. mit 112 Fig. im Texte. (Böhmisch.)

Der Verein der böhmischen Mathematiker in Prag hat beschlossen, unter dem Titel „Sborník Jednoty českych Mathematiků v Praze" eine Reihe von wissenschaftlichen Lehrbüchern aus dem Gebiete der Mathematik, der darstellenden Geometrie, der Kinematik, der Astronomie, der Physik, der Elektrotechnik und der physikalischen Chemie in zwanglosen Heften in böhmischer Sprache herauszugeben. Das vorliegende Werk stellt die erste Nummer dieser Sammlung vor.

1. Perspective und projective Beziehung der Grundgebilde erster Stufe. 2. Reciprocität. Das vollständige Viereck und Vierseit. Perspective Dreiecke und weitere Anwendungen. 3. Projective Gebilde auf denselben Trägern. Doppelelemente. 4. Involution. 5. Projective Eigenschaften des Kreises. Construction der Doppelelemente. 6. Curven und Kegel zweiter Ordnung. 7. Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitte, Tangenten aus einem Punkte. Projective Reihen und Büschel zweiter Ordnung, insbesondere die involutorischen. Pol und Polare. 8. Construction von Kegelschnitten aus imaginären Punkten und Tangenten. Adjungirte Involutionen. Projective Gebilde auf denselben Trägern mit zusammenfallenden Doppelelementen. 9. Kegelschnittbüschel, Kegelschnittreihe. Der Satz von Desargues und seine Verallgemeinerung. Construction von Kegelschnitten aus fünf Elementen. Die polare Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar. 10. Mittelpunkt, con-

jugirte Durchmesser, Axen, Brennpunkte, Leitgeraden der Kegelschnitte. Die imaginären Kreispunkte im Unendlichen. Confocale Kegelschnitte. Der Osculationskreis. Homothetische Kegelschnitte. 11. Geradlinige Flächen, erzeugt durch projective Grundgebilde. 12. Projectivität der Elementargebilde.

In Betreff der imaginären Elemente weicht der Verfasser in seinem gediegenen Werke absichtlich von dem rein geometrischen Vorgange von Staudt's ab, um, wie er bemerkt, dem in den Elementen der analytischen Geometrie bewanderten Leser die constructive Verwertung der imaginären Elemente und Gebilde zu erleichtern. Sda.

H. G. Zeuthen. Sur le fondement de la géométrie projective. C. R. **126**, 213-215.

Schon in zwei Mitteilungen vom November 1897 (F. d. M. **28**, 470, 1897) hatte Zeuthen der reinen Geometrie der Lage eine Grundlage gegeben, die von derjenigen abweicht, welche v. Staudt diesem Gebiete gegeben hat. Hier hebt der Verf. hervor, dass er bei dieser Fundamentirung die folgende Eigenschaft der windschiefen Flächen als evident ansieht: Eine Ebene γ, die durch eine nicht singuläre Erzeugende C hindurchgeht, hat eine Schnittcurve, die aus C und einer anderen Curve besteht, welche C in einem Punkte c schneidet, der sich auf der festen Erzeugenden bewegt, während die Ebene sich um diese Erzeugende dreht. Um zu der doppelten Erzeugung des Ortes der Strahlen zu gelangen, die drei feste Geraden schneiden, sind nur die beiden folgenden Sätze nötig: 1. Wenn fünf von den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sich auf den homologen Seiten eines vollständigen Vierecks befinden, so muss die sechste Ecke des Vierseits auf der sechsten Seite des Vierecks liegen. 2. Wenn fünf Ecken eines vollständigen Vierseits auf fünf Geraden liegen, die sich nicht schneiden, so ist der Ort der sechsten Ecke eine gerade Linie. Scht.

F. Schur. Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie. Math. Ann. **51**, 401-409.

Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, nach welchem die projective Beziehung zwischen zwei Geraden einer Ebene durch drei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt ist, sind in den letzten Jahren viele Publicationen erschienen, die sich auf die zum Beweise des Satzes notwendigen Axiome beziehen. H. Wiener hatte nun in seinem Aufsatze „Ueber die Grundlagen und den Aufbau der Geometrie" (Deutsche Math. Ver. **1**, 47; F. d. M. **24**, 500, 1892) die Behauptung ausgesprochen, dass sich jener Fundamentalsatz aus dem Satze des Desargues über zwei perspective Dreiecke und dem Satze des Pascal für einen aus zwei Geraden bestehenden Kegelschnitt ohne alle Stetigkeitsaxiome beweisen lasse. Hieran anknüpfend, liefert Schur einen Beweis des Pascal'schen Satzes für zwei Gerade nach einem auf

Dandelin (Recherches nouvelles sur les sections du cône ..., Annales de Gergonne, **15**, 387) zurückgehenden Verfahren, und zwar einen Beweis, der nur von den Congruenzaxiomen (Spiegelungen) Gebrauch macht, nicht aber von dem sogenannten Archimedischen Postulat. Auf den Pascal'schen Satz für zwei Gerade lässt sich dann leicht der Fundamentalsatz der projectiven Geometrie zurückführen. Scht.

G. Kalkmann. Zur Theorie der Elementargebilde zweiter und dritter Ordnung. Monatsh. f. Math. **9**, 247-265.

Die Theorie der mehrdeutigen, insbesondere der ein - zweideutigen Elementargebilde wird rein synthetisch begründet und der dankenswerte Versuch unternommen, sie der Geometrie der Lage einzuordnen.

Js.

F. Mariantoni. Sulle relazioni che intercedono tra i multirapporti di due n-uple di elementi di una forma geometrica di prima specie. Periodico di Mat. **13**, 151-155.

Es seien in einer gewissen Ordnung $2n$ Elemente eines Gebildes erster Stufe gegeben, eingeteilt in zwei Klassen zu je n: $a_1 a_2 \dots a_n$, $b_1 b_2 \dots b_n$. „Vielverhältnis" dieser Klassen von Elementen wird das Product der einfachen Verhältnisse genannt:

$$(1) \qquad R = (a_1 a_2 b_1)(a_2 a_3 b_2) \dots (a_{n-1} a_n b_{n-1})(a_n a_1 b_n).$$

Dasselbe ist, wie bewiesen wird, gleich dem Producte der folgenden Doppelverhältnisse:

$$(2) \qquad R = (a_1 a_2 b_1 b_2)(a_1 a_3 b_2 b_3) \dots (a_1 a_n b_{n-1} b_n).$$

Die Note bezweckt die Aufstellung von Beziehungen zwischen den durch Aenderung der Ordnung der Elemente entstehenden verschiedenen Vielverhältnissen. Lp.

E. O. Lovett. On the general theory of anharmonics. Lond. M. S. Proc. **29**, 566-575.

Es wird gezeigt, wie die im Titel genannte Clifford'sche Theorie aus Lie's Theorie der projectiven Gruppen abgeleitet werden kann. Der Reihe nach werden die Fälle von sechs Punkten in der Ebene, von acht Punkten im Raume und von $2(n+1)$ Punkten im R_n erledigt. Zwischen den Inhalten der von je drei Punkten der Ebene gebildeten Dreiecke, den Inhalten der von je vier Punkten des Raumes gebildeten Tetraeder und den n-dimensionalen Inhalten der von je $n+1$ Punkten im R_n gebildeten $(n+1)$-Ecke bestehen Identitäten, deren Transformationen (wie hier bemerkt sein mag) den Gesetzen der Ausdehnungslehre folgen, wenn diese Inhalte als äussere Producte der beteiligten Eckpunkte angesehen werden. Schg.

Fr. Deruyts. Note sur les groupes neutres à éléments multiples associés des involutions unicursales. Belg. Bull. (3) **35**, 196-206.

Le Paige et Neuberg. Rapport. Ibid. 166.

Anzahl der Gruppen von k neutralen Elementen bei einer Involution I_k^n, die $k-2$ Bedingungen unterliegen. Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Note sur les éléments neutres de l'involution et leurs applications aux courbes gauches. Belg. Bull. (3) **35**, 885-894.

C. Le Paige et Neuberg. Rapport. Ibid. 778.

Die Anzahl der Gruppen von $k+p$ neutralen Elementen einer Involution I_k^n von der Ordnung n und dem Range k ist nur endlich, wenn $p=k-2$. Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Sur la détermination des éléments neutres d'espèce quelconque. Belg. Bull. (3) **36**, 187-193.

Fr. Deruyts. Sur quelques propriétés des courbes gauches. Ibid. 194-204.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 148.

Ausdehnung und Verallgemeinerung der früheren Untersuchungen des Verf. auf beliebige Räume. Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Sur quelques propriétés des polygones inscrits aux courbes gauches. Belg. Bull. (3) **36**, 553-566.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 496.

Anwendung der früheren Forschungen des Verf. über die Involutionen. Mn. (Lp.)

L. Ripert. Sur l'application du principe de dualité aux théorèmes de géométrie plane. Nouv. Ann. (3) **17**, 446-461.

Die metrischen Beziehungen zwischen den Elementen eines Feldes und eines Strahlenbündels sind bekanntlich nicht dual zu einander. Durch Erweiterung bisheriger und Einführung neuer Fundamentalbegriffe wird versucht, auch diese Eigenschaften dem Principe der Dualität zu unterwerfen. Js.

X. Antomari. Sur un cas particulier de la transformation homographique. Nouv. Ann. (3) **17**, 489-499.

Zwei Räume sind collinear, wenn zwei Punkte P und P_1 einander entsprechen, die durch zwei windschiefe Geraden a, b nach einem bestimmten Doppelverhältnis getrennt sind. Diese besondere collineare Beziehung wird eingehend besprochen; jedoch scheint dem Verf. die

Theorie geschart involutorischer Räume ganz unbekannt geblieben zu sein, sonst würde er sie nicht nochmals begründen, und zwar nur für reelle Involutionsaxen. Js.

E. Timerding. Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde. Gött. Nachr. 1898, 317-328.

Die Reye'schen Untersuchungen über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel und Räume (vergl. F. d. M. **22**, 633ff., 1890) wurden wesentlich synthetisch begründet und gleichzeitig in ihren Grundzügen so gut wie vollständig entwickelt. W. Stahl gab dann in einer kurzen Notiz (F. d. M. **22**, 622, 1890) die ersten Ansätze zu einer analytischen Behandlung dieser Mannigfaltigkeiten, ohne sie indessen weiter zu führen. In der Hoffnung, mit Hülfe der Analysis weiter zu gelangen, als die Synthesis führt, nimmt der Verf. die von W. Stahl begonnene Untersuchung wieder auf und weist zunächst auf die Verschiedenheit in der Behandlungsweise beider Forschungsmethoden hin. Während das synthetische Verfahren die linearen Mannigfaltigkeiten nach und nach aufbaut, geht das analytische von der allgemeinsten aus und löst diese in die in ihr enthaltenen niedrigeren Mannigfaltigkeiten auf. Bei der synthetischen Behandlung ergiebt sich zu jeder Mannigfaltigkeit eine andere, von der Reye sagt, sie ruhe auf der ersteren, und diese trage sie. Ganz anderer Art ist die Beziehung, welche die Grundlage für die analytische Behandlung der Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel oder Punktreihen bildet. Diese besteht zwischen einem Ebenenbüschel und einer zu ihm projectiven Punktreihe und drückt aus, dass beide in involutorischer Lage sind, wie schon W. Stahl erkannt hatte. Der Durchführung dieser Gedanken der Deduction auf analytischem Wege ist die vorliegende Abhandlung gewidmet. Im ersten Abschnitte werden die linearen Systeme projectiver Ebenenbüschel oder Punktreihen betrachtet; daran schliesst sich im zweiten Abschnitte die Behandlung quadratischer Systeme. Hierbei sind als Systeme zweiten Grades nicht diejenigen bezeichnet, welche durch eine allgemeine quadratische Gleichung in den acht fundamentalen Grössen u_μ, v_μ oder y_μ, z_μ dargestellt werden, sondern diejenigen, welche einer bilinearen Gleichung für die beiden Gruppen von je vier Grössen entsprechen, in die jene acht Grössen zerfallen. Lp.

A. Sauve. Nuovo metodo per costruire le tangenti ed i centri di curvatura alle curve piane. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **14**, 57-69.

Die Tangente in einem Punkte einer Curve und der Berührungspunkt in einer ihrer Tangenten wird mit Hülfe des Satzes gefunden, dass zwei conjective ebene ähnliche Systeme einen Punkt entsprechend gemein haben. Js.

Touche. Sur les figures inverses limites. S. M. F. Bull. **26**, 3-5.

Es wird gezeigt, wie ein System von Trajectorien und Orthogonalcurven durch ein Inversionsverfahren unter Anwendung des Grenzbegriffes in ein System von gleicher Beschaffenheit übergeht. Schg.

Weitere Litteratur.

A. Alasia. Sulle involuzioni di ordini superiori. Civitanova: Marche. 38 S. 8°.

E. v. Budisavljevič und A. Mikuta. Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. 1. Band. Grundzüge der Determinanten-Theorie und der projectiven Geometrie von E. v. Budisavljevič. Wien: W. Braumüller. X + 492 S. 8°.

F. Chomé. Étude géométrique du point simple d'une courbe gauche. Mathesis (2) **8**, 177-185. Mn.

K. Doehlemann. Projective Geometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig: G. J. Göschen. 162 S. 12°. [Sammlung Göschen, No. 72.]

E. T. Dixon. A paper on the foundations of projective geometry. Cambridge. 84 S. 8°.

G. Kemmer. Ueber die Verwandlung von Projectivitäten in Involutionen und von Reciprocitäten in Polarsysteme durch Anwendung von Projectivitäten. Darmstadt: C. F. Winter'sche Buchhdl. 24 S. mit 2 Taf.

F. Palatini. Osservazioni sulle corrispondenze univoche fra i gruppi di h punti del piano ed i punti dello spazio lineare di $2h$ dimensioni. Avellino. 13 S. Bericht auf S. 475 dieses Bandes.

Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. (In drei Abteilungen.) Abteilung I. Leipzig.

Th. Reye. Lectures on the geometry of position. Part I. Translated and edited by Thomas F. Holgate. London: Macmillan and Co. XIX + 248 S.

L. Ripert. La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre. Paris: Gauthier-Villars. 60 S. 8°.

C. J. Rueda. Tradado de las formas geometricas de primera categoria, precedido de una introduccion sobre los conceptos fundamentales de la geometria. Valencia. VII + 292 S. 4°.

Neuberg et Mansion. Rapport sur le Mémoire de M. Servais intitulé: la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité. Belg. Bull. (3) **35**, 352-353. Mn.

Cl. Servais. La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité. Mathesis (2) **8**, Suppl. 46 S. Aus Belg. Mém. Cour. **58**. Mn.

E. Torroja. Tratado de geometría de posicion y sus aplicaciones á la geometría de la medida. Cuaderno 1. Madrid. 112 S. gr. 4°.

B. Besondere ebene Gebilde.

J. THOMAE. Projectiver Beweis vom Schwerpunktsatze des Vierecks. Leipz. Ber. **50**, 1898, 254-260.

Schneidet man die sechs Seiten eines Vierseits durch eine Gerade und bestimmt auf jeder Seite den Punkt, der von jener Geraden durch die jeder Seite angehörigen beiden Ecken harmonisch getrennt ist, so ordnen sich die so bestimmten sechs Punkte in drei Gegenpaare, indem man die auf den Gegenseiten des Vierecks liegenden Punkte paart, und die sechs Punkte liegen so, dass die Verbindungslinien ihrer drei Gegenpaare sich in einem einzigen Punkte schneiden. Von diesem Satze, dessen Specialisirung für den Fall, dass die beliebige Gerade zur unendlich fernen Geraden wird, der Verf. Schwerpunktssatz nennt, hatte H. Schröter in seiner „Theorie der Kegelschnitte“ einen Beweis gegeben, der sich auf Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln, Kegelschnittscharen und Polarkegelschnitten stützt und deshalb der Einfachheit der zu beweisenden Wahrheit nicht entspricht. Thomae bringt hier einen sehr einfachen Beweis, der von der Bestimmung des Schwerpunkts von vier Punkten einer Geraden ausgeht. Der auf die unendlich ferne Gerade specialisirte Satz führt durch Parallelprojection in eine beliebige Ebene zu dem Satze, dass in einem Tetraeder die Verbindungslinien der Mitten der gegenüberliegenden Kanten durch einen und denselben Punkt gehen.

Scht.

J. VALYI. Ueber die Gruppen von mehrfach perspectiven Dreiecken in der Ebene. Monatsh. f. Math. **9**, 169-176.

Je zwei Glieder einer Gruppe von Dreiecken einer Ebene können zu einander auf gleiche Art mehrfach perspectiv liegen. Diese mehrfach perspective Lage ist entweder zwei-, drei-, vier- oder sechsfach. Besonders wichtig ist letzterer Fall; er wird unter anderem von den vier Dreiecken gebildet, deren Seiten die neun Inflexionspunkte einer ebenen Curve dritter Ordnung enthalten.

Js.

J. MANDL. Zur Theorie der Kegelschnittslinien. Monatsh. f. Math. **9**, 117-123.

Rechtwinklige Strahleninvolutionen, deren Träger Punkte einer Curve zweiter Ordnung f^2 sind, schneiden f^2 in Punktinvolutionen, deren Involutionscentra auf einer zu f^2 ähnlichen und ähnlich gelegenen Curve liegen.

Js.

K. SCHOBER. Ueber besondere symmetrische Punktsysteme zweiten Grades und Poncelet'sche Vierecke. Monatsh. f. Math. **9**, 89-109.

Eine Curve zweiter Ordnung wird von den Strahlenpaaren einer Strahleninvolution J, deren Scheitel nicht auf ihr liegt, in einem symmetrischen Punktsysteme zweiten Grades σ geschnitten. Die Punktquadrupel von σ sind Eckpunkte einfacher Vierecke, die seinem Leitkegelschnitte Γ umbeschrieben sind. Die Eigenschaften von σ und Γ

werden für eine elliptische und hyperbolische Involution J untersucht, wobei insbesondere die rechtwinklige Involution J berücksichtigt wird.
Js.

E. Duporcq. Sur un théorème de M. Humbert. S. M. F. Bull. **26,** 81-82.

Geometrisch wird bewiesen, dass, wenn 123456 ein Pascal'sches Sechseck ist und gleichzeitig der dem Fünfeck 23456 einbeschriebene Kegelschnitt durch den Punkt 1 geht, dann der dem Fünfeck 14365 einbeschriebene Kegelschnitt durch den Punkt 2 geht. Schg.

V. Snyder. On the Steiner points of Pascal's hexagon. American M. S. Bull. (2) **4,** 441-442.

Vereinfachung eines Beweises in der v. Staudt'schen Abhandlung: „Ueber die Steiner'schen Gegenpunkte etc." im J. für Math. **62,** wodurch auch die Natur dieser Gegenpunkte klarer hervortritt. Lp.

A. Laisant. Sur la correspondance d'une conique et d'une droite; et construction par points d'une conique passant par cinq points donnés. Lisboa Jorn. da Ac. (2) **5.**

Beweis dafür, dass, wenn ein Punkt der Ebene eines Dreiecks einen dem Dreiecke umbeschriebenen Kegelschnitt durchläuft, der inverse Punkt eine gerade Linie beschreibt. Hieraus wird ein Constructionsverfahren für beliebige Punkte eines durch fünf gegebene Punkte bestimmten Kegelschnitts abgeleitet. Tx. (Lp.)

R. Böger. Eine Aufgabe ersten Grades. Hamb. Mitt. **3,** 352-354.

Da die Aufgabe, durch fünf Punkte eine Curve zweiter Ordnung zu legen, linear ist, so muss sich diese Aufgabe mit alleiniger Anwendung des Lineals lösen lassen, und zwar auch in dem Falle, dass vier von den fünf Punkten imaginär sind. Die in den Lehrbüchern angeführten Constructionen verwenden aber in diesem Falle einen Kreis. Der Verf. füllt die hiermit angedeutete Lücke aus, indem er eine lineare Lösung giebt, die für 4, 2 oder 0 imaginäre Punkte gleichzeitig gültig ist. Er erreicht dies, indem er vier von den gegebenen Punkten durch zwei involutorische Punktreihen ersetzt. Scht.

E. N. Beltran. Metodo rápido para construir las curvas del segundo grado. La Naturaleza (4) **9,** 135-139.

Es wird hier eine Methode auseinandergesetzt, die Linien zweiten Grades zu construiren, und zwar die Ellipse und die Parabel; die Hyperbel zu construiren wird dem Leser überlassen, da die Methode hierfür ganz ähnlich ist. Die Ellipsenconstruction stützt sich darauf,

dass die Ellipse durch Deformation eines Kreises erhalten wird; die Construction der Parabel ergiebt sich daraus, dass bei der Parabel die Abscissen sich wie die Quadrate der Ordinaten verhalten. Die Construction geschieht also punktweise; für das Weitere muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Mz.

G. Holzmüller. Eine Kegelschnittaufgabe als grundlegende Voraufgabe der sphärischen Trigonometrie und Kartographie. Hoffmann Z. **29**, 92-93.

G. Hauck. Bemerkung zu der „Kegelschnittaufgabe" des Herrn Holzmüller in Heft 2, Seite 92, dieses Jahrgangs. Ebenda, 328-329.

W. Fiedler. Bemerkung zu den Lösungen der Holzmüller'schen Kegelschnittsaufgabe seitens der Herren Holzmüller und Hauck. Ebenda, 415-416.

„Eine Ellipse zu construiren aus ihrem Mittelpunkte, zwei Curvenpunkten und der Länge ihrer grossen Axe". Hauck liefert eine Construction, der Holzmüller dann auch den Vorzug vor der seinigen giebt. Fiedler macht einige historische Angaben über das Vorkommen der Aufgabe bei Steiner und in seinen eigenen Schriften. Lp.

R. F. Davis. Question 13773. Ed. Times **69**, 89-90.

A, B, C, D seien vier Punkte eines Kreises vom Mittelpunkte O, P ihr Schwerpunkt, ferner E, F, G die Schnittpunkte (AC, BD), (BA, CD), (AD, BC) bezw. Die Axen der beiden Parabeln durch A, B, C, D schneiden sich in P rechtwinklig; P liegt auf dem Kreis der neun Punkte des Dreiecks EFG. Die beiden Directrices schneiden sich auf dem Umkreise von EFG. Ist Z der Halbirungspunkt von OE und $ZP = ZU = ZU'$, wo U und U' auf DE liegen, so schneiden UP und $U'P$ den Kreis der neun Punkte von EFG in den beiden Brennpunkten S und S'. Beweis von A. Droz-Farny.

Lp.

J. C. Watson. Question 13628. Ed. Times **68**, 89-91.

Wenn ein beweglicher Punkt den Umkreis eines Dreiecks durchläuft, so ist die Bewegung der Wallace-Linie, die zu diesem Punkte gehört, identisch mit derjenigen einer Sehne des Kreises, von welcher der eine Endpunkt mit doppelter Geschwindigkeit wie der andere die Peripherie in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Dieser Satz ist ein specieller Fall der von Kiepert in Schlömilch Z. **17** (F. d. M. **4**, 354, 1872) gefundenen allgemeinen Resultate. Lp.

J. F. d'Avillez. Sur un groupe de trois paraboles. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 133-135.

Einem Dreiecke sei eine Ellipse eingeschrieben; dann schneidet jede Seite die Axen der Ellipse in zwei Punkten, und man kann je eine Parabel construiren, welche die Axen in diesen Punkten berührt. Die Brennpunkte dieser drei Parabeln liegen auf der Fusspunktencurve des Mittelpunktes. Aehnlich kann man mit einer umbeschriebenen Ellipse verfahren. Ueber die so construirten Parabeln werden mehrere Sätze ausgesprochen. Lp.

G. Vitali. Una proprietà delle coniche. Periodico di Mat. **13,** 145-146.

Wenn drei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente haben, so sind die drei Dreiecke, welche von den anderen, jedem der drei Kegelschnittspaare gemeinschaftlichen Tangenten gebildet werden, einem und demselben Kegelschnitte einschreibbar. Als Folgerungen ergeben sich einige bekannte Sätze über Kegelschnitte. Lp.

G. Gallucci. Sur une propriété focale des coniques. Nouv. Ann. (3) **17,** 74-75.

Zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnitts und die von den Brennpunkten auf sie gefällten Lote bilden sechs Tangenten eines neuen Kegelschnitts. Diesen Satz beweist der Verf. und dann im Zusammenhange damit Eigenschaften der sechs Punkte, die man als Fusspunkte erhält, wenn man auf die drei Seiten eines Dreiecks von zwei inversen Punkten aus die Lote fällt. Schröter hatte diese Eigenschaften schon für den speciellen Fall bewiesen, dass die sechs Punkte die Seitenmitten und die Höhenfusspunkte sind. (Vergl. Schröter-Steiner's Vorlesungen über Geometrie, 2. Teil, S. 84.) Man vergleiche auch Franke im J. für Math. **99,** 161 und Schröter's Bemerkungen zu diesem Satze, **99,** 233. Scht.

P. H. Schoute. Sur un théorème de M. G. Gallucci. Nouv. Ann. (3) **17,** 548-549.

Schoute beweist hier den von Gallucci in seiner Note (vergl. das vorangehende Referat) zuerst bewiesenen Satz auf noch einfachere Weise. Scht.

Fontès. Sur une solution du problème de Délos. Toulouse Bull. **1,** 129-133.

Bezugnehmend auf das Werk von Ambros Sturm über das delische Problem der Verdoppelung des Würfels, sucht der Verf. klar zu machen, wie die Alten auf die bekannte sogenannte Lösung, die auf der Aufsuchung der beiden mittleren Proportionalen $x = \sqrt{ay}$, $y = \sqrt{bx}$ beruht, kommen mussten. Scht.

V. Jarolímek. Ueber die in ein Geradenpaar zerfallenden Kegelschnitte eines symmetrischen Kegelschnittbüschels. Rozpravy 7, No. 21, 7 S. (Böhmisch.)

Der Verf. bestimmt die in ein Geradenpaar zerfallenden Kegelschnitte eines normalsymmetrischen Kegelschnittbüschels und verwendet die gewonnene Construction zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte, die dem erwähnten Büschel angehören; dies auch für den Fall, dass die gemeinschaftlichen Elemente imaginär sind. Sda.

G. Fontené. Sur un quadrangle mobile. Nouv. Ann. (3) **17**, 101-106.

Aus den durch Kegelschnitte hervorgerufenen doppelt quadratischen Correspondenzen leitet der Verf. mehrere Sätze ab, von denen der eine lautet: „Wenn vier Kegelschnitte vorliegen, die bezüglich der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits conjugirt sind, so kann ein bewegliches Viereck seine Ecken auf den vier Kegelschnitten haben, so dass seine sechs Seiten durch die sechs Ecken des Vierseits gehen."

Scht.

J. Edalji. Reciprocal polygons. Ahmedabad: Printed at the Diamond Jubilee Press. 87 S. 8°.

Wenn die Ecken eines Polygons Pole zu den Seiten eines andern bezüglich eines Kegelschnitts sind, so nennt der Verf. beide Polygone reciprok. Es werden zahlreiche Sätze über solche reciproken Polygone abgeleitet. Scht.

J. Edalji. Associated conics. Ahmedabad: Printed at the Ahmedabad Printing and General Agency Company. 80 S. 8°.

Zahlreiche Sätze über associirte Kegelschnitte und solche, die sich polar entsprechen. Scht.

Ch. Bioche. Sur les coniques qui sont les projections d'une cubique gauche. Nouv. Ann. (3) **17**, 541-546.

Das System der Kegelschnitte, welche die Centralprojectionen einer Raumcurve dritter Ordnung aus ihren einzelnen Punkten auf eine Ebene vorstellen, wird identificirt mit dem System aller Kegelschnitte, die einem Dreieck umbeschrieben sind, so dass ihre jedesmaligen Pascal-Linien (d. s. die Linien, in denen die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken liegen) durch einen festen Punkt gehen, oder —: so dass der Ort des jedesmaligen Pols einer Dreiecksseite ein dem Dreieck umbeschriebener Kegelschnitt ist.

Hk.

F. Morley. Some polar constructions. Math. Ann. **51**, 410-416.

Lineare Construction der Covariante von sieben gegebenen Punkten.

(Vergl. Math. Ann. **49,** 596; F. d. M. **28,** 510, 1897.) Zunächst wird die Polare von zwei Punkten bezüglich dreier Punkte construirt, dann die Polare eines Punktepaares bezüglich einer geraden Linie und eines Kegelschnitts, dann die Polare von drei Punkten bezüglich zweier Kegelschnitte, dann die von n Punkten bezüglich eines Doppelkegelschnitts, dann die Polare von fünf Punkten bezüglich eines dreifachen Kegelschnitts, endlich die Polare von sieben Punkten bezüglich eines vierfachen Kegelschnitts. Durch die letzte Construction gewinnt man den gesuchten covarianten Punkt. Scht.

H. S. White. Inflexional lines, triplets, and triangles associated with the plane cubic curve. American M. S. Bull. (2) **4,** 258-260.

Als Ergänzungen zu den bekannten Eigenschaften über die Wendepunkte einer kubischen Curve werden folgende Sätze abgeleitet:

Die neun Wendepunkte einer ebenen kubischen Curve können als die Ecken dreier Dreiecke angesehen werden, von denen jedes als einem derselben einbeschrieben, einem anderen als umbeschrieben angesehen werden kann; somit bilden diese drei eine geschlossene Reihe. Die drei in der Figur nicht auftretenden Wendepunktsgeraden enthalten alle neun Wendepunkte und bilden nach Definition ein Wendepunktsdreieck. Die Linien, welche drei Wendepunktsdreiecke einer ebenen kubischen Curve bilden, können auf sechs verschiedene Arten als solche betrachtet werden, die eine geschlossene Reihe von drei Dreiecken bilden, deren jedes dem vorangehenden einbeschrieben, dem folgenden umbeschrieben ist. In diesen Anordnungen kommt jede Seite eines Wendepunktsdreiecks viermal in einem Dreiersystem vor mit jeder Seite jedes anderen Wendepunktsdreiecks. Zuletzt werden Andeutungen über die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf Räume von mehr Dimensionen gemacht.

Lp.

E. Duporcq. Sur la correspondance quadratique et rationnelle de deux figures planes et sur un déplacement remarquable. C. R. **126,** 1405-1406.

Conjective, quadratisch verwandte ebene Felder, die fünf Paare entsprechender Punkte gemein haben, haben noch ein sechstes Paar gemein; haben sie sechs beliebige Paare entsprechender Punkte gemein, so haben sie unendlich viele solcher Punktepaare gemein, und zwar entsprechen sich in ihnen die Punkte zweier Curven dritter Ordnung. In conjectiven, quadratisch und collinear verwandten ebenen Feldern, die fünf Paare entsprechender Punkte gemein haben, entsprechen sich die Punkte zweier Kegelschnitte. Bewegen sich fünf Punkte einer Ebene auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen, so hat nach dem ersten Satze noch ein bestimmter sechster Punkt der Ebene die gleiche Eigenschaft. Js.

G. Scorza. Sopra le figure polare delle curve piane del 3° ordine. Math. Ann. **51**, 154-157.

Es wird für den von London in seiner Habilitationsschrift (Math. Ann. **36**, 535-584; F. d. M. **22**, 735, 1890) auf algebraischem Wege gefundenen Satz, dass das allgemeine Curvennetz dritter Ordnung genau zwei Polarsechsseite besitzt, ein mehr geometrischer Beweis gegeben. Ausserdem wird die durch das Verschwinden der a. a. O. mit P bezeichneten Invariante ausgedrückte Bedingung dafür, dass zwei Curven dritter Ordnung ein gemeinsames Polarfünfseit (und damit zugleich deren einfach unendlich viele) besitzen, dahin interpretirt, dass die beiden Curven sich als erste Polaren einer und derselben Curve vierter Ordnung und damit zugleich eines Büschels solcher auffassen lassen, unter denen die vierfach gezählte Verbindungsgerade der beiden Pole enthalten ist.

T.

W. H. Salmon. Question 13789. Ed. Times **69**, 119-120.

Drei Kreise berühren eine Kardioide und gehen durch ihren Pol; dann liegen ihre drei anderen Schnittpunkte in einer Geraden. — Wenn zwei Kreise eine Kardioide berühren und durch den Pol gehen, so hälftet ihre gemeinschaftliche Sehne den Winkel zwischen den Geraden, welche den Pol mit den beiden Berührungspunkten verbinden. Der Ort des anderen Endpunktes des Durchmessers durch den Pol bei irgend einem Kreise, der eine Kardioide berührt und durch den Pol geht, ist ein Kreis.

Lp.

S. Kantor. Réclamation de priorité à l'occasion de plusieurs notes de M. Paul Serret. C. R. **126**, 928.

Die Prioritätsansprüche beziehen sich auf charakteristische Eigenschaften des einer Hypocykloide mit drei Spitzen umbeschriebenen Fünf-, Sechs- und Sieben-Ecks, die S. Kantor früher (Sitzungsber. d. Wien. Ak. 1878, 204 und 233), Paul Serret erst im zweiten Semester der C. R. 1897 veröffentlicht hat.

M.

W. Binder. Die Undulationen ebener Curven C_6^4. (II. Mitteilung.) Wien. Ber. **107**, 23-40.

Das in der ersten Mitteilung (F. d. M. **28**, 485, 1897) für die Curven C_6^4 mit drei reellen Doppelpunkten benutzte Hülfsmittel der quadratischen Transformation auf einen beliebigen Kegelschnitt setzt ein reelles Doppelpunktsdreieck voraus. Für eine C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten benutzt der Verf. eine quadratische Beziehung zu einem die Curve vierpunktig berührenden Kegelschnitt und gelangt zu dem Ergebnis, dass eine solche C_6^4 nicht mehr als zwei Undulationen besitzen kann. Die beiden Fälle der ein- und zweifachen Undulation, die Beziehungen zwischen Undulations- und Doppeltangenten und die Möglichkeit ihrer gegenseitigen Substitution werden ausführlich untersucht.

Daran schliesst sich die Betrachtung der Curven mit einfacher und doppelter Symmetrie sowie der bicircularen C_4^4 (so zu bezeichnen, weil sie die imaginären Kreispunkte als Spitzen enthält), welche nur eine Undulation haben kann und sich als die einaxig symmetrische Epicykloide ausweist. Bezüglich der gestaltlichen Verhältnisse ist zu bemerken, dass die Curven mit einer Undulation alle drei Gattungen ihres reellen Doppelpunktes zeigen können, während er bei denen mit zwei Undulationen stets isolirt ist, und dass die zweiaxig symmetrischen Curven sowie die bicirculare C_4^4 gestaltlich constante Ovale sind und daher hier eine ähnliche Rolle spielen wie etwa der Kreis unter den Kegelschnitten.

Ot.

K. Küpper. Curventheoretisches. Prag. Ber. 1898, No. 1. 7 S.

A. Ueber eine ∞^5-Schar ultraelliptischer C_8^8 mit 13 gegebenen Doppelpunkten D, welche die Grundpunkte eines Netzes von C^4 bilden. I. Das Netz der C^4. II. Betrachtung derjenigen C_8^8, welche die 13 construirten D zu Doppelpunkten haben. III. Construction von C^{12}, welche die 13 D zu dreifachen Punkten haben, ∞^1 Gruppen G_3 besitzen und trotzdem keine $g_3^{(1)}$ haben können. B. Neuer Beweis des Umkehrtheorems.

Sda.

Weitere Litteratur.

W. H. Besant. Elementary conics. London: George Bell and Sons. 184 S. [Nature **58**, 318.]

E. Budden. A conic can be drawn through any five points. Math. Gazette **13**, 145-151.

W. Erler. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten bearbeitet. Mit 30 Figuren im Text. 5. Aufl. von L. Huebner. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 60 S. gr. 8°.

L. Fattor. Di una costruzione delle coniche per punti e per tangenti. Cividale: Fulvio. 7 S. 8°.

F. Fricke. Ueber ebene Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte gehen. Diss. Jena. 33 S. 8°.

L. Gérard. Sur les points d'inflexion d'une cubique. Bull. math. spéc. **5**, 49-50.

G. Loria. La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice. Mathesis (2) **8**, 265-267.

Ch. Michel. Théorie synthétique des cubiques à point double et des courbes de 3e classe à tangente double. Bull. de math. spéc. **4**, 97-106; **5**, 1-5, 65-68.

L. Ploner. Die Einheit der Kegelschnitte. Bozen.

P. H. Schoute. Over de cyklographische ruimte-afbeelding der cirkels van Joachimsthal. Amst. Versl. **7**, 6-12.

F. Tengler. Construction der conjugirten Durchmesser und Axen eines Kegelschnitts, der einem gegebenen polar-reciprok ist. Pr. Klagenfurt. 12 S. 8°.

J. A. Third. Modern geometry of the point, straight line, and circle. London: William Blackwood and Sons. 236 S. 8°.

Bericht auf S. 426 dieses Bandes.

J. de Vries. Over eenige groepen van cirkels. Amst. Versl. **6**, 418-421.

C. Besondere räumliche Gebilde.

H. Bögehold. Historisch-kritische Darstellung der Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Diss. Jena. 52 S. 8°.

Für die umfassende Darstellung aller Constructionen, die sich auf das im Titel genannte Problem beziehen, und die Erörterung ihres Zusammenhangs kann die Geschichte der modernen Mathematik dem Verf. sehr dankbar sein. Von der Hesse'schen auf das Problem bezüglichen Arbeit bis zur Thomae'schen von 1897 sind im ganzen 35 Abhandlungen über das Problem geschrieben, die der Verf. in acht Hauptgruppen teilt, die an die Namen Hesse, Seydewitz, Sturm, Chasles, Picquet, Reye, v. Staudt und Petot anknüpfen. Dazu kommen noch fünf eigenartige von Eilker, Diesing, Beyel, London und Liebmann. Ein Anhang behandelt einige Probleme, die aus dem im Titel genannten dadurch hervorgehen, dass ein Teil der Punkte durch Tangenten oder Tangentialebenen ersetzt wird. Scht.

K. Schober. Ueber solche Hyperbelschnitte von Flächen zweiten Grades, deren Projectionen auf einer gegebenen Ebene gleichseitig sind. Monatsh. f. Math. **9**, 233-246.

Ebenen, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen und eine Kegelfläche zweiter Ordnung k^2 mit der Spitze S in Hyperbeln schneiden, die sich auf eine gegebene Ebene ε als gleichseitige Hyperbeln projiciren, bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung. Seine eine Focalaxe steht auf ε senkrecht und die sie enthaltende Symmetrieebene auch auf der Polarebene des S auf ε projicirenden Strahles bezüglich k^2. Dieser Satz führt zu den ebenen Schnitten gleicher Eigenschaft des Hyperboloids und, wenn k^2 in ein Ebenenpaar zerfällt, zu denen des hyperbolischen Paraboloids. Js.

V. Jarolímek. Ueber homothetische Kegelschnitte auf zwei Flächen zweiter Ordnung. Rozpravy **7**, No. 20, 5 S. (Böhmisch.)

Der Verf. construirt die sechs Parallel-Ebenenbündel, von deren Ebenen zwei Flächen zweiter Ordnung nach homothetischen Kegelschnitten getroffen werden, und benutzt dieselben zur Construction der Schnittcurve zweier dreiaxigen Ellipsoide in allgemeiner Lage. Sda.

L. Klug. Einige Sätze über Regelscharen. Monatsh. f. Math. **9**, 110-116.

Gehören zwei harmonische Strahlengruppen a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1 einer Regelfläche zweiter Ordnung F^2, aber nicht derselben Regelschar an, so schneiden sich die zugeordneten Strahlenpaare a, b und a_1, b_1, sowie c, d und c_1, d_1 in je vier Punkten. Diese Punktquadrupel sind Eckpunkte zweier Tetraeder, die mit dem Poltetraeder von F^2, dessen Kanten paarweise die übrigen Schnittpunkte der acht Grundstrahlen verbinden, eine Gruppe desmischer Tetraeder bilden. Analog führen die Schnittpunkte der Strahlen a, b, c_1, d_1 sowie a_1, b_1, c, d zu zwei neuen Tetraedern und die übrigen Schnittpunkte der acht Grundstrahlen zu einem sie zu einer zweiten Gruppe desmischer Tetraeder ergänzenden Poltetraeder von F_2. Beide Gruppen sind einander conjugirt (vergl. das folgende Referat). Js.

L. Klug. Einige Sätze über Regelscharen. Ungar. Ber. **15**, 348-355.

Untersuchungen über geradlinige Flächen zweiten Grades und ihre Polartetraeder, projectiv geführt, mit folgendem Schlussresultat:

Nimmt man auf einer Regelfläche ϱ vier harmonische Strahlen der beiden Scharen an, so sind die vier Schnittpunkte von zwei harmonischen Paaren sowie die der beiden andern Paare die Ecken von zwei Tetraedern, die mit demjenigen Polartetraeder, dessen Kanten ϱ in den übrigen acht Schnittpunkten der harmonischen Quadrupel treffen, ein System desmischer Tetraeder bilden. — Die zuletzt genannten acht Schnittpunkte sind naturgemäss ebenfalls Ecken zweier Tetraeder, die mit dem durch die ersten acht Schnittpunkte bestimmten Polartetraeder desmisch verbunden sind (vergl. das vorangehende Referat). Hsb.

V. Jerabek. Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide. Časopis **27**, 308-311. (Böhmisch.)

Der Verf. löst die vorliegende Aufgabe mit Hülfe eines orthogonalen Hyperboloides, welches er durch die zu einer Leitebene des Paraboloides senkrechte Mantellinie desselben in der Weise legt, dass sich die Schnittcurve beider Flächen in jene Ebene nach einem Kreise projicirt.

Sda.

W. Schell. Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 163 S. 8°.

Die zweite Auflage der allgemeinen Theorie der Curven doppelter Krümmung stellt, verglichen mit der ersten, ein fast völlig neues Werk dar. Nur die kurzen Kapitel über die Fläche der Binormalen, die cyklificirenden Flächen und die Evolutoiden finden sich unverändert in beiden Auflagen, während alle übrigen Abschnitte ergänzt oder erweitert, oder völlig umgearbeitet sind. Neu hinzugekommen ist als elftes Kapitel

die Geometrie der Bewegung der Curven doppelter Krümmung. Ausgehend von der Aequivalenz der Translationen und der der unendlich kleinen Rotationen, wird hier durch einige kurze übersichtliche Ueberlegungen die Untersuchung bis zum Ball'schen Cylindroid fortgeführt. Ueberhaupt ist knappe und dabei klare Ausdrucksweise ein Hauptvorzug des Werkes; somit dürfte es besonders den Studirenden der Mathematik beim Einarbeiten in die allgemeine Theorie der Raumcurven von grossem Nutzen sein. Mannigfache Anregung zu selbständigem Schaffen wird ihnen das Schlusswort bieten. Js.

G. Gallucci. Sui tetraedri inscritti in una cubica gobba. Napoli Rend. (3) **4,** 207-215.

G. Gallucci. Note sur le deuxième concours des „Nouvelles Annales“ pour 1898. Nouv. Ann. (3) **17,** 422-423.

Nach Reye (Festschrift d. math. Ges. Hamburg 1890, 56) lassen sich die Punkte einer kubischen Raumcurve k^3 zu ∞^2 orthocentrischen Tetraedern T zusammenfassen, deren Höhenpunkte im allgemeinen auf der Sehne s liegen, in der sich alle durch k^3 gehenden gleichseitigen Hyperboloide schneiden. Durch ein Punktepaar von k^3 geht im allgemeinen keine einem Tetraeder T umbeschriebene Kugel. Liegt es aber auf einer solchen Fläche, so liegt es gleichzeitig auf ∞^1 von ihnen. Einem solchen Punktepaare E, F sind hiernach ∞^1 orthocentrische Tetraeder T zugeordnet, ihre Seitenflächen umhüllen eine räumliche orthogonale Parabel mit der Leitlinie s. Als Ort der Verbindungslinien ausgezeichneter Punktepaare E, F ergiebt sich eine Regelfläche vierter Ordnung. Die einem Tetraeder umbeschriebenen ∞^1 gleichseitigen Raumcurven dritter Ordnung liegen auf dem durch seine Höhen bestimmten Hyperboloide. Js.

W. A. Versluys. Étude des singularités d'une surface du troisième ordre, engendrée par un système de faisceaux homographiques H_3^2. Liège Mém. **20,** 61 S.

Untersuchung über die folgende reciproke Verwandtschaft. Man denke sich zwei Punktreihen x_1, y_1, z_1 und drei Axen x, y, z von Ebenenbüscheln. Drei Ebenen dieser Büschel gehen durch einen Punkt P_i und schneiden x_1, y_1, z_1 in drei Punkten, die eine Ebene π_i bestimmen. Umgekehrt kann man aus einer Ebene π_i einen Punkt P_i ableiten. Die Ebenen π_i und die Punkte P_i heissen „entsprechend“. Der Verf. bestimmt den Ort der Punkte, die den Ebenen eines Büschels, eines Bündels, den Schmiegungsebenen einer Curve entsprechen, und löst die dualistisch zugehörigen Probleme. So stösst er unter anderen bemerkenswerten Gebilden auf eine Oberfläche dritter Ordnung (oder dritter Klasse), die er sowohl im allgemeinen Falle als auch in verschiedenen besonderen Fällen untersucht. (Der Zusammenhang der Arbeit mit früheren, denselben Gegenstand betreffenden Anschauungen ist nicht berührt. Lp.)

Mn. (Lp.)

A. Schiappa Monteiro. Sur l'application de l'hyperboloïde à une nappe de quatrième ordre, comme surface auxiliaire. Lisboa Jorn. da Ac. (2) **5.**

Der Zweck ist, mit Hülfe des einschaligen Hyperboloids vierter Ordnung die folgende von Poncelet behandelte Aufgabe zu lösen: Es seien in einer Ebene zwei Kegelschnitte gegeben; die Projections-Mittelpunkte und Projectionsebenen so zu bestimmen, dass diese Kegelschnitte in zwei Kreise übergehen. Tx. (Lp.)

A. Brambilla. I poligoni principali di una quartica gobba dotata di un punto doppio. Napoli Rend. (3) **4,** 335-337.

A. Capelli. Rapporto. Ibid. 334-335.

Zwei Berichte über die genannte Brambilla'sche Arbeit, die einen besonderen Fall des Schliessungsproblemes bei den Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art behandelt. Es werden solche Polygone untersucht, bei denen die Schmiegungsebene in einem Polygonpunkte die Curve im benachbarten Polygonpunkte schneidet. Js.

A. del Re. Sopra una congruenza omaloide del 3^0 grado. Modena Mem. (3) **1,** 95-104.

Ein zu den Strahlenbüscheln (S) und (S') reciproker Strahlenbündel (S''), dessen Ebene $\sigma = (S''SS')$ durch die ihr entsprechenden Strahlen s und s' von (S) und (S') geht, erzeugt mit (S) und (S') eine Congruenz dritten Grades K, sobald jede Ebene α'' von (S'') mit derjenigen Ebene zum Schnitt gebracht wird, welche die ihr entsprechenden Strahlen a und a' von (S) und (S') enthält. S'' ist Spitze eines singulären Kegels, σ'' Ebene eines singulären Strahlenbüschels zweiter Ordnung, ausserdem besitzt die Congruenz noch zwölf singuläre Strahlenbüschel erster Ordnung. Die Strahlen von K bilden eine Mannigfaltigkeit von (3,3) Regelscharen zweiter Ordnung, die durch S'' gehen und σ'' berühren, und ferner dreissig isolirte Regelscharen zweiter Ordnung, von denen fünfzehn durch S'' gehen und fünfzehn σ'' berühren. K liegt in zwei Complexen zweiter Ordnung mit je einer aus einem Hyperboloid und einem Ebenenpaare bestehenden singulären Fläche. Js.

Joh. Petersen. Den trilineäre Figurs Geometri. Nyt Tidss. for Math. **9** B, 49-65.

Joh. Petersen. Nouveau principe pour études de géométrie des droites. Kjöb. Overs. 1898, 283-349.

Der Verf. beabsichtigt in diesen beiden Abhandlungen, die Liniengeometrie auf die Theorie der Figuren in einer Ebene zurückzuführen. In der ersten dieser Abhandlungen benutzt er nur die gewöhnlichen Mittel und rein elementare Sätze. Er betrachtet wesentlich trilineare Figuren, d. h. Figuren im Raume, bestehend aus drei Geraden, den

„Kanten“, und ihren kürzesten Abständen, den „Seiten“. Er schliesst die Abhandlung mit den folgenden Sätzen:

Wenn zwei trilineare Figuren einander in der Weise entsprechen, dass die kürzesten Abstände der einzelnen Kanten eine gemeinsame Normale haben, dann wird dieses auch stattfinden bei den kürzesten Abständen der einzelnen Seiten.

Aus diesem Satze wird gefolgert: Jedem projectiv geometrischen Satze über Gerade und Punkte in einer Ebene entspricht ein Satz im Raume. Der letztere wird erhalten, indem die Geraden der ebenen Figur durch willkürliche Geraden im Raume ersetzt werden, und indem der „Schnittpunkt“ zweier Geraden in der Ebene durch den „kürzesten Abstand“ im Raume ersetzt wird. Gehen drei Gerade der ebenen Figur durch denselben Punkt, so werden die entsprechenden Geraden im Raume eine gemeinsame Normale haben.

Die zweite, weit grössere Abhandlung wird mit dem folgenden Satze eingeleitet: Auf einer Kugel mit dem Centrum O liegen ein sphärisches Dreieck ABC und sein Polardreieck abc. Man denke sich, dass die Winkel und Seiten unendlich wenig variiren, und dass die Variationen als endliche Linienstücke der geraden Linien OA, OB, OC, Oa, Ob, Oc abgebildet werden. Dann ist die Summe aller dieser sechs Variationen Null. Ein ähnlicher Satz gilt von einem willkürlichen sphärischen Polygon. Der Verf. nennt „Winkel“, was gewöhnlich Nachbarwinkel genannt wird.

Der Verf. betrachtet jetzt eine trilineare (oder mehrlineare) Figur und bemerkt, dass laut des vorigen Satzes die Kanten und Seiten einer solchen Figur als die obengenannten Variationen eines sphärischen Dreiecks und seines Polardreiecks angesehen werden können. Danach können alle Relationen zwischen den Stücken einer solchen Figur aus den Relationen zwischen den Stücken eines sphärischen Dreiecks abgeleitet werden, indem die Winkelrelationen des sphärischen Dreiecks unmittelbar mit den Winkelrelationen der trilinearen Figur identisch sind, und eine totale Differentiation dieser Relationen für die trilineare Figur ergiebt die Relationen, die von der Länge der geraden Linien abhängen. Auf diese Weise reducirt man die ganze Theorie der Liniengeometrie auf die Theorie der sphärischen Dreiecke oder auf die Betrachtung von Linien, die alle durch denselben Punkt gehen.

Dieses Princip wird dann auf eine grosse Menge von Beispielen angewandt, die zum Teil der Liniengeometrie, zum Teil der Kinematik entnommen sind. Hier werde nur ein einzelnes Beispiel angeführt. Der Verf. nennt die Congruenz, welche von allen geraden Linien gebildet wird, die mit zwei gegebenen geraden Linien Winkel einschliessen, deren Summe oder Differenz constant ist, während zugleich die Abstände von denselben Geraden eine constante Summe oder Differenz haben, eine konische Congruenz. Dann giebt Pascal's Satz: Sechs willkürliche Geraden einer konischen Congruenz bilden eine sechslineare Figur, in der die kürzesten Abstände der entgegengesetzten Kanten eine gemeinsame Normale haben.

Zuletzt wird das anfangs gewonnene Resultat unter folgender Form dargestellt: Jeder Punkt einer Kugel kann durch eine Zahl von der Form $x+iy$ repräsentirt werden, wo i die gewöhnliche Bedeutung hat. Wenn $a_r = x_r + iy_r$, kann man jede sphärische Relation durch eine Gleichung von der Form $f(a_1, a_2, \ldots) = 0$ aussprechen. Die entsprechende Relation der Linienfigur kann durch die Gleichung

$$f(a_1 + \varepsilon b_1,\ a_2 + \varepsilon b_2,\ \ldots) = 0$$

ausgedrückt werden, wo $b_1, b_2, \ldots$ ebenfalls gewöhnliche complexe Zahlen bedeuten, und wo ε ein neues Symbol ist, dessen Quadrat Null ist.

V.

Th. Reye. Einige neue Eigenschaften des quadratischen Strahlencomplexes. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 232-241.

Die Arbeit ist vor dem Erscheinen der Verh. des ersten intern. Math.-Congr. unter dem Titel „Neue Eigenschaften des Strahlencomplexes zweiten Grades“ in Math. Ann. **49**, 585-595 abgedruckt und sodann in F. d. M. **28**, 594, 1897 besprochen worden. Es fehlt aber in jenem ersten Abdrucke der hier vorausgeschickte geschichtliche Abriss.

Ot.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

F. Palatini. Osservazioni sulle corrispondenze univoche fra i gruppi di h punti del piano ed i punti dello spazio lineare di $2h$ dimensioni. Avellino: Tip. Pergola. 13 S. 8°.

Es werden in dieser Arbeit zunächst alle Gruppen von h Punkten der Ebene aufgesucht, die so beschaffen sind, dass in zwei linearen Curvensystemen Q_m und Q_n von der Dimension h jedes Curvenpaar eine Gruppe von h Punkten bestimmt. Diese Systeme werden in projectivische Correspondenz gebracht mit zwei linearen Systemen H_m, H_n eines linearen Raumes R_{2h}. Sodann wird gezeigt, wie man alle möglichen Correspondenzen zwischen den Gruppen von h Punkten einer Ebene und den Punkten eines R_{2h} erhält. Endlich wird rein geometrisch die Ordnung a einer Mannigfaltigkeit M_a in R_{2h} bestimmt, welche die Gesamtheit derjenigen Punktgruppen der Ebene darstellt, in deren jeder a Punkte einander unendlich nahe sind. Diese letztere Aufgabe wird der Reihe nach für die Fälle $a = 2, 3, 4, 5$ und durch Induction für den allgemeinen Fall erledigt. Schg.

E. Piccioli. Sulle curve in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. Batt. G. **36**, 271-285.

Der Verf. setzt die Untersuchungen über die metrischen Eigenschaften einer Curve im R_n fort, welche Brunel (Math. Ann. **19**;

F. d. M. **13,** 586, 1881) begonnen hat; in der That wendet er die vornehmsten von diesem Geometer aufgestellten Formeln an, insbesondere die verallgemeinerten Serret-Frenet'schen Formeln, um gewisse Linien zu studiren, deren analoge im R_3 seit undenklichen Zeiten bekannt sind.

Im ersten Paragraphen betrachtet er die Curven, deren Tangenten mit einer festen Geraden einen constanten Winkel bilden; er nennt jede derselben Helix und beweist, dass für dieselben ein Satz gilt, welcher die Verallgemeinerung des allgemein bekannten Bertrand'schen Satzes ist und so lautet: „Die Helices sind vollständig charakterisirt durch die Bedingung, die n^{te} Torsion T_n gleich Null zu haben"; mit anderen Worten $T_n = 0$ ist die Gleichung der Curve nach der Methode der „Geometria intrinseca" (vergl. F. d. M. **27,** 815, 1896).

Die zweite Klasse der vom Verf. betrachteten Curven ist durch die Eigenschaft bestimmt, dass der Winkel constant ist, welchen die letzte Hauptrichtung der Curve mit einer festen Geraden bildet; daher hat eine solche Curve eine Helix als Rückkehrkante; nach der Methode der „Geometria intrinseca" besitzt sie eine Gleichung, welche nicht minder einfach als die der Helix ist.

Im nachfolgenden dritten Paragraphen erklärt der Verf. als Geodätische einer Hyperfläche in R_n eine solche Linie, bei welcher die zweite Hauptrichtung mit der Normale zur Hyperfläche zusammenfällt; er benutzt dann diesen Begriff, um die geodätischen Linien der Kegel zu studiren, und bemerkt, dass, wenn $n > 3$ ist, in R_n Curven existiren, welche zugleich geodätische Linien von Kegel und Cylinder sind: ferner verallgemeinert er einen wichtigen Satz von Enneper (Math. Ann. **19;** vgl. F. d. M. **13,** 589, 1881) auf Curven von R_n. — Die Betrachtung der Curve von R_n, deren osculirende R_{n-1} von einem festen Punkt eine constante Entfernung haben, schliesst die Arbeit. La.

C. Carrone. Le trasformazioni birazionali fra due spazî ad n dimensioni con particolare considerazione al caso di $n = 4$.
Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) **11,** 1-62.

Diese Abhandlung beginnt mit der für beliebig ausgedehnte lineare Räume aufgestellten Verallgemeinerung der Betrachtungen, welche man auf den ersten Seiten der berühmten Arbeit von Cremona liest: „Sulle trasformazioni razionali fra due spazi" (Annali di Mat. (2) **5**); eine eingehendere Betrachtung widmet der Verf. dem vierdimensionalen Raume. Danach entwickelt er eine Bemerkung des Ref. (Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, 2ª Aufl. S. 252), dass die Methode, welche Cremona erschöpfend durchgearbeitet hat, um von einer rationalen, auf einer Ebene dargestellten Fläche unendlich viele homaloidische Systeme und daher unendlich viele birationale Transformationen zu erhalten, sich auf beliebige lineare Räume ausdehnen lässt.

Die so entstehende allgemeine Methode kann sogleich angewandt

werden, wenn man die eindeutige Darstellung auf einem R_{n-1} benutzt, welche man von einer Quadrifläche im R_n durch eine stereographische Projection erhält. Setzt man im besonderen voraus, dass $n=4$ ist, so gelangt man zu einigen bemerkenswerten homaloidischen Systemen, welche grösstenteils durch del Pezzo schon erforscht waren (Napoli Rend. 1895-97; vergl. F. d. M. **26**, 628, 1895; **27**, 549, 1896; **28**, 583, 1897).

Andere birationale Transformationen erhält man durch eine Verallgemeinerung des Begriffs der „schiefen Projection", wodurch Steiner eine quadratische Verwandtschaft zwischen zwei verschiedenen Ebenen bestimmt hat; auf welche Weise die Verallgemeinerung hergestellt wird, ist aus folgenden Zeilen zu ersehen.

In einem $(n+1)$-dimensionalen Raume R_{n+1} sind n unabhängige $(n-1)$-dimensionale Räume gegeben; es ist bekannt, dass durch jeden Punkt von R_{n+1} eine einzige Gerade geht, welche alle gegebenen Räume je in einem Punkte schneidet; sind daher zwei weitere n-dimensionale Räume R'_n, R''_n in R_{n+1} gegeben, so geht durch jeden Punkt P' von R'_n eine eindeutig bestimmte von jenen Geraden, welche R''_n in einem Punkte P'' schneidet. So entsteht zwischen den Punkten P', P'' eine ein-eindeutige Beziehung, welche im allgemeinen von der Ordnung n ist. Der Verf. beweist ihre Haupteigenschaften, wenn n beliebig ist, und die speciellen, welche mit der Hypothese $n=3$ verbunden sind.

Aber auch diese allgemeine Methode ist einer Verallgemeinerung fähig. In der That betrachte man in R_m die folgenden unabhängigen Räume: $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_{m-n+1}}$, wo die unteren Zeichen beliebige nichtnegative ganze Zahlen bedeuten, welche die Bedingung

$$n_1+n_2+\cdots+n_{m-n+1}=n$$

erfüllen. Die $(m-n)$-dimensionalen Räume von R_m, welche den gegebenen je in einem Punkte begegnen, bilden ein solches System ∞^n, dass durch jeden Punkt von R_m ein einziger geht. Da jeder dieser $(m-n)$-dimensionalen Räume einen R_n in einem einzigen Punkte schneidet, so wird auf diese Weise zwischen zwei beliebigen n-dimensionalen Räumen von R_m eine birationale Verwandtschaft festgelegt. Hierbei entspricht jedem Werte $n<m$ eine endliche Zahl von ein-eindeutigen Beziehungen zwischen zwei R_n von R_m. Ist z. B. $n=3$, so bekommt man zwei, ist $n=4$, vier. Mit der Feststellung einiger ihrer Eigenschaften endet die Abhandlung. La.

P. R. Heyl. The measure of the bluntness of the regular figures in four-dimensional space. American M. S. Bull. (2) **4**, 293-294.

C. J. Keyser. Some theorems in n-dimensional space. American M. S. Bull. (2) **4**, 181-182.

P. H. Schoute. Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. Partie II. (Les cyclides cubiques et quartiques; les hypercycliques.) Haarlem, Arch. Mus. Teyler (2) **5**, 241-298.

E. Abzählende Geometrie.

E. Bally. Evaluation géométrique de l'ordre de la surface réglée définie par trois directrices d'ordres m, n, p. Nouv. Ann. (3) **17**, 508-509.

Daraus, dass die Regelfläche vom Grade $2np$ wird, wenn eine Gerade und zwei Curven von den Graden n und p geschnitten werden, wird abgeleitet, dass die Regelfläche den Grad $2mnp$ bekommt, wenn drei Curven von den Graden m, n, p geschnitten werden sollen.

Scht.

Fr. Deruyts. Note sur les sécantes multiples des courbes gauches rationnelles. Belg. Bull. (3) **35**, 287-294.

Fr. Deruyts. Sur la configuration formée par les quadrisécantes des courbes gauches rationnelles du sixième ordre. Ibid. 421-438.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 266-269; 358.

Bestimmung der Anzahl der Quadrisecanten der rationalen Raumcurven. Anwendung auf eine Curve sechster Ordnung, die als Durchschnitt einer kubischen Oberfläche durch ein System von Regelflächen vierter Ordnung erhalten wird.

Mn. (Lp.)

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

FR. SCHUR. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig: Veit & Comp. X + 216 S. gr. 8°.

Dem vorliegenden neuen Lehrbuche liegen die Vorlesungen zu Grunde, welche der Verf. in den Jahren 1882-92 an den Universitäten Leipzig und Dorpat für Anfänger über analytische Geometrie gehalten hat. Demgemäss beschränkt sich das Werk auf die Kegelschnitte in der Ebene und die Flächen zweiter Ordnung im Raume, bei letzteren auf die nächstliegenden Eigenschaften mit Weglassung der focalen Eigenschaften. Als Coordinaten werden ausschliesslich die cartesischen benutzt, und von mathematischen Hülfsmitteln werden nur diejenigen in Anwendung gebracht, welche in Mittelschulen allgemein gelehrt werden. Wenn daher auch die Determinanten ausser Betracht gelassen sind, so wird die elementare Haltung des Lehrbuchs gegenüber den französischen Werken ähnlicher Richtung um so mehr merkbar, als in Frankreich die analytische Geometrie einschliesslich der Determinantentheorie in einem weit höheren Umfange den classes de mathématiques spéciales zufällt, daher auf den Hochschulen überhaupt nicht zum Vortrage gelangt. Dem Verzicht auf die geschmeidigen algebraischen Hülfsmittel entspricht es eben auch, dass die für die moderne analytische Geometrie ausgebildeten besonderen Methoden nur spärlich berücksichtigt sind. Indem somit der Charakter des Buches, als zur ersten Einführung bestimmt, durchweg gewahrt worden ist, wird andererseits Gewicht gelegt auf das klare Verständnis der neu eingeführten Begriffe und der Methodik; hierin, sowie in der Verbindung des Lehrganges mit zahlreichen und vortrefflich ausgeführten Zeichnungen, wie man sie sonst nur in Werken über darstellende Geometrie findet, liegt die Stärke des neuen Lehrbuchs. Was die analytische Einführung der Brennpunkte

nach der von Euler stammenden, an sich recht interessanten Art betrifft, so möchte Ref. meinen, dass dieselbe für den Anfänger nicht gerade natürlich ist. Die Definition der Brennpunkte bei den Kegelschnitten nach der Dandelin'schen Manier ist eine einheitliche für Ellipse, Hyperbel und Parabel und verknüpft die wichtigen Brennpunktseigenschaften dieser Curven in natürlicher Weise mit stereometrischen Anschauungen, die den jungen Studenten von der Schule her geläufig und frisch im Gedächtnis sind. Den einzelnen Abschnitten sind Uebungsaufgaben hinzugefügt, deren Gesamtzahl auf 155 steigt. Ein alphabetisches Sachregister macht den Beschluss. Die Ausstattung ist tadellos. Lp.

J. H. Tanner and J. Allan. An elementary course in analytic geometry. New York, Cincinnati, Chicago: American Book Company. XX + 390 S. 8°.

Auf S. 229 und 230 dieses Bandes sind die beiden Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung aus der „Cornell Mathematical Series“ angezeigt worden, der das vorliegende Buch über analytische Geometrie ebenfalls angehört. Wie bei jenen erst besprochenen Bänden, so beruht auch bei dem gegenwärtigen der Hauptwert in dem pädagogischen Geschick, mit welchem der Stoff vorgetragen ist; aus dem lebendigen Unterrichte entstanden, eignen sich diese Leitfäden recht gut zur ersten Einführung und auch zum Selbstunterricht unter anderem deshalb, weil nach der Gewohnheit englischer Lehrbücher Zahlenbeispiele eingestreut und jedem Kapitel viele einfache Uebungsbeispiele angehängt sind. Breite und Klarheit, nicht aber Vertiefung ist der Zweck. Von den beiden Teilen der analytischen Geometrie ist die des Raumes sehr knapp bedacht; sie reicht von S. 331 bis 380, umfasst also etwa nur den achten Teil des Ganzen. Der Inhalt ist folgendermassen angeordnet:

I. Analytische Geometrie der Ebene. 1. Einleitung. Algebraische und trigonometrische Begriffe. Trigonometrische Formeln. 2. Geometrische Begriffe. Der Punkt. Coordinatensysteme. Elementare Anwendungen. 3. Der Ort einer Gleichung. 4. Die Gleichung eines Ortes. 5. Die gerade Linie. Gleichung ersten Grades. 6. Transformation der Coordinaten. Cartesische Coordinaten allein. Polarcoordinaten. 7. Der Kreis. Specielle Gleichung zweiten Grades ohne Glied mit xy. Secanten, Tangenten, Normalen. 8. Die Kegelschnitte. Die Parabel und die zugehörige specielle Gleichung zweiten Grades ohne Glied mit xy. Die Ellipse und die zugehörige specielle Gleichung zweiten Grades ohne xy. Die Hyperbel und die zugehörige specielle Gleichung ohne xy. Tangenten Normalen, Polaren, Durchmesser u. s. w. Polargleichung der Kegelschnitte. 9. Die Parabel $y^2 = 4px$. 10. Die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. 11. Die Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. 12. Allgemeine Gleichung zweiten Grades. 13. Höhere ebene Curven. Algebraische Curven. Transcendente Curven. Spiralen.

II. Analytische Geometrie des Raumes. 1. Coordinatensysteme. Der Punkt. 2. Der Ort einer Gleichung. Oberflächen. 3. Gleichung des ersten Grades. Ebenen und gerade Linien. Die Ebene. Die gerade Linie. 4. Gleichungen zweiten Grades. Oberflächen zweiter Ordnung.

Im einzelnen ist noch manches zu berichtigen. So sollen S. 365, Aufg. 19 drei Ebenen von gegebenen Gleichungen sich in einer Geraden schneiden; sie haben aber nur einen Punkt gemeinsam. Die kurze historische Skizze nach Ball's History of mathematics schreibt Descartes manches zu, was erst spätere Geometer klar eingesehen und eingeführt haben. Hierzu ist das Vorwort zur analytischen Geometrie von Schur zu vergleichen. Die im Inhaltsverzeichnisse versprochenen Auflösungen der Aufgaben sind nicht vorhanden, ebensowenig auch der Index.

Lp.

W. Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach George Salmon frei bearbeitet von W. F. 6. Aufl. I. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. XXV + 441 S. 8°.

Die schon in der fünften Auflage (1887) aus Anlass einer durchgreifenden Umarbeitung vollzogene Teilung der „Kegelschnitte" in zwei Bände ist beibehalten; vor uns liegt der elementare erste Teil, der sich von der vorigen Auflage nur durch kurze Zusätze und vermehrte Beispiele unterscheidet. Dankenswert ist die besondere Ausführlichkeit (16 S.) des Inhaltsverzeichnisses.

R. M.

W. Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes von George Salmon. Deutsch bearbeitet von W. F. I. Teil. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. XXIV + 448 S. 8°.

Gegenüber der dritten Auflage (1879) hat sich der Stoff wieder um 86 S. vermehrt; es ist hinzugefügt ein eigenes Kapitel über die homogenen projectivischen Coordinaten; die Lehre von den Collineationen und Reciprocitäten ist ausführlicher dargestellt; die kubische Raumcurve und ihre Developpable hat nunmehr eine Stelle gefunden. Erwähnt sei ferner unter anderen Einzelheiten die Theorie der Parallelen in der elliptischen Geometrie.

R. M.

O. Fort und O. Schlömilch. Lehrbuch der analytischen Geometrie. II. Teil. Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch. 6. Aufl. Bearbeitet von R. Heger. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 338 S. 8°.

Die Verbesserungen, welche der neue Herausgeber an dem altbewährten Buche vorgenommen hat, betreffen nur kleine Einzelheiten;

der Gesamtcharakter als „Schulbuch“, bedingt durch den Verzicht auf alle modernen und höheren Hülfsmittel, hat keine Aenderung erfahren.
R. M.

Max Simon. Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Göschen, No. 89.) Leipzig: G. J. Göschen. 200 S. 12°.

Die eigenartige Darstellungsweise des Verf. ist schon im vorjährigen Referat charakterisirt. Es wird also hier genügen, den Umfang des behandelten Gebiets anzugeben.

I. Coordinaten, Punkt, Strahl, Gerade, Ebene, Liniencoordinaten, linearer Complex. 34 S.
II. Dualitätsprincip, Ebenenbüschel, Punktreihe. 19 S.
III. Transformation. 4 S.
IV. Kugel, Inversion. 22 S.
V. Flächen zweiten Grades und zweiter Klasse in allgemeiner Behandlung, Pol und Polare, gerade Linien, Reye'sche Axen. 26 S.
VI. Kegel und Cylinder. 24 S.
VII. Centrale Flächen allgemein, Kreisschnitte, Focaleigenschaften. 27 S.
VIII. Dieselben in specieller Behandlung. 18 S.
IX. Paraboloide. 19 S.
X. Kubatur. 7 S. R. M.

J. Jacob. Zur Einführung in die analytische Geometrie. 44. Jahresber. Leitmeritz 1898, 12 S.

Diese Abhandlung soll den Zweck haben, dem „Schüler vor Beginn der systematischen Behandlung der analytischen Geometrie eine ungefähre Vorstellung von der Methode dieser Wissenschaft zu geben“, was didaktisch sicher recht unzweckmässig ist. Trotz der Ergänzung, welche der Lehrer zu dieser Abhandlung geben soll, dürfte sie vorzüglich geeignet sein, um selbst die begabtesten Schüler von der analytischen Geometrie abzuschrecken. Hau.

C. Püschel. Eine Zusammenstellung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie für die Prima des Gymnasiums. II. Teil. Pr. (No. 219) Ev. Gymn. Waldenburg i. Schl. 27 S. 8°.

In diesem zweiten Teile stehen zuerst 30 sehr gut gewählte Aufgaben über Kegelschnitte; auch sind die Resultate und zwar sowohl in allgemeinen Buchstabenausdrücken als auch für ganz bestimmte Zahlenbeispiele angegeben. Die Aufgaben eignen sich für den bezeichneten Zweck, weil sie einerseits nicht zu schwer sind, andererseits aber doch eine gute Auffassung der Elemente der analytischen Geometrie erfordern; jedenfalls werden diese Aufgaben Primanern, die vor dem Abiturientenexamen stehen, nützlich sein. Das Gleiche gilt von den 29 Constructionsaufgaben über Kegelschnitte, die nachher folgen. Die

zur Lösung dieser letzteren Aufgaben zu benutzenden 17 Lehrsätze sind in einem Anhange zusammengestellt. Ein erster Teil dieser Arbeit, den der Verf. in einer Anmerkung erwähnt, lag dem Ref. nicht vor.

Mz.

F. Enriques. Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni. Palermo Rend. **12**, 222-239.

In den meisten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird als selbstverständlich angenommen, dass die Punkte einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit mittels Coordinaten dargestellt werden können, während Lie und Veronese darauf hingewiesen haben, dass es sich hierbei um die Voraussetzung von Postulaten handelt, die jedoch noch nicht genauer festgestellt sind. Um diese Lücke auszufüllen, stellt der Verf. die für die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten erforderlichen Postulate fest, unter Voraussetzung der Riemann'schen Erzeugungsweise der Flächen durch zwei Linienbüschel, und beweist den Satz: Um die (continuirliche) Darstellung der Punkte der Fläche mittels zweier Coordinaten zu erhalten, genügt es, anzunehmen, dass auf derselben ein dritter Büschel von Linien existirt, welche die Linien der beiden erzeugenden Büschel in je einem Punkte schneiden. Die ganze Darstellung wird zum Schluss in ihren Grundzügen auf dreidimensionale Mannigfaltigkeiten ausgedehnt, woraus die weiteren Verallgemeinerungen ersichtlich sind. Schg.

Laisant. Coordonnées polaires symétriques. S. M. F. Bull. **26**, 271-272.

Der Verf. bespricht den Gebrauch des Radiusvectors und seiner drei Richtungscosinus als Coordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes und zeigt die Gestalt der elementaren Formeln. H.

F. Giudice. Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche. Palermo Rend. **12**, 278-306.

Im ersten Teile dieser Arbeit werden die einfachsten Beziehungen zwischen den Abständen dreier Punkte einer Geraden, den Flächen der durch vier Punkte gebildeten Dreiecke einer Ebene und den Inhalten der durch fünf Punkte gebildeten Tetraeder im Raume in einfacher Weise unter Benutzung von Zahlen-Identitäten durch Punkt-, Linien- und Ebenen-Coordinaten ausgedrückt. Im zweiten Teile wird der Begriff der homogenen Coordinaten dadurch erweitert, dass den n „absoluten“ Coordinaten, die zur Bestimmung eines Gebildes im R_n erforderlich sind, m weitere Coordinaten hinzugefügt werden, so dass ein System von $n+m$ homogenen Coordinaten entsteht, zwischen welchen die $m+1$ Gleichungen $F=c$, $F_1=0, \ldots, F_m=0$ bestehen, von denen nur die erste nicht homogen ist. Das ganze System wird homogen genannt, wenn $c=0$ ist, sonst „halbhomogen“. Durch Specialisirung gelangt

der Verf. zu verschiedenen Arten von Coordinaten, die in der Ebene und im Raume anwendbar sind, und löst mit denselben die Fundamentalaufgaben der analytischen Geometrie, wobei sich mehrfach bekannte Formeln auf besonders einfachem Wege ergeben. Schg.

É. PERRIN. Préliminaires d'une géométrie du triangle. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26,** 90-107.

In dem vorliegenden Aufsatze werden einige Gedanken ausgeführt, die der zu früh verstorbene Édouard Lucas vor seinem Hinscheiden dem Verf. der Arbeit anvertraut hatte. Zunächst wird eine besondere Art von Coordinaten eingeführt, die man natürlich aus den vom Verf. nirgends erwähnten Staudt-Fiedler'schen projectiven Coordinaten durch Specialisirung ableiten kann. Es seien zwei beliebige Axen OX und OY, ausserdem ein Einheitspunkt U gegeben. Man verbinde U mit einem beliebigen Punkte U_1 auf OX und einem anderen beliebigen Punkte U_2 auf OY. Zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes P ziehe man $PP_1 // UU_1$ und $PP_2 // UU_2$ (P_1 auf OX, P_2 auf OY). Dann wird $x = PP_1/UU_1$, $y = PP_2/UU_2$ gesetzt. Es folgt nun eine Skizze der Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für die so definirten Coordinaten. Eine erste Folgerung dieser Theorie ist die, für eine Gerade, die eine Ecke eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte der Gegenseite verbindet, eine Eigenschaft abzuleiten, welche derjenigen der Winkelhalbirenden entspricht. Diese Verallgemeinerung wird auf die Plücker'schen, auf die trilinearen und auf die dreipunktigen Coordinaten angewandt. Die meist gebrauchten normalen und die barycentrischen Coordinaten sind offenbar ebenfalls besondere Fälle des betrachteten Coordinatensystems. Man vergl. hiermit Gundelfinger's Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte (F. d. M. **26,** 633ff., 1895). Lp.

J. H. VINCENT. On the use of logarithmic coordinates. Brit. Ass. Rep. 1898, 159-178.

Bei der Erörterung der Versuche über den Durchgang von Gasen durch poröse Wände hat O. Reynolds eine Methode des Zeichnens von Curven benutzt, bei welcher die Logarithmen zweier Variabeln zur Auffindung der Punkte auf einer neuen Curve gebraucht werden, die den Namen der „logarithmischen Homologen“ derjenigen erhalten hat, aus der sie abgeleitet wird. Ein kurzer Abriss dieser Methode befindet sich auch in Greenhill's „Calculus“ (Ausgabe von 1896); logarithmisch liniirte Papierbogen sind jetzt käuflich zu haben. Der gegenwärtige Artikel giebt einige recht lehrreiche Beispiele für die Leistungsfähigkeit des Verfahrens und hebt seinen Wert für die Bedürfnisse des Experimentators und auch für theoretische Arbeiten hervor. Gbs. (Lp.)

G. FONTENÉ. Métrique aninvolutive. S. M. F. Bull. **26,** 176-194.

Als Grundlage der vom Verf. entwickelten „aninvolutiven“ Metrik

dient eine allgemeine Correlation in der Ebene, wobei einem „primitiven" Punkte M eine „transformirte" Gerade $\bar{\mu}$ und einem transformirten Punkte $\bar{M}$ eine primitive Gerade μ entspricht, ferner zwei Punkte M und M' „conjugirt" sind, wenn M' auf $\bar{\mu}$ und M auf $\bar{\mu}'$ liegt, nebst entsprechenden Beziehungen unter Vertauschung der Punkte mit den Geraden. Zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte, von denen der eine (F) Ort der autoconjugirten Punkte, der andere (φ) Ort der autoconjugirten Tangenten ist, bestimmen die Correlation. Ist R das anharmonische Verhältnis zwischen zwei Punkten A, B einer Geraden und ihren Schnittpunkten F', F'' mit F, so wird

$$\overline{AB} = \frac{1}{2i} \log R$$

der „Pseudoabstand" von A und B und ein entsprechender Ausdruck der „Pseudowinkel" zwischen zwei Geraden α und β genannt. Endlich werden F und φ als imaginäre Ellipsen angenommen, deren Gleichungen reelle Coefficienten haben. Auf diese Formeln wird eine Metrik gegründet, welche sich zu der von Cayley und Klein aufgestellten wie die Homographie zur Involution verhält, und bei welcher die Figuren in bestimmter Lage betrachtet werden. Der „Parameter" T einer Geraden μ ist der Pseudoabstand zweier Punkte M und $\bar{M}$, die im anharmonischen Verhältnis R an die Stelle der Punkte A und B treten; eine Function

$$\sigma(A, M) = \frac{\sin \overline{AM}}{\sin T}$$

heisst „Moment" des Punktes M, wenn A der Schnittpunkt von μ und der durch M gehenden conjugirten Geraden ist, u. s. w. Die Function σ erscheint als Analogon zum Sinus, und die Formeln entsprechen denen der sphärischen Trigonometrie. Die Schlussparagraphen der Arbeit enthalten Anwendungen der Theorie auf Kegelflächen und eine Ausdehnung derselben auf den Raum. Schg.

Eberhard. Ueber die im Pensum höherer Lehranstalten vorkommenden sogenannten imaginären Werte. Pr. (No. 402) Wilh.-Gymn. Cassel. 60 S. 4°. Mit 1 Taf.

Der Hauptzweck der Arbeit besteht in der Lösung einer grösseren Anzahl von Aufgaben aus der Kegelschnittslehre, in welchen imaginäre Punkte oder Linien vorkommen (Bestimmung imaginärer Schnittpunkte, Construction von Kegelschnitten aus imaginären Punkten und Tangenten). Um dem Schüler das Verständnis dieser Aufgaben zu ermöglichen, sind eine Theorie der „Richtungszahlen" (nebst verschiedenen Anwendungen), sowie eine Reihe von Sätzen aus der synthetischen Geometrie (projectivische und involutorische Beziehungen) vorausgeschickt. F.

M. Feldblum. Ueber imaginäre Punkte. Wiad. mat. **2**, 130-150. (Polnisch.)

Analytische Behandlung nebst geometrischer Interpretation mehrerer Sätze über die Anzahl imaginärer Punkte reeller algebraischer Flächen und Curven, über die durch einen imaginären Punkt gehenden Geraden, Ebenen, Kugelflächen u. s. w. Dn.

G. Peano. Entwickelung der Grundbegriffe des geometrischen Calculs. Autorisirte deutsche Uebersetzung von A. Lanner. Pr. Salzburg; auch sep. Leipzig: G. Fock. 24 S. 8°.

Die dankenswerte Arbeit giebt zum ersten Male eine deutsche Uebersetzung einer von Peano in den Sitzungsberichten der Turiner Akademie vom Jahrgang 1895/1896 veröffentlichten Abhandlung, in welcher er eine vorzüglich geeignete Einführung in die Ausdehnungslehre gegeben hat. Ueber das Original ist in diesem Jahrbuche (**27**, 464, 1896) ausführlich referirt, weshalb hier nur auf dieses Referat verwiesen sei. Hau.

G. Peano. Analisi della teoria dei vettori. Torino Atti **33**, 513-534.

Der Verf. teilt die in der Streckenrechnung auftretenden Begriffe in Grundbegriffe (primitive), die aus der räumlichen Anschauung gewonnen werden, und in abgeleitete Begriffe, welche definirt werden. Derselbe Gegensatz betrifft Postulate und Sätze, die man aus denselben durch rein logische Processe erhält. Mit der in dieser Weise logisch begründeten Streckenrechnung sind dann die Grundlagen der elementaren Geometrie überhaupt gegeben. Als erste Grundbegriffe werden eingeführt: der Punkt und die zwischen den Ecken eines Parallelogramms bestehende Beziehung $A-B=C-D$. Die ersten Postulate betreffen den Gebrauch des Gleichheitszeichens zwischen solchen Differenzen, die weiterhin als Strecken (Vectoren) bezeichnet werden. Die vorgetragenen Sätze der Streckenrechnung behandeln das Product zwischen Strecke und Zahl, die Summe von Punkten und das innere Product zweier Strecken, alles in Grassmann'schem Sinne, aber in den Bezeichnungen und Schlussformen der „mathematischen Logik“ des Verf. Ueberall wird untersucht, ob Begriffe und Sätze als primitive oder als abgeleitete zu betrachten sind. Schg.

H. Grassmann. Punktrechnung und projective Geometrie. Dritter Teil: Die linearen Verwandtschaften in der Ebene. Aus Festschr. d. latein. Hauptschule zu Halle a. S. S. 61-120. 4°.

Ueber die ersten Teile dieser Arbeit s. F. d. M. **25**, 1068, 1894 und **27**, 462, 1896. Der vorliegende Teil behandelt nach gleichen Grundsätzen in vier Abschnitten die Collineation, die allgemeine reciproke Verwandtschaft, das Polarsystem und seine Ausartungen. Bei der Darstellung der Verwandtschaften wird nach dem Vorgange der „Aus-

dehnungslehre“ der Begriff des aus mehreren Zählern und gleich vielen Nennern bestehenden „Quotienten“ benutzt, d. h. einer Grösse, mit welcher multiplicirt jedes Nennergebilde in das entsprechende Zählergebilde übergeht (Grassmann, Ges. Werke I_2, S. 240). Weitere Fortsetzung dieser Arbeit ist in Aussicht gestellt. Schg.

Combebiac. Sur l'application du calcul des biquaternions à la géométrie plane. S. M. F. Bull. **26**, 259-263.

Wenn 1, *i*, *j*, *k* die Einheiten einer Quaternion sind, aus denen durch Multiplication mit ω (Wurzel der Gleichung $\omega^2 = 1$) die vier weiteren Einheiten der Biquaternion hervorgehen, so kann der eine Rotation darstellende Ausdruck $w + kx_0 + \omega ix_1 + \omega jx_2$ auf die Form gebracht werden: $r \equiv w + m + \omega u + d$, worin m einen Punkt, d eine Gerade, w und u Zahlen bedeuten und w, m, u, d Covarianten von r sind. Mittels dieser linearen Functionen lassen sich zahlreiche geometrische Beziehungen in einfacher Weise ausdrücken. Schg.

W. A. Wythoff. De Biquaternion als Bewerking in de Ruimte van vier Afmetingen. Diss. Amsterdam. 148 S. 8°.

Gegenstand der Arbeit ist die Herstellung des Analogons zur Quaternionentheorie für den vierdimensionalen Raum, wobei zu dem mit einer bestimmten Richtung verbundenen „Vector“ der neue Begriff des „Ebenenvectors“ hinzutritt, d. h. eines Ebenenstückes mit bestimmter Stellung (Ausdehnungsgrösse zweiter Ordnung im Sinne Grassmann's). Die von dem Verfasser benutzten complexen Grössen sind, wie erst später von ihm bemerkt wurde, algebraisch dasselbe, wie die von Clifford für die Geometrie elliptischer Räume angewandten Biquaternionen. Diesem Zusammenhange ist denn auch ein besonderer Abschnitt (am Schluss der Arbeit) gewidmet. Im übrigen werden zuerst die Hauptbegriffe und Sätze der euklidischen vierdimensionalen Geometrie vorgetragen, dann wird der Begriff des Ebenenvectors und des aus zwei zu einander senkrechten Ebenenvectoren bestehenden „Doppelvectors“ eingeführt. Es folgt die Verallgemeinerung der Scalar- und Vectorgrössen, endlich die Darstellung der Biquaternionen. Schg.

W. H. Young. On systems of one-vectors in space of n dimensions. Lond. M. S. Proc. **29**, 478-487.

Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, wie ein System von „Einzel-Vectoren“ im R_n, die man sich als Kräfte vorstellen kann, auf eine Normalform reducirt werden kann. Dieselbe besteht im R_{2m-1} aus m Einzelvectoren, von denen einer beliebige Richtung hat, im R_{2m} aus m Einzelvectoren, die in einem covarianten R_{2m-1} liegen. Es ergeben sich bei dieser Reduction des Systems verschiedene Eigenschaften desselben, wie auch die Verwandtschaft des Gegenstandes mit der Theorie der linearen Complexe im R_n hervortritt. Ausserdem wird für ein System

von Linien-Coordinaten im R_n eine geometrische Definition gegeben, aus der sich die zwischen ihnen bestehenden quadratischen Gleichungen direct ergeben. Die Einzelvectoren erscheinen beiläufig als Kanten des n-dimensionalen $(n+1)$-Ecks. (Vergl. De Francesco: Sulla statica dei corpi rigidi nello spazio a quattro dimensioni. Batt. G. **34**; F. d. M. **27**, 584, 1896). Schg.

E. Müller. Die Geometrie orientirter Kugeln nach Grassmann's Methoden. Monatsh. f. Math. **9**, 269-315.

Wiederholt ist bemerkt worden, dass die Betrachtungsweisen und Methoden der Ausdehnungslehre den Vorzug besitzen, den Forscher, der sich ihrer bedient, von Anfang an auf Standpunkte zu führen, von denen aus Ueberblicke und Einblicke in geometrische Gebiete sich eröffnen, Ordnung, System und Zusammenhänge sichtbar werden, die sonst nur als Resultate mühevoller Arbeit, oft auf Umwegen, gewonnen werden. Dies tritt wieder klar hervor in der vorliegenden Bearbeitung der Lie'schen oder höheren Kugelgeometrie. Zunächst führt sich der Begriff der Orientirung durch die Bezeichnungen der Ausdehnungslehre von selbst ein und wird sogleich auf Ebenen, Kugeln, Kegel und allgemeine Flächen angewandt. Nachdem die orientirte Kugel sich als extensive Grösse eines Gebietes fünfter Stufe (R_4) erwiesen hat, untersucht der Verf. die linearen Kugelgebiete n^{ter} Stufe (Gesamtheit der aus n unabhängigen Kugeln numerisch ableitbaren Kugeln) für die Fälle $n=2$ (Gesamtheit der Kugeln, die einem orientirten Rotationskegel einbeschrieben sind), $n=3$ (ebene Kugelcongruenz), $n=4$ (ebener Kugelcomplex), ferner die äusseren Producte orientirter Kugeln und die Eigenschaften der ebenen Kugelcomplexe. Er gelangt dabei u. a. zu einem Uebertragungsprincipe, welches von der Geometrie nicht orientirter Kugeln zu derjenigen orientirter Kugeln führt und in dem Umstande begründet ist, dass beide Geometrien sich mit der Untersuchung der projectiven Eigenschaften eines R_4 unter Auszeichnung einer quadratischen M_3 beschäftigen, welche letztere in dem einen Gebiete eine allgemeine, in dem andern eine specielle ist. Auch die lediglich durch Complexgebiete definirte Transformation durch reciproke Radien wird auf das Gebiet der ebenen Kugelcomplexe übertragen und die Anwendung der ganzen Theorie auf die Geometrie ebener Kreise durch ein Beispiel erläutert. Die Cykliden finden in der Geometrie orientirter Kugeln ein Analogon in orientirten Flächen vierter Klasse, denen ein weiterer Abschnitt gewidmet ist. Ferner werden noch behandelt: Systeme von orientirten Kegeln und Ebenenpaaren, das Rechnen mit „Kegelgrössen", sphärische Kugelcomplexe und die Inversion derselben. Schg.

Weitere Litteratur.

V. Bjerknes. Zur Theorie gewisser Vectorgrössen. Christiania 27 S. 8°.

K. R. Collin. Lärobok i plan analytisk geometri. 2. upplaga. Stockholm. 135 S. 8°.

P. van Geer. Leerboek der analytische Meetkunde. Deel I: Meetkunde van het platte vlak en van de vlakken en rechte lijnen in de ruimte. Leiden. XII + 266 S.

R. Koch. Bestimmung der viergliedrigen Gruppen des Raumes (x, y, z). Leipzig. 73 S. 8°.

A. P. Kotelnikow. Projectivische Theorie der Vectoren. Kasan Ges. (2) **8**, No. 23, Anh. 1-112. (Russisch.)

Bericht erfolgt im folgenden Bande des Jahrbuchs nach Abschluss der Arbeit. Si.

P. A. Lambert. Analytic geometry for technical schools and colleges. New York and London: Macmillan and Co. XII + 216 S. 8°. [Nature **57**, 292.]

G. de Longchamps. Cours de problèmes de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École navale, à l'École centrale et à l'École polytechnique. Paris: Delagrave. VIII + 436 S. 8°. [Periodico di Mat. **15**, 39-40.]

E. d'Ovidio. Geometria analitica. Torino: Bocca. 8°.

A. Rémond. Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution, suivis des énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux écoles polytechnique, normale, centrale, navale, au concours général, à l'agrégation. Partie I: Géométrie à deux dimensions. Partie II: Géométrie à trois dimensions; problèmes généraux; énoncés. 2e édition. Paris: Gauthier-Villars. VIII + 336 S. 8°.

G. Salmon. Traité de géométrie analytique à trois dimensions. Ouvrage traduit de l'anglais sur la quatrième édition par O. Chemin. 2e édition, première partie: lignes et surfaces du premier et du second ordre. Paris: Gauthier-Villars. XVII + 336 S. 8°.

W. A. Wythoff. Een stelsel bewerkingen in de ruimte van vier afmetingen analoog met Hamilton's quaternions. Amst. Versl. **6**, 520-530.

H. G. Zeuthen. Forelaesninger over trekants koordinater. Kjöbenhavn. 64 S. 8°.

Kapitel 2.
Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

M. d'Ocagne. Sur la détermination des courbes par une équation entre les distances tangentielles de leurs courbes à des courbes données. Nouv. Ann. (3) **17**, 115-118.

Zunächst wird allgemein die Curve behandelt, die durch die Glei-

chung $F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$ definirt wird, wo $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Tangentialentfernungen eines Punktes von n gegebenen Curven sind. Dann werden insbesondere einige Eigenschaften der Curve behandelt, die sich ergiebt, wenn die definirende Gleichung zu $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \cdots = k^2$ wird. Scht.

A. Beazeley. Tables of tangential angles and multiples for setting out curves. 6[th] edition, revised. London. 50 cards in case.

M. W. Haskell. On curvilinear asymptotes. California Acad. Proc. **1**, 24-28.

Ch. Michel. Sur le point d'arrêt. Bull. math. spéc. **5**, 34-35.

J. Sobotka. Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plancurven. Prag. Ber. 1898, No. 26, 38 S.

In dieser Arbeit überträgt der Verf. die Resultate seiner Abhandlung „Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven" (Wiener Ber. CVII, Abt. IIa) auf einige, in den angewandten constructiven Wissenschaften vorkommende Arten von Plancurven, um auf diese Weise in einer Reihe von Fällen eine vermittelnde Methode zwischen den Ergebnissen der Analysis und jenen der geometrischen Construction zu veranschaulichen.

I. Zur Construction von Tangenten und Krümmungskreisen bei Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung.

II. Zur Construction von Tangenten und Krümmungskreisen der Exponentialcurve und der Kettenlinie.

III. Zur Construction von Tangenten und Krümmungsmittelpunkten für parabolische und hyperbolische Spiralen höherer Gattung.

IV. Eine Transformation der Integralcurven.

V. Konchoiden.

Anlässlich der aus der Geisenheimer'schen Formel abgeleiteten Lösung der Aufgabe, den Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Curve aus jenem ihres perspectivischen Bildes constructiv zu ermitteln, erlaubt sich Ref. auch eine Arbeit Fr. Machovec's (Prag. Ber.; F. d. M. **20**, 610, 1888) in Erinnerung zu bringen. Sda.

Ch. Hermite. Expression approchée de l'aire du segment de la courbe. Kasan Ges. (2) **8**, No. 3, 109.

Der Flächeninhalt zwischen einem Curvenbogen MN und seiner Sehne ist gleich $\frac{1}{3}(\varDelta MNP + \varDelta MNP')$, wo P der Durchschnittspunkt der Tangente in M und der Normale in N ist, P' derjenige der Tangente in N und der Normale in M. Si.

A. Naud. Sur la concavité ou convexité d'une courbe plane vers un point; application à la transformée par développement d'une courbe plane tracée sur un cône. Revue de math. spéc. **8**, 537-540.

A. Perna. Sulle deformazioni infinitesime delle curve. Batt. G. **36**, 286-299.

Die infinitesimalen Deformationen der ebenen Curven und der Raumcurven werden hier mit Hülfe der Methoden der Geometria intrinseca untersucht. Eine besondere Beachtung findet der Fall, wo die Deformation sich auf eine starre Verschiebung reducirt. Vi.

G. Scheffers. Ueber gewisse zweifach unendliche Curvenscharen in der Ebene. Leipz. Ber. **50**, 1898, 261-294.

Die Abhandlung zerfällt in zwei verschiedenartige Teile. Im ersten Teile wird das Problem gelöst, alle die punktweisen Abbildungen der Ebene herzustellen, bei denen die Geraden der Ebene in Kreise übergehen, womit die kartographische Aufgabe gelöst ist, die Erdkugel in allgemeinster Weise so abzubilden, dass die Loxodromen der Kugel im Bilde als Kreise erscheinen. Im zweiten Teile handelt es sich um die Untersuchung der ∞^2 Curven, die eine Schar von ∞^1 gegebenen Curven unter constanten Winkeln durchsetzen. Statt des Namens „isogonale Trajectorien" hat der Verf. den kürzeren „Loxodromen" gewählt in Uebertragung einer auf Umdrehungskörpern üblichen Bezeichnung. Diejenigen ∞^1 Loxodromen, welche durch einen beliebig gewählten Punkt gehen, haben in diesem Punkte Krümmungskreise, die einen Büschel bilden. Dieser Satz hat zur Folge, dass jede Loxodromenschar ebenso wie jede Schar von ∞^2 Kreisen, als die sich im ersten Problem die Geraden einer Ebene abbilden lassen, eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung von der allgemeinen Form erfüllt:

$$y''-(1+y'^2)(\alpha y'+\beta)=0.$$

Infolge jener eigentümlichen Lagerung der Krümmungskreise einer Loxodromenschar ist mit jeder Loxodromenschar eine gewisse Punkttransformation verknüpft. Da nun merkwürdigerweise die inverse Punkttransformation von derselben Form wie die directe ist, so ist mit jeder Loxodromenschar in der Ebene eine ganz bestimmte zweite Loxodromenschar verknüpft. Werden nämlich alle Loxodromen der ersten Schar construirt, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen, so haben sie dort solche Krümmungskreise, die noch einen zweiten Punkt gemein haben, und die zugleich die Krümmungskreise in diesem zweiten Punkte für die zweite Loxodromenschar sind. Dieses Hauptergebnis des zweiten Teiles wird durch eine Reihe geometrisch interessanter Beispiele beleuchtet, aus denen bemerkenswerte Sätze über die Krümmungskreise gewisser Curven fliessen. Lp.

Éd. Collignon. Recherches sur certaines transformations des courbes planes. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26,** 7-50.

Eine ebene Curve sei auf ein in ihrer Ebene liegendes Axensystem bezogen; es wird eine andere Curve gesucht, so dass für zwei entsprechende Punkte beider Curven die Subtangenten, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen, d. h. also: der Punkt der ersten Curve liegt auf der Ordinate durch den einen Endpunkt der Subtangente, der entsprechende der anderen Curve auf der Ordinate durch den anderen Endpunkt. Nach Auffindung der Transformationsgleichung zwischen den Coordinaten (x, y) und (x', y') zweier entsprechenden Punkte, nämlich:

$$(1) \qquad x' = x - f(x)\,/\,f'(x), \quad y' = C\,/\,f'(x),$$

wo $y = f(x)$ die Gleichung der ersten Curve, C eine willkürliche Constante bedeutet, wird eine geometrische Methode zur Construction der gesuchten Curve angegeben. Unter den Eigenschaften der Transformation ist eine Relation zwischen den Krümmungsradien und den Oberflächen-Elementen $(ydx$ und $y'dx')$ zu erwähnen. Neben zahlreichen Anwendungen auf einzelne Curven ist auch der Versuch gemacht, solche Fälle zu ermitteln, in denen eine Curve in sich selbst übergeht $(y^2 - x^2 = a^2)$; endlich sind die Constructionen unter dem Gesichtspunkte der darstellenden Geometrie betrachtet.

Im zweiten Kapitel ist die entsprechende Aufgabe der „Erhaltung der Subnormalen“ in gleicher Weise gelöst; die bezüglichen Gleichungen sind:

$$(2) \qquad x' = x + f(x), \quad y'^2 = K^2 - y^2 - [f(x)]^2.$$

Das dritte Kapitel behandelt „verschiedene Fragen“: Curven, die mit der Tractrix nach jenen Gesichtspunkten zusammenhängen, Untersuchung einer besonderen Curve, die der Bedingung genügt:

$$dx\sqrt{C^2 + y^2} = \pm dy\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Zuletzt wird auf den Zusammenhang der beiden gelösten Aufgaben hingewiesen, den man durch die Betrachtung der orthogonalen Trajectorien eines Systems von Curven herstellen kann. Lp.

G. Lazzeri. Quistione 400. Periodico di Mat. **13,** 121-123.

Die bekannte Aufgabe der Verfolgungscurven wird in der allgemeinen Form gestellt, dass der verfolgte Punkt A eine gegebene Curve $f(x, y) = 0$ mit der Geschwindigkeit v_1 durchläuft; die Curve des verfolgenden Punktes B, der die Geschwindigkeit v_2 hat, ist zu finden. Lösungen von Chinaglia und Stretti. Lp.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Segre. Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve. Batt. G. **36,** 1-50.

Die Arbeit, welche eine vom Verf. gehaltene Vorlesung auszugsweise wiedergiebt, behandelt das Thema in ausführlicher Darstellung und mit durchweg elementaren Hülfsmitteln. In den beiden ersten Abschnitten werden, unter Berücksichtigung zahlreicher specieller Fälle, Zahl und Art der Schnittpunkte zweier Curven untersucht. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit den Curventangenten, der Bestimmung der Klasse und der Darstellung einer Curve als Enveloppe. Sodann folgt im vierten einiges über die Erniedrigung der Klasse durch vielfache Punkte, über die Vielfachheit der Tangenten und die Arten der Doppelpunkte, und im letzten die Untersuchung der zu einer ebenen Curve gehörenden Hesse'schen Curve. Die Abhandlung eignet sich wegen der Eleganz der Darstellung, insbesondere der geschickten Verwebung algebraischer und geometrischer Methoden, sowie der zahlreichen Litteraturnachweise vorzüglich als Einführung in die Theorie der algebraischen Curven.

Ot.

E. J. NANSON. On the vector pedal equation of a plane curve. Messenger (2) **28**, 80-84.

Die Gleichung, welche den Radiusvector eines beliebigen Punktes P einer ebenen Curve mit der Länge des Lotes vom Nullpunkte auf die Tangente in P verbindet, wird die Pedalgleichung der Curve genannt. Für manche Zwecke ist es besser geeignet, die Gleichung zu betrachten, welche den Vector $r = x + iy$ von P mit dem Vector $p = \xi + i\eta$ von Y, dem Fusspunkte des Lotes vom Nullpunkte auf die Tangente in P, verbindet. Diese Gleichung kann die „vectorielle Pedalgleichung" der Curve heissen. In der vorliegenden Note wird zuerst die Ordnung der vectoriellen Pedalgleichung einer algebraischen Curve bestimmt, und dann wird die Gleichung zum Beweise einer gewissen Eigenschaft der Tangenten und Normalen benutzt.

Lp.

J. HADAMARD. Sur les conditions de décomposition d'une forme ternaire. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 100-103.

„Unter den Bedingungen dafür, dass eine ebene Curve n^{ter} Ordnung eine Gerade enthalte, ist wahrscheinlich keine von einer Ordnung unter $n+1$. Jedenfalls kann man die Existenz von Curvenbüscheln n^{ter} Ordnung von der Form $f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) = 0$ beweisen, so dass für $n+1$ Werte von λ diese Curve eine Gerade enthält. . . . Die Existenz solcher Büschel scheint direct schwer zu beweisen. . . . Ich bin zu dem Resultate auf einem ganz anderen Wege gekommen, der auf der symbolischen Darstellung beruht."

Lp.

S. MANGEOT. Sur la similitude et la symétrie de deux courbes ou surfaces algébriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15**, 385-392.

Zwei zu einem Punkte oder einer Geraden oder einer Ebene sym-

metrisch gelegene Flächen m^{ter} Ordnung $(m > 2)$:

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

haben zwei zu ihnen covariante Flächen zweiter Ordnung:

$$\sum_2^m \frac{(m-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \left(\frac{\partial^{m-1} f_r(x,y,z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)^2 = 0$$

$$(r = 1,\ \alpha+\beta+\gamma = m-1).$$

Das Umgekehrte gilt im allgemeinen nicht; tritt es aber ein, so liefert die zugehörige Verification diejenige lineare Transformation, welche die entsprechenden Flächen m^{ter} Ordnung in einander überführt. Js.

S. Mangeot. Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques. Nouv. Ann. (3) **17**, 215-218.

Der Verf. teilt zuerst den Satz mit: Wenn ein ganzes Polynom $f(x, y, z, \ldots)$ von n Variablen gegeben ist und man den Variablen solche Zuwachse (Incremente) zu geben sucht, dass der neue Ausdruck des Polynoms seinen absoluten Wert nicht ändert, während man die Vorzeichen sämtlicher Variablen ändert, so kann diese Aufgabe zurückgeführt werden auf die ganz analoge Aufgabe für ganze Polynome: $\varphi_\lambda(y, z, \ldots)$, die höchstens von $(n-1)$ Variablen abhängen. Die gestellte Aufgabe lässt sich daher durch wiederholte Anwendung dieser Methode zuletzt auf die entsprechende Aufgabe für ein Polynom mit einer Variable zurückführen und hiermit zu Ende bringen.

Es werden dann algebraische Curven $(n = 2)$ und Flächen $(n = 3)$ betrachtet. Mz.

Ripert. Correspondance. Nouv. Ann. (3) **17**, 333-334.

Es ist dies der Auszug aus einem Briefe von Ripert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Punkt (α, β) Centrum der Curve $f(x, y) = 0$ vom m^{ten} Grade sei, erhält man, indem man ausdrückt, dass alle Derivirten von f, deren Grad von entgegengesetzter Parität mit m ist, für die besonderen Werte α, β von x, y verschwinden. Wenn also ein Centrum existirt, so wird es immer durch Auflösen der beiden Gleichungen $f_x^{(m-1)} = 0$, $f_y^{(m-1)} = 0$ nach x und y aufgefunden.

Dies wird dann in der Kürze näher ausgeführt; ferner wird der analoge Gegenstand für Flächen m^{ten} Grades: $F(x, y, z) = 0$ angedeutet.

Zu der gegenwärtigen Notiz wurde der Verf. durch einen Aufsatz von Mangeot: Ueber Centra algebraischer Flächen und Curven veranlasst (vergl. die vorangehenden Referate). Mz.

H. E. Timerding. Sur une certaine famille de courbes algébriques. Nouv. Ann. (3) **17**, 351-367.

Es können hier nur die in der Einleitung gegebenen Principien erwähnt werden.

Hat man auf einer Geraden drei feste Punkte A, B, N und einen variablen P, so wird zunächst auf der Geraden ein Punkt Q gesucht, so dass:

$$\frac{QA}{QB} : \frac{PA}{PB} = \frac{PA}{PB} : \frac{NA}{NB} = \alpha.$$

Daraus folgt dann: $\frac{QA}{QB} : \frac{NA}{NB} = \alpha^2$. In gleicher Weise wird dann R aus Q hergeleitet, und es ist: $\frac{RA}{RB} : \frac{NA}{NB} = \alpha^3$. So erhält man eine Folge von Punkten: $P, Q, R, \ldots$, welche Potenzpunkte (points-puissances) des ersten unter ihnen in Bezug auf die festen Punkte A, B, N heissen. Der n^{te} Punkt dieser Reihe ist also der n^{te} Potenzpunkt von P.

Um dies auf die Ebene zu übertragen, nimmt man vier Punkte der Ebene: A, B, C, O. Die drei ersten bilden das Bezugsdreieck $\triangle$, und O wird als Einheitspunkt angesehen. Die Geraden AO, BO, CO mögen die Gegenseiten von A, B, C im Dreieck $\triangle$ resp. in L, M, N treffen. Ebenso mögen die Geraden AP, BP, CP nach einem beliebigen Punkte P diese Gegenseiten resp. in P', P'', P''' treffen. Dann kann man in gleicher Weise wie zuvor auf jeder der Dreiecksseiten die Reihe der Potenzpunkte resp. zu P', P'', P''' bestimmen; also zu B, C, L, P' die Reihe: $P', Q', R', \ldots$, und ebenso zu C, A, M, P''; A, B, N, P'''. Die auf den Dreiecksseiten hierdurch erhaltenen Punkte gleich hoher Potenz werden dann mit den Gegenecken verbunden, und drei solche Linien treffen sich in einem Punkte, der dann ein Potenzpunkt von P ist in Bezug auf das Dreieck $\triangle$ und den Einheitspunkt O. In dieser Weise gehört zu einem Punkte P ein einziger anderer Punkt, der seine n^{te} Potenz ist; dagegen gehören einem Punkte, der als n^{te} Potenz eines anderen angesehen wird, n^2 Punkte zu, die dieser Forderung genügen.

Wie nun Punkte einander nach diesen Grundsätzen zugeordnet werden, so lassen sich auch Curven gegenseitig zuordnen, und hierüber folgt dann eine Reihe von Sätzen. Mz.

A. Schmitz. Die rationalen ebenen Curven. Pr. Gymn. Münnerstadt. 51 S. 8°.

Der Verf. giebt zuerst die Definition der rationalen Curven durch die Gleichungen für die Coordinaten (x, y) eines Punktes:

$$x = \frac{f_1(\lambda)}{f_3(\lambda)}, \quad y = \frac{f_2(\lambda)}{f_3(\lambda)},$$

wo f_1, f_2, f_3 ganze Functionen von λ sind, die denselben Grad n haben. Er bespricht dann ihre fundamentalen Eigenschaften und ihre Transformation auf neue Coordinatenaxen. Danach werden die Curvengleichungen durch Substitution eines neuen Parameters μ, der mit λ durch die Relation:

$\lambda = \frac{p\mu + q}{r\mu + s}$ verknüpft ist, umgeformt. Die Anzahl der Punkte, durch die eine rationale Curve bestimmt ist $(3n-1)$, und die Bestimmung der Curve aus gegebenen Punkten wird dann behandelt. Hierauf folgen die Abgeleiteten der Curvengleichungen, die Inflexions- und Culminationspunkte, die Klasse der Curve, ihre Asymptoten. Eine rationale Curve n^{ter} Ordnung mit k Spitzen hat $3(n-2)-2k$ Inflexionspunkte; ferner hat sie $2(n-1)-k$ Culminationspunkte und $2(n-1)-k$ zu einer bestimmten Richtung parallele Tangenten. Ihre Klasse ist $2(n-1)-k$. Nun werden die Singularitäten der rationalen Curven besprochen; die Anzahl derselben wird nach einer neuen Methode abgeleitet. Die Anzahl der Doppelpunkte jeder rationalen Curve beträgt $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; ferner die Anzahl der Doppeltangenten einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung mit k Spitzen: $2(n-2)(n-3)-\frac{1}{2}k(4n-k-11)$. Zuletzt wird die Elimination des Parameters bei Gleichungen rationaler Curven besprochen und ebenso auch die Einführung eines solchen Parameters. Zahlreiche Beispiele dienen dem Ganzen zur Erläuterung und zum näheren Verständnis. Mz.

Fr. Stosch. Ueber diejenigen Unicursalcurven, welche nicht die Maximalzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ von Doppelpunkten besitzen. Pr. (No. 78) Gymn. Guben. 8 S. 4°.

Erörtert die Kriterien, welche zur Auffindung latenter vielfacher Punkte (d. h. solcher, die einem anderen von höherer Ordnung unendlich nahe gerückt sind) dienen können. R. M.

B. Levi. Sulla trasformazione di una curva algebrica in un'altra priva di punti multipli. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 111-113.

Jede beliebige algebraische Curve kann nicht bloss durch birationale Transformation der Curve, sondern auch durch Cremona-Transformationen des Raumes in eine doppelpunktfreie Curve übergeführt werden. Lsg.

F. Amodeo. Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie s. Napoli Rend. (3) **4**, 433-438.

P. del Pezzo. Rapporto. Ibid. 433.

Die Arbeit giebt einige Folgerungen und Zusätze zu den früheren Untersuchungen des Verf. über denselben Gegenstand (vgl. F. d. M. **26**, 656, 1895; **27**, 471, 1896; **28**, 513, 1897). Lsg.

Ch. Angas Scott. On the intersections of plane curves. American M. S. Bull. (2) **4**, 260-273.

Nach einem kurzen Ueberblick über die Geschichte des MacLaurin-Euler-Cramer'schen Paradoxons und des sich hieran anschliessenden

Cayley'schen Schnittpunkttheoremes, welches von Bacharach vervollständigt worden ist, giebt die Verfasserin weitere Auseinandersetzungen zu einer Arbeit von F. S. Macaulay in Lond. M. S. Proc. **26,** welche in F. d. M. **26,** 653, 1895 besprochen worden ist. Im Gegensatze zu dieser Besprechung wird der Wert und die Neuheit der Macaulay'schen Untersuchung aufrecht gehalten; es folgen Ausführungen zur Bestimmung der daselbst eingeführten Zahl r_n (des „n-ic excess"), des Ueberschusses der Zahl der Punkte einer Punktgruppe über die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen, welche diese Punkte einer durch sie hindurchgelegten Curve n^{ter} Ordnung auferlegen. Lsg.

F. S. Macaulay. On the intersections of plane curves. American M. S. Bull. (2) **4,** 540-544.

Verf. geht auf die Bemerkungen ein, welche Ch. A. Scott in dem vorstehend besprochenen Aufsatze über seine frühere Arbeit gemacht hat, und klärt einige Punkte auf, oder geht auf Fragen ein, die erhoben sind. Lp.

Ch. Angas Scott. Note on linear systems of curves. Nieuw Archief (2) **3,** 243-252.

Ch. Angas Scott. Sur la transformation des courbes planes. Ass. Franç. St. Étienne (1897) **26,** 50-59.

Beide Arbeiten untersuchen die allgemeinste rationale Abbildung zweier Ebenen auf einander, bei welcher durch die Gleichungen

$$x':y':z' = \varphi_1(x,y,z):\varphi_2(x,y,z):\varphi_3(x,y,z)$$

den Curven eines Netzes der ersten Ebene die Geraden der zweiten Ebene zugeordnet werden. Die erste Arbeit betrachtet die möglichen Abweichungen, welche die allgemeinen Gesetze der Abbildung bei besonderer Auswahl des Curvennetzes oder seiner Fundamentalpunkte erleiden können, die zweite Arbeit giebt im Falle einer $(1, k)$-deutigen Zuordnung der Punkte beider Ebenen eine Methode zu einer Einteilung der ersten Ebene in verschiedene Gebietsteile, welche auf die ganze zweite Ebene abgebildet werden, und zeigt die Anwendbarkeit der Methode an einem Beispiele. Lsg.

Ch. A. Scott. Studies in the transformation of plane algebraic curves. Quart J. **29,** 329-381.

Die gegenwärtige Abhandlung, deren Fortsetzung versprochen wird, bringt die ausführlicheren Betrachtungen zu denjenigen Mitteilungen der Verfasserin, die in dem vorangehenden Referate besprochen sind. Wir lassen daher die Stelle der Einleitung folgen, welche den Zweck der Forschung beleuchtet.

Diese Studien sollen einen Beitrag zur eingehenden geometrischen Erörterung der Wirkung einer rationalen Transformation liefern. Die zu transformirende Curve ist als Ort in der Ebene vorgestellt; die

Ebene selbst wird einer $(k, 1)$-Transformation unterworfen. Daher steht die x-Ebene, in welcher die Stammcurve liegt, in einer $(k, 1)$-Verwandtschaft mit der x'-Ebene, in welcher die transformirte Curve liegt. Da die Transformation durch ein Netz von Curven bewirkt wird, so fällt notwendig ein Teil der Arbeit in die Theorie der Netze. Hierbei wird nicht nur die Jacobiana J betrachtet, wie bei der gewöhnlichen Darstellung der Transformationstheorie, sondern auch eine Curve J', die entsprechende in der x'-Ebene für die Jacobiana, und eine Curve j, die Cojacobiana, deren Beziehung zur Jacobiana eingehender Untersuchung wert ist. Diese beiden Curven verdienen eine Beachtung in der Theorie; die Curve J' ist die reciproke Polare der Cremoniana des Netzes. Der Name der Cremoniana wird, wie neuerdings angeregt ist, hier gebraucht, um diejenige aus einem allgemeinen Netze abgeleitete Curve zu bezeichnen, welche die Steineriana wird, wenn das Netz ein Polarnetz ist. So viel bekannt, ist die Cojacobiana j früher noch nicht benutzt worden, und doch treten gerade in der Beziehung der Jacobiana zur Cojacobiana die unterscheidenden Merkmale des Transformationsnetzes zu Tage. Aus dieser Beziehung entspringen auch die Punkt- und Linien-Singularitäten der Curve J', die eine vollständige Synopsis des Netzes ist. Diese, hier „synoptische Curve" genannte Curve J' würde schwerlich hervortreten, wenn nicht die Untersuchung des Netzes ihren Gebrauch als Transformationssystem erforderte; hieraus erklärt sich wahrscheinlich genugsam, woher es kommt, dass dieser besonderen Rolle der Curve bisher so wenig Beachtung geschenkt wurde. Diese abgeleiteten Curven sind natürlich gleichzeitig mit J Invarianten des Netzes. Mit Hülfe der Jacobiana und der Cojacobiana in der x-Ebene, der synoptischen Curve in der x'-Ebene und passend ausgewählter Transformationscurven in der x-Ebene nebst den ihnen in der x'-Ebene entsprechenden Geraden werden die beiden Ebenen in entsprechende Abteile zerlegt, so dass k (oder weniger) in der x-Ebene irgend einem in der x'-Ebene entsprechen. Vermittelst dieser Abteile wird die Wirkung der Transformation auf jede Curve graphisch anschaulich gemacht; sie, oder vielmehr die Curven, durch welche sie erhalten werden, leisten bei den formelleren algebraischen Beweisen nützliche Dienste. Die Elimination dreier Variablen aus homogenen Gleichungen, drei vom Grade σ, eine vom Grade n, ist ein langweiliges Verfahren, so mühselig, dass es fast undurchführbar wird, wenn die Gleichungen nicht sehr sorgfältig ausgesucht werden. In vielen der Beispiele würde trotz solcher Vereinfachungen die algebraische Arbeit mehrere Druckseiten füllen; zum Glück tritt in der Praxis eine Selbstkontrolle ein, so dass die Ergebnisse keinem Zweifel unterliegen, und daher wurde nicht Bedenken getragen, diese langwierigen Eliminationen und Substitutionen zu unterdrücken. § 1. Das Transformationsnetz; fundamentale Punkte und Linien. § 2. Die Jacobiana; ihre Entsprechende und Begleiterin. § 3. Abteile. § 4. Beziehung der Jacobiana und der Cojacobiana zu einander und zur synoptischen Curve. § 5. Wirkung der einfacheren Transformationen auf eine Curve. Mehrere vollständig durchgeführte Beispiele nebst den

zugehörigen Figuren machen den Beschluss. Vier weitere Paragraphen werden in Aussicht gestellt. Lp.

M. Stuyvaert. Sur les groupes polaires des systèmes de points. Mathesis (2) **8**, 20-23.

Lehrsatz: $n+1$ Gruppen von n Punkten P, die auf $n+1$ von einem Punkte O auslaufenden Strahlen liegen, gehören einer und derselben Curve n^{ter} Ordnung an, wenn die ersten Polarsysteme von O in Bezug auf alle diese Gruppen auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Mn. (Lp.)

F. S. Macaulay. Point-groups in a plane, and their effect in determining algebraic curves. Lond. M. S. Proc. **29**, 673-695.

Die vorliegenden Untersuchungen bilden eine unmittelbare Fortsetzung und Erweiterung der in einer früheren Arbeit (F. d. M. **26**, 653, 1895) vom Verfasser angestellten. Er beschäftigt sich insbesondere mit der Reduction von Punktgruppen (auf ebenen algebraischen Curven beliebiger Ordnung), die eine bekannte Anzahl von linearen Bedingungen erfüllen, d. i. von solchen, die daher rühren, dass die Curven durch gewisse gegebene Punkte gehen sollen.

Dass eine Curve n^{ter} Ordnung durch N Punkte gehen soll, führt nicht immer zu N unabhängigen Bedingungen, sondern unter Umständen zu einer kleineren Anzahl $N-r_n$ solcher.

Der Verf. construirt gewisse ganze Zahlen ϱ, von denen er zeigt, dass sie positiv ausfallen müssen, falls eine Gruppe von N Punkten überhaupt möglich sein soll. Es werden weiterhin Kriterien dafür aufgestellt, dass die fragliche Curve eine eigentliche (nicht zerfallende) ist, oder nicht.

Sodann wird untersucht, unter welchen Umständen sich die vorgelegte Punktgruppe in zwei oder mehrere unabhängige Teile zerlegt.

Am Schlusse bedient sich der Verf. rationaler Transformationen der Curven, um seine Sätze zu verallgemeinern. Man kann dadurch erreichen, dass ein Teil der Punktgruppe fest bleibt, während der Rest beweglich wird.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen bei den Zerlegungen der Punktgruppen solche Teilgruppen, die den vollständigen Schnitt zweier Curven gleicher oder verschiedener Ordnung bilden.

Es wäre zu wünschen gewesen, dass der Verf. seinen wenigen Beispielen eine grössere Anzahl weiterer hinzugefügt hätte. Der vorwiegend arithmetische Charakter der Untersuchungen erschwert die geometrische Einsicht. My.

Miss F. Hardcastle. A theorem concerning the special systems of point-groups on a particular type of base-curve. Lond. M. S. Proc. **29**, 132-139.

Die Specialpunktgruppen auf einer algebraischen Curve vom Geschlechte p sind nach Brill und Noether (F. d. M. **6**, 251, 1874) paarweise verknüpft in der Weise, dass mit der Gruppe G_R^r auch die andere G_Q^q existirt, wenn die natürlichen Zahlen Q, R, q, r den „Riemann-Roch'schen" Bedingungen

$$\text{I.} \qquad Q+R=2p-2, \quad Q-R=2(q-r)$$

unterliegen. Später hat Clifford (F. d. M. **10**, 506, 1878) noch die Ungleichung

$$\text{II.} \qquad Q \geqq 2q \text{ (womit zugleich auch } R \leqq 2r)$$

hinzugefügt. Die Relationen I und II zusammen lassen bei gegebenem p nur eine begrenzte Anzahl von Auflösungen in natürlichen Zahlen Q, R, q, r zu; hierdurch wird also auch die Anzahl der Specialgruppen auf einer Curve von gegebenem Geschlecht von vorn herein begrenzt. Das gilt, von welcher Natur auch die Singularitäten der Curve sein mögen.

Der Verf. zeigt indessen, dass für gewisse particulare Typen von Grundcurven eine noch engere Begrenzung der Werte von Q, R, q, r möglich ist. My.

Miss Frances Hardcastle. Some observations on the modern theory of point groups. American M. S. Bull. (2) **4**, 390-402.

Der Aufsatz soll eine kurze Uebersicht über dieses Gebiet geben. Im § 1 werden die in Gebrauch befindlichen technischen Ausdrücke erläutert; in § 2 werden von den Riemann-Roch'schen Gleichungen aus gewisse Gedankenreihen angegeben, die bei der Einteilung der algebraischen Curven sich als nützlich erwiesen haben. In einem Anhange ist die einschlägige Bibliographie zusammengestellt. Der erste Teil enthält diejenigen Schriften, welche man als grundlegende bezeichnen kann; der zweite umfasst Abhandlungen über Curven im gewöhnlichen Raume oder im mehrdimensionalen, die mehr oder weniger mit der Theorie der Punktgruppen verknüpft sind. Lp.

J. Sommer. Ueber die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen auf Curven vom Geschlecht p. Diss. Tübingen: H. Laupp. jr. 33 S. 8°.

Auf einer Curve $C_n^{(p)}$ von der Ordnung n und vom Geschlecht p sei eine Anzahl $(r+1=2Q-p-1)$ von Punkten fest angenommen, durch welche eine $2r$-fach unendliche lineare Schar adjungirter Curven hindurchgeht, und es sei $R+r+1$ die Gesamtheit der nicht festen Schnittpunkte mit der Grundcurve. Alsdann kann das Problem der Specialgruppen $g_Q^{(1)}$ als specieller Fall der Aufgabe aufgefasst werden, die Anzahl ausgezeichneter Gruppen von $r+1$ Punkten zu bestimmen, durch die noch ∞^r adjungirte Curven des Systems gehen. Die gesuchte Zahl $\xi(R, r, p)$ ergiebt sich aus zwei Recursionsformeln, die durch eigentüm-

liche Grenzübergänge erhalten werden, und gestattet eine unmittelbare Anwendung auf das ursprüngliche Problem der Specialgruppen $g_Q^{(1)}$. Ein analoges Verfahren wird sodann auf die Bestimmung der zu $g_Q^{(1)}$ residualen Scharen $\gamma_R^{(r)}$ angewandt, wobei sich eine zuerst von Brill und Noether bemerkte Beziehung zu gewissen Aufgaben der abzählenden Geometrie in höheren Räumen ergiebt. Nach einer ausführlichen Behandlung eines Beispiels (Bestimmung der Specialscharen $g_8^{(2)}$ auf einer Curve $C_9^{(8)}$ mit 20 Doppelpunkten) findet noch die von Castelnuovo behandelte Aufgabe der Bestimmung der Specialgruppen $g_Q^{(q)}$ auf einer Curve vom Geschlechte p mit der Bedingung $\tau = 0$ ihre Erledigung. Ot.

H. B. Newson. Normal forms of projective transformations. Kansas Univ. Quart. **7**, 125-141.

Eine lineare gebrochene Transformation einer Variable $x_1 = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ lässt sich bekanntlich stets auf eine der beiden Normalformen bringen: entweder $\dfrac{x_1-m}{x_1-n} = K\dfrac{x-m}{x-n}$, oder aber (im besonderen)

$$\frac{1}{x_1-m} = \frac{1}{x-m} + \alpha.$$

Die hier auftretenden Parameter haben eine einfache Bedeutung.

Eine analoge Theorie lässt sich nach Lie für die projectiven Transformationen der Ebene und des Raumes aufstellen. Im Falle der Ebene giebt es fünf verschiedene Typen solcher Transformationen, und im Falle des Raumes 13, wo jede Transformation durch ihre „invariante Figur" charakterisirt ist. Der Verf. stellt für diese fünf, resp. 13 Typen die zugehörigen Normalformen auf (zumeist ohne Beweis) und bemerkt, dass er zu ihnen wesentlich durch geometrische Ueberlegungen geführt sei.
My.

H. Burkhardt. Sur le principe de correspondance. C. R. **126**, 1854-1856.

Besteht auf einer Curve vom Geschlecht p eine (α, β)-Correspondenz, so kann man im allgemeinen eine ganze Zahl k so angeben, dass die Anzahl C der Coincidenzpunkte gleich $\alpha+\beta+2kp$ ist, und es hat dann die Correspondenz die „Wertigkeit" k. Es gilt aber für alle Correspondenzen die Beziehung $C \leqq (\alpha+\beta)(p+1)$. Definirt man andererseits k durch die Gleichung $C = \alpha+\beta+2kp$, auch für Correspondenzen ohne Wertigkeit, so zeigt sich, dass k nicht immer ganzzahlig ist. Für die Curve $z^3+s^2-1=0$ z. B., welche die $(1,1)$-Correspondenz $z' = \sqrt[3]{1}.z$, $s' = s$ zulässt, erhält man $C=3$, $k=\frac{1}{2}$.
Ot.

Weitere Litteratur.

A. Alasia. Sulle involuzioni di ordini superiori. Civitanova Marche. 38 S. 8°.

G. Fontené. Sur les formules de Plücker. Revue de math. spéc. **8**, 561-567.

G. Humbert. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre. S. M. F. Bull. **26**, 233-236.

Bericht auf S. 389 dieses Bandes.

P. H. Schoute. Over focaalkrommen en focaaloppervlakken. Amst. Versl. **6**, 404-407.

M. Stuyvaert. Normales aux surfaces et aux courbes algébriques. Mathesis (2) **8**, 105-108.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

J. J. Duran-Loriga. Notes de géométrie. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 175-189.

Als Fortsetzung der Veröffentlichungen über die „Radicalkreise und Antiradicalkreise" (vergl. F. d. M. **26**, 572 u. 665, 1895; **27**, 397-398 u. 480, 1896; **28**, 449 u. 523, 1897) giebt der Verf. die barycentrischen Gleichungen verschiedener merkwürdiger Punkte des Dreiecks, indem er sie als Kreise mit verschwindendem Radius betrachtet, und benutzt diese Gleichungen zur Bestimmung der Gleichungen für die Radical- und Antiradicalkreise jener Elemente. Es folgen einige Bemerkungen über die Tucker'schen Kreise; zum Schlusse wird die Kundgebung verschiedener aus diesen Untersuchungen sich ergebender Eigenschaften zur Dreiecksgeometrie in Aussicht gestellt. Lp.

J. C. Wasson. Questions 13653 and 13684. Ed. Times **69**, 48-50.

A, B, C sind die Ecken eines Dreiecks; A', B', C' drei Punkte des Umkreises von ABC, so dass die Bogen AA', BB', CC' die algebraische Summe 0 oder ein Vielfaches von 2π geben. Dann treffen sich die Simson-Linien von A', B', C' bezüglich des Dreiecks ABC in einem und demselben Punkte. Ist jene Summe $AA'+BB'+CC' = (2n+1)\pi$, so fällt der Neunpunktekreis des von den Simson-Linien von A', B', C' gebildeten Dreiecks mit dem Neunpunktekreise von ABC zusammen. Analytische Beweise von J. W. Dobbs. Lp.

E. N. Barisien. Étude d'un triangle remarquable. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 107-128.

Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, h die zu a gehörige

Höhe, so ist das vom Verf. betrachtete Dreieck dasjenige, bei welchem $a+h_a=b+c$ ist. Als bemerkenswerte Eigenschaften zählt der Verf. die folgenden auf: 1) $p(p-b)(p-c)=a^2(p-a)[p=\frac{1}{2}(a+b+c)]$. 2) $\Delta=a(p-a)$. 3) $\varrho_a=a$. 4) Ist A' der Berührungspunkt des Inkreises von ABC mit BC, so ist $A'B-A'C=c-b$. 5) Ist O der Berührungspunkt des Ankreises von BC mit BC, H der Fusspunkt von h_a, J der Halbirungspunkt von AH, so ist $\Delta JOH=\frac{1}{2}\Delta AOA'$. 6) Ist $B''B=BA'$ und $A'C=CC''$, so berührt der Kreis über $B''C''$ als Durchmesser den Kreis um A als Mittelpunkt mit $AB'=AC'$ als Radius. Letzterer Kreis geht durch J. 7) OA werde über A hinaus verlängert und treffe den Kreis über $B''C''$ als Durchmesser in A'', so ist $AA''=\frac{1}{2}OH$. 8) $2AO+AH=2a$.

Der grössere Teil des Aufsatzes (S. 112-128) ist der Aufsuchung der Gleichungen von geometrischen Oertern gewidmet, bezüglich auf merkwürdige Elemente des Dreiecks, wenn BC fest gegeben ist.

Lp.

Bresina. Die Kegelschnitte für die Prima des Gymnasiums bearbeitet. Pr. (No. 381) Archigymn. Soest. 22 S. 4°. Mit Fig.-Taf.

Zuerst werden die ebenen Kegelschnitte aus dem geraden Kegel abgeleitet. Zwei dem Kegel eingeschriebene Kugeln mit einer gemeinsamen Berührungsebene geben nach Dandelin als Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel erst die Ellipse, dann die Hyperbel. Da in beiden Fällen die Berührungspunkte auf den Kugeln mit der Ebene die Brennpunkte sind, so hat man hier sogleich die geometrische Definition von Ellipse und Hyperbel. Die Parabel entsteht aus dem Kegel, wenn nur eine Berührungskugel construirt wird, und dann eine Ebene diese Kugel berührt, welche zu einer Seite des Kegels parallel ist. Auch hier hat man sogleich die geometrische Definition der Curve aus Leitlinie und Brennpunkt. Hierauf werden die Curven der Reihe nach behandelt: ihre geometrische und ihre mechanische Construction, ihre Tangenten mit mancherlei Sätzen, die Asymptoten der Hyperbel und die Quadratur von Ellipse und Parabel. Sehr gute Figuren erleichtern das Verständnis des Inhaltes.

Mz.

L. Ripert. Sur la discussion de l'équation des coniques. Nouv. Ann. (3) **17**, 329-331.

Der Verf. sagt zu Anfang, dass die Tabelle, nach welcher man gewöhnlich die Discussion der allgemeinen Gleichung:

$$\sigma=AX^2+2BXY+CY^2+2DXT+2EYT+FT^2$$

giebt, nur die Art des Kegelschnitts bestimmt. Hierauf entwickelt er weitere Bedingungen, nach denen hierbei gefragt werden kann: wann eine imaginäre und wann eine reelle Ellipse herauskommt, u. a. m.

Für Ellipse und Hyperbel soll hierbei der Coordinatenanfang im Innern oder ausserhalb der Curve sein, je nachdem $AF<0$ oder $AF>0$.

Das kann man aber wenigstens von der Hyperbel nicht sagen. Denn setzt man: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, so wäre $AF<0$, und setzt man mit Vertauschung der Coordinatenaxen: $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}+1=0$, so wäre $AF>0$. Also wäre der Mittelpunkt der Hyperbel bei der einen Betrachtung innerhalb, bei der anderen ausserhalb der Curve.

Auch wird die Tangentialgleichung des Kegelschnitts, ferner seine Gleichung in trilinearen normalen Coordinaten discutirt. Mz.

J. Neuberg. Question 13434. Ed. Times 68, 31.

In einem Punkte A eines Kegelschnitts zieht man die Normalsehne AB; in B errichtet man die Sehne BC senkrecht auf BA, und von C fällt man das Lot auf die Tangente in B. Dieses Lot treffe AB in D; alsdann ist BD gleich dem Durchmesser des Krümmungskreises in A. Beweise von Davis und Droz-Farny. Lp.

A. Schwarz. Ueber eine für alle Kegelschnitte gültige Verallgemeinerung des Satzes, wonach der Peripheriewinkel über dem Halbkreise ein Rechter ist. Monatsh. f. Math. 9, 346-357.

Zunächst zeigt der Verf., dass für die Ellipse mit der Gleichung $a^2y^2-b^2x(2a-x)=0$ das Gesetz besteht: $y\,\mathrm{tg}\,\omega=-2ab^2/(a^2-b^2)$, wo y die Ordinate eines Punktes M der Ellipse und ω der Winkel ist, unter welchem die grosse Axe der Ellipse von M aus gesehen wird. Die Uebertragung dieses Gesetzes auf Parabel und Hyperbel ist nun einfach. Der Verf. führt weiter ein Coordinatensystem ein, bei welchem y und $\mathrm{tg}\,\omega$ als Coordinaten fungiren; A und B sind feste Punkte, $AB=2a$. Die bilineare Gleichung $ay\,\mathrm{tg}\,\omega+by+c\,\mathrm{tg}\,\omega+d=0$, wo a, b, c, d Constanten, drückt dann eine circulare Curve dritter Ordnung aus, die näher beschrieben wird. Eine Verallgemeinerung des Coordinatensystems $(y, \mathrm{tg}\,\omega)$ entsteht aus zwei Kreisbüscheln $K_1-\lambda K_2=0$, $K_3-\mu K_4=0$, deren vier Basispunkte nicht auf demselben Kreise sind. Eine bilineare Gleichung $A\lambda\mu+B\lambda+C\mu+D=0$ definirt eine bicirculare Curve vierter Ordnung. Am Schluss werden Linien- und Flächendifferentiale von Kegelschnitten und von der Lemniskate angegeben. Mz.

R. Böger. Der Kegelschnitt der neun Punkte. Hamb. Mitt. 3, 346-352.

Der Verf. sagt zu Anfang, er habe in Lehrbüchern die Bemerkung nicht gefunden, dass der Feuerbach'sche Kreis der neun Punkte ein besonderer Fall des Kegelschnitts ist, auf dem die Pole einer Geraden hinsichtlich der Kegelschnitte eines Büschels liegen. Er unternimmt es daher, die bekannten Sätze, aus denen dieser Zusammenhang sich her-

leiten lässt, noch einmal kurz zu entwickeln, und zwar in einer Form, die von der üblichen sich dadurch unterscheidet, dass sie keiner Annahmen über die Realität der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels bedarf. Es wird nämlich das Viereck dieser Grundpunkte durch zwei involutorische Punktreihen a und $\mathfrak{a}$ ersetzt, deren etwa vorhandene Doppelpunkte Ecken des Vierecks sind. (Man vergleiche hierzu: Schröter, Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks. J. für Math. **68**, 213, 1867.) Mz.

E. Malo. Remarque au sujet de la question de concours des „Nouvelles Annales“ en 1896. Nouv. Ann. (3) **17**, 128-129.

Diese Bemerkung bezieht sich auf die geometrische Interpretation der Wurzeln einer Gleichung vierten Grades $F(x) = 0$. Es seien A, B, C, D die Punkte, welche diese Wurzeln darstellen; dann werden diese Punkte durch sechs Gerade verbunden, die sich paarweise in drei anderen Punkten E, F, G schneiden, wobei jedes dieser drei Paare alle vier Punkte A, B, C, D enthält. Eines der drei Paare denke man hinweg; die vier übrigen Geraden bestimmen dann eine eingeschriebene Parabel. Hatte das entfernte Paar den Durchschnitt E, so sei e der Brennpunkt dieser Parabel; auf diese Art erhält man drei Parabeln mit den Brennpunkten resp. e, f, g. Und es sind ferner die Dreiecke EFG, efg homolog; das Centrum der Homologie wird angegeben. Diese Interpretation wird dann zur Covariante $R(x)$ von $F(x)$ in Beziehung gesetzt. Zum Schluss wird der Fall betrachtet, in welchem die Wurzeln von $F(x) = 0$ reell sind, da dieser Fall eine andere Behandlung erfordert. Mz.

Retali. Quistioni 356, 405, 423. Periodico di Mat. **13**, 161-163.

Die von Retali gestellte Aufgabe 356, die Parabeln zu construiren, welche eine gegebene Directrix besitzen und einen gegebenen Kreis entweder zweimal berühren oder ihn osculiren, wird von A. Barozzini analytisch gelöst. Für die unter 405 von G. Cardoso-Laynes ausgesprochenen Sätze erbringt Retali kurze analytische Beweise. Man betrachte das Dreieck FPN, dessen Ecken der Brennpunkt F einer Parabel, ein beliebiger Punkt P derselben und der Schnittpunkt N der Tangente in P mit ihrer Axe ist. Der Ort des Umkreiscentrums von FPN ist eine kubische Curve mit isolirtem Punkte in F. Der Ort des Höhenschnitts ist eine kubische Curve mit Doppelpunkt in F. Die Euler'sche Gerade von FPN geht durch F. Die dritte von Retali gestellte, von G. Cardoso-Laynes beantwortete Frage führt auf eine rationale cyklische kubische Curve. Lp.

Bonolis. Quistione 396. Periodico di Mat. **13**, 80-83.

Behandlung der Parabelschar, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $x^2 + 2hy(1 + \cos 2\alpha) - 2hx \sin 2\alpha = 0$ ist, bei veränder-

lichem a oder h; bekannt aus der Theorie des parabolischen Wurfes im luftleeren Raume. Ableitung der Eigenschaften durch G. Cardoso-Laynes ohne diesen Hinweis. Lp.

G. Cardoso-Laynes. Un teorema analogo a quello di Simson. Periodico di Mat. **13**, 101-103.

Der Ort derjenigen Punkte in der Ebene eines Parallelogramms, deren Orthogonalprojectionen auf die vier Seiten desselben die Ecken eines Kreisvierecks bilden, ist die dem Parallelogramme umbeschriebene gleichseitige Hyperbel. Lp.

E. Piccioli. Quistione 402. Periodico di Mat. **13**, 122-123.

Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie fest liegt, und dessen der Grundlinie anliegende Winkel sich um einen constanten Winkel unterscheiden, ist eine gleichseitige Hyperbel. Beweise von G. Cardoso-Laynes und von R. Bettazzi. Lp.

H. Brocard. Propriétés des cercles de Chasles. Étude bibliographique. Mathesis (2) **8**, 61-66.

Nachtrag zu der Arbeit von Barisien in Mathesis (2) **5** und **6** (F. d. M. **26**, 674, 1895 u. **27**, 484, 1896). Mn. (Lp.)

L. Crawford. The trisection of a given angle. Edinb. M. S. Proc. **16**, 42-45.

Eine analytische Erörterung der Bestimmung eines Kegelschnittes, von dem drei Schnittpunkte mit einem Kreise die Trisection eines Bogens bewirken. Gbs. (Lp.)

T. Bonnesen. Systemer af Keglesnit som har dobbelt Röring med to faste Keglesnit. Nyt Tidss. for Math. **9** B, 25-36.

Ueber Systeme von Kegelschnitten, welche zwei gegebene feste Kegelschnitte zweifach berühren. Der Verf. beweist mittels eines rein analytischen Verfahrens eine Reihe von Sätzen, die meistens von Steiner und Chasles herrühren. V.

E. O. Lovett. Point transformations in elliptic coordinates of circles having double contact with a conic. American J. **20**, 242-244.

Es giebt zwei Scharen von Kreisen, die einen Kegelschnitt $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ doppelt berühren. Die Differentialgleichung der einen Schar, deren Berührungssehnen die Gleichung $x-x_1=0$ er-

füllen, lautet in den elliptischen Coordinaten μ, ν:

$$\frac{d\mu}{\sqrt{a^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{a^2-\nu^2}} = 0;$$

aus ihr ergiebt sich nach bekannten Methoden als allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe, welche dieses Kreissystem invariant lässt:

$$Uf \equiv e^{\pm F(\mu,\nu)} \frac{\partial f}{\partial \mu} + e^{\pm F(\nu,\mu)} \frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad F(\mu,\nu) = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{a^2-\mu^2}} \arcsin\frac{\nu}{a},$$

wo $\varphi(\mu)$ eine willkürliche Function bezeichnet. Die dem zweiten Systeme entsprechende infinitesimale Transformation ist nicht angegeben.

Ot.

Cl. Sauve. Quadrangolo principale e conica principale. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **12,** 249-284.

Unter allen Kegelschnitten eines Büschels wird derjenige kleinster Excentricität gesucht (vergl. Steiner, ges. Werke **1,** 123-124), und es werden durch elementar-synthetische Betrachtungen die Beziehungen desselben zu der gleichseitigen Hyperbel, zu gewissen, durch die Sehnenmittelpunkte gehenden Kreisen, zum Kegelschnitt der neun Punkte allgemein aufgedeckt und in speciellen bemerkenswerten Fällen angewandt. Zum Schluss wird eine grosse Reihe von metrischen Relationen entwickelt, welche als Verallgemeinerungen der Sätze vom Kreisviereck angesehen werden können.

R. M.

Th. F. Holgate. A second locus connected with a system of coaxial circles. American M. S. Bull. (2) **5,** 135-143.

Die vom Verf. in Angriff genommene Aufgabe ist in F. d. M. **28,** 527, 1897 ausgesprochen worden. Zunächst wird jetzt der schon in der ersten Mitteilung behandelte Fall der Periode für $n=3$ unter einer etwas allgemeineren Annahme des ersten Strahles noch einmal durchgerechnet; hierbei wird besonders der Fall ausgearteter oder uneigentlicher Umläufe genauer untersucht.

Sodann geht die Betrachtung zu dem Falle einer Periode von vier Elementen über. Wenn der Kreisbüschel durch zwei reelle Punkte gelegt ist, so ist der gesuchte Ort für den Mittelpunkt P des Strahlenbüschels eine Curve vierter Ordnung:

$$\delta^4+2\delta^2x^2+x^4-2\delta^2y^2+2x^2y^2=0$$

mit einem Doppelpunkte im Unendlichen und zwei imaginären Doppelpunkten. Endlich werden auch für diesen Fall die ausgearteten Umläufe näher gekennzeichnet.

Lp.

Weitere Litteratur.

W. M. Baker. Examples in analytical conics for beginners. London: George Bell and Sons. 86 S. 8°. [Nature **58,** 318.]

E. Bally. Démonstration de quelques théorèmes relatifs aux coniques. Bull. math. spéc. **5**, 50-55, 69-72, 87-88.

P. Barbarin. Équation multilinéaire des coniques. Revue de math. spéc. **8**, 450-452.

E. N. Barisien. Exercices relatifs au cercle focal et aux cercles de Chasles de l'ellipse. Bull. math. spéc. **4**, 138-144.

E. N. Barisien. Exercices relatifs aux cercles principal et secondaire de l'ellipse. Bull. math. spéc. **4**, 117-120.

J. Fitte. Sur les coniques orthogonales à une conique donnée et sur les quadriques orthogonales à une quadrique donnée. Bull. math. spéc. **5**, 36-37.

L. Gérard. Triangles inscrits à une conique et conjugués par rapport à une autre conique. Bull. math. spéc. **5**, 33-34.

L. Gérard. Sur le théorème de Poncelet. Bull. math. spéc. **5**, 72-76.

V. Hübner. Bestimmung der Dimension von Kegelschnitten auf einem Rotationskegel. Časopis **27**, 47-56. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

Ch. Michel. Sur les coniques doublement tangentes à deux coniques données. Bull. math. spéc. **5**, 81-86.

M. d'Ocagne. Sur la condition pour que trois cercles passent par un même point. Revue de math. spéc. **8**, 509.

J. Paoli. Sur le théorème de Joachimsthal. Revue de math. spéc. **8**, 482-483.

J. Ploner. Die Einheit der Kegelschnitte. Pr. Bozen: A. Auer & Co.

J. Neuberg et P. Mansion. Rapport sur le Mémoire de M. G. Teixeira intitulé: Sur les courbes parallèles à l'ellipse. Belg. Bull. (3) **35**, 779-780.

D. Andere specielle Curven.

P. P. Grave. Ueber die Construction der Curven dritter Ordnung. Kasan. 400 S. 8°. (Aus: Kasan Univ. 1898 No. 3, 121-152; No. 4, 63-96; No. 5-6, 1-32; No. 7-8, 63-136; No. 9, 51-112; No. 10, 1-42; No. 11, 1-64; 1899 No. 2, 1-64. Russisch.)

Analytisch-geometrische Untersuchung. Im ersten Teile (Kap. I-IV, S. 1-120) wird das Verhältnis der Curve dritter Ordnung zur unendlich fernen Geraden genau discutirt. Die daraus entspringende Einteilung stimmt also mit den Haupttypen der Newton-Cayley'schen Einteilung. Zuerst wird die angenäherte Darstellung der Curve benutzt (vergl. Reuschle, „Praxis der Curvendiscussion in Punktcoordinaten"). Es folgen dann Methoden zur genauen Construction. Kap. V (S. 121-179) giebt „analytische" Methoden. Nach einander werden unicursale Curven dritter Ordnung, centrische Curven, endlich die durch den Coordinaten-

anfang hindurchgehenden Curven betrachtet, deren Construction auf die zweier unicursalen Curven dritter Ordnung zurückgeführt wird. Kap. VI u. VII besprechen „geometrische" Methoden; Kap. VI erörtert die Construction der unicursalen, centrischen und diametralen Curven dritter Ordnung (bezw. mittels der Formeln: $r = r_1^2/r_2$, $r = \sqrt{r_1 r_2}$, $y = \sqrt{y_1 y_2}$). Methode von Newton, Beweis seines Satzes. Schröter'sche Construction. Methoden von Binder, Stiner, Dingeldey und d'Ocagne. Kap. VII giebt dann allgemeine Methoden zur geometrischen Construction, bei deren Anwendung auf specielle Curven weitere Vereinfachungen vorkommen. Es ist der Hauptteil der Arbeit. Besonders einfach ist die im letzten § 7 (S. 391-400) gegebene (angeblich neue) Methode der Construction der unicursalen Curve dritter Ordnung. Als Hülfskegelschnitt S wird hier ein Kreis angenommen. Die Gleichung der Curve wird $S.R + P.Q.T = 0$ ($T = 0$ ist die Tangente des Kegelschnitts $S = 0$ im singulären Punkte der Curve dritter Ordnung), und zur Construction braucht man nur Kreise und Gerade. — Die Litteraturnachweise sind zu karg. Es fehlen zum Beispiel die Namen Grassmann und Möbius. Auch die Monographien von Schröter und Durège wurden, wie es scheint, nicht benutzt. Si.

F. Schottky. Ueber die neun Schnittpunkte zweier ebenen Curven dritter Ordnung. J. für Math. **119**, 72-81.

Zu den Gruppen von Punkten, deren Betrachtung für die Geometrie der Ebene und des Raumes, aber auch für das Verständnis der zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen von Wichtigkeit ist, gehört diejenige, welche von den Schnittpunkten zweier ebenen Curven dritter Ordnung gebildet wird. Der Verf. stellt für diese Gruppe die multiplicativen Beziehungen auf, die zwischen bestimmten, aus den Coordinaten der einzelnen Punkte gebildeten Determinantenausdrücken bestehen, und zwar: der linearen Determinante $f_{\alpha\beta\gamma}$, deren Verschwinden ausdrückt, dass die drei Punkte α, β, γ in gerader Linie liegen; der quadratischen $g_{\alpha\beta\gamma}$, welche Null wird, wenn die sechs von α, β, γ verschiedenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen; und der kubischen $h_{\alpha\beta}$, welche, gleich 0 gesetzt, die Bedingung darstellt, dass eine Curve dritten Grades existirt, die durch alle acht von β verschiedenen Punkte hindurchgeht, in α aber einen Doppelpunkt besitzt.

Die Aufstellung der genannten multiplicativen Beziehungen führt zur Lösung von zwei Aufgaben: 1. die Coordinaten eines der neun Schnittpunkte durch die der übrigen acht auszudrücken; 2. wenn in einer Ebene sieben Punkte und eine gerade Linie gegeben sind, diejenigen beiden Punkte der Geraden zu bestimmen, welche die sieben gegebenen zu einem vollen Schnittpunktsystem zweier Curven dritter Ordnung ergänzen. Bei der Lösung der zweiten Aufgabe tritt der Zusammenhang mit der Arbeit von Frobenius: „Ueber die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung" (J. für Math. **99**) noch mehr hervor als in den

vorhergehenden Partien der vorliegenden Abhandlung (vergl. das folgende Referat). Ot.

H. M. Taylor. On the intersections of two cubics. Lond. M. S. Proc. **29**, 265-273.

Der Verf. beschäftigt sich mit der Aufgabe, aus den Coordinaten von acht gegebenen Punkten die Coordinaten des neunten Punktes zu finden, durch den alle kubischen Curven der Schar gehen, welche jene acht Punkte als Basispunkte besitzt. Es ergiebt sich, dass die Coordinaten des neunten Punktes Functionen achten Grades in den Coordinaten jedes der anderen Punkte sind. Wenn sieben der Grundpunkte gegeben sind, der achte aber eine Gerade durchläuft, so ist der Ort des neunten eine Curve achter Ordnung mit einem dreifachen Punkte in jedem der gegebenen sieben Punkte. Geht die Gerade, auf welcher der achte Punkt sich bewegt, durch einen oder durch zwei von den gegebenen sieben Punkten, so zerfällt der Ort des neunten Punktes und enthält bezw. eine oder zwei kubische Curven mit Doppelpunkten in den Grundpunkten, durch welche die Gerade geht, als Bestandteile. Liegt der achte Punkt auf einem Kegelschnitte, so ist der Ort des neunten Punktes eine Curve sechzehnter Ordnung mit einem sechsfachen Punkte in jedem der sieben Grundpunkte. Wenn der Kegelschnitt, auf dem der achte Punkt liegt, durch 1, 2, 3, 4 oder 5 der Basispunkte geht, so zerfällt der Ort des neunten Punktes und enthält bezw. 1, 2, 3, 4 oder 5 kubische Curven mit Doppelpunkten in den Basispunkten, durch welche der Kegelschnitt geht (vergl. das vorangehende Referat).
Lp.

E. Ciani. Le bitangenti della quartica piana studiate mediante i configurazioni di Kummer. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 312-324.

Vorläufige Mitteilung der Resultate einer demnächst erscheinenden ausführlichen Arbeit. Sfs.

F. Morley. On the Poncelet polygons of a limaçon. London M. S. Proc. **29**, 83-97.

Die Existenz Poncelet'scher Polygone für eigentliche Curven vierter Ordnung und Klasse ist von Roberts nachgewiesen worden. Der Verf. ergänzt dessen Untersuchungen durch eine vollständige Behandlung des Falles der Schneckencurve, deren Gleichungen in der Form $x = 2at + t^2$, $y = 2a/t + 1/t^2$ geschrieben werden können. Als Hülfsmittel dient ihm die durch elliptische Functionen vermittelte conforme Abbildung der Curve auf ein Rechteck, welche ohne Schwierigkeit diejenigen Werte des Parameters a liefert, für welche Poncelet'sche Polygone möglich sind. Die Zahlen für das 5-, 6-, 7-, 8- und 10-Eck werden unter Trennung der Fälle $a < 1$ und $1 < a < 2$ ausführlich hergeleitet. Dem Sechseck entspricht der Wert $a = \frac{1}{2}$, die Curve ist die Winkeltrisecirende $r = \cos\frac{1}{3}\theta$; die Berührungspunkte gegenüberliegender

Seiten liegen mit dem äusseren Scheitel der Curve in gerader Linie, die Tangenten in gegenüberliegenden Eckpunkten schneiden sich und die Tangente des inneren Scheitels in einem einzigen Punkte. Ot.

J. Friedrich. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Cassini'schen Curven. Časopis **27**, 96-100. (Böhmisch.)

Aufstellung und Beweis des Satzes: Schneidet man ein System von coaxialen Cassini'schen Curven durch eine ihren Mittelpunkt enthaltende Gerade, so liegen die Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Schnittpunkte auf einer durch diesen Mittelpunkt gehenden Geraden, welche von den Constanten der Cassini'schen Curven unabhängig ist.

Dieser Satz wird zur Construction des Krümmungsmittelpunktes einer Cassini'schen Curve angewandt. Sda.

K. Zahradnik. Zur Theorie der Lemniskate. Hoppe Arch. (2) **16**, 327-332.

Die Lemniskate bietet ganz besonders reichen Untersuchungsstoff durch die Tripel von Krümmungskreisen (einer immer reell, die beiden andern imaginär), die durch jeden Punkt der Curve gehen. Diese sind im Gegenwärtigen zur Bearbeitung gewählt. Ihre drei Osculationspunkte bilden ein Dreieck, dessen Schwerpunkt und dessen Umkreis berechnet werden. Auch ergiebt sich die Eigenschaft, dass die Tangenten der Lemniskate in den drei Osculationspunkten sich in einem Punkte schneiden. H.

C. C. Engberg. On the triple focus of a cartesian. Annals of Math. **12**, 54-56.

Nach dem von Salmon angegebenen Gesetze über die Verteilung der Brennpunkte einer Curve, welche die beiden unendlich fernen Kreispunkte zu Spitzen hat, sollten die cartesischen Ovale einen neunfachen, sechs dreifache und neun einfache Brennpunkte haben; Verf. aber zählt einen vierfachen, acht doppelte und 16 einfache, weil die Tangenten in den Spitzen nicht als dreifache Tangenten im gewöhnlichen Sinne aufzufassen seien. R. M.

Matz. Question 12543. Ed. Times **68**, 101-102.

Die Curve $y^4 - x^4 + 100a^2x^2 - 96a^2y^2 = 0$ rotirt um die x-Axe; die ihr angehörende Schleife erzeugt dabei ein Volumen, das sich durch die Differenz eines elliptischen Integrales zweiter Gattung und eines erster Gattung ausdrückt. Berechnet durch J. M. Colaw. Lp.

W. Gutjahr. Die Diakaustik des Kreises. Pr. (No. 64) Sophien-Gymn. Berlin. 28 S. 4°. Mit 2 Taf.

Die Coordinaten der Diakaustik und ihre Differentialquotienten wer-

den in einer Form dargestellt, welche gestattet, die gestaltlichen Veränderungen der vier Curvenzweige zu untersuchen, wenn der leuchtende Punkt von ∞ bis zum Mittelpunkte des Kreises vorrückt. R. M.

A. Kempe. Sur les courbes sectrices. Liége Mém. **20**, 14 S.

Teilung eines Winkels in 2^n+1, 2^n-1 oder allgemein in $2p+1$ gleiche Teile mit Hülfe gewisser Curven. Mn. (Lp.)

T. Cifarelli. Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza. Batt. G. **36**, 183-184.

Es ist dies eine Notiz, die sich auf solche Curven bezieht, die durch Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kettenlinie:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

entstehen. Während bei der gewöhnlichen Kettenlinie für den Krümmungsradius ϱ die Gleichung: $\varrho = y^2/a$ und $y^2 = s^2+a^2$ besteht, hat man bei den hier betrachteten Curven $\varrho = a/(k-1)^2+s^2/a$; sie gehen also für $k=2$ in die gewöhnliche Kettenlinie über. Mz.

W. K. Palmer. A graphical method of constructing the catenary. Kansas Univ. Quart. **7**, 211-230.

Der Verf. trägt in diesem Aufsatz eine Methode vor, die Kettenlinie graphisch darzustellen. Zuerst leitet er die Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

nach mechanischen Principien ab, ohne mehr als das Elementarste vorauszusetzen; dann giebt er analytische Eigenschaften der Curve, ihre Quadratur; ihre Beziehung zur Tractrix; ferner, wie sie der Weg des Brennpunkts einer Parabel ist, die sich auf einer ihrer Tangenten wälzt.

Zur Construction der Curve dient die Bemerkung, dass ihre Ordinate y betrachtet werden kann als Summe von y' und y'', wobei:

$$y' = \frac{c}{2}\,e^{\frac{x}{c}}, \qquad y'' = \frac{c}{2}\,e^{-\frac{x}{c}}.$$

Diese Exponentialcurven werden mit Hülfe ihrer Eigenschaft construirt, eine constante Subtangente zu haben. Mz.

W. K. Palmer. The hyperbolic spiral. Kansas Univ. Quart. **7**, 155-172.

In diesem Aufsatze wird die hyperbolische Spirale behandelt, deren Gleichung in Polarcoordinaten: $r = c/\theta$, wo r der Radiusvector, θ der Winkel desselben gegen die Axe und c eine numerische Constante ist. Es wird die Construction der Curve gezeigt, indem sie zuerst zur

gewöhnlichen Hyperbel in Beziehung gesetzt wird, dann durch Berechnung ihrer Radien. Es wird hierauf ein Instrument angegeben, und zwar eine Platte von gleichförmig dünnem Metall oder Hartgummi etc., aus welcher eine hyperbolische Spirale von gegebener Constante (etwa $c = 100$) ausgeschnitten ist. Dann wird gezeigt, wie mancherlei mathematische Operationen mit diesem Instrument graphisch ausgeführt werden können, unter anderen: die Trisection, Multisection eines Winkels, Auffindung der Reciproken zu gegebenen Zahlen, Construction regulärer Polygone und Rectificationen. Mz.

A. Cabreira. Sobre a theoria dos logarithmos de ordem *n*. Lisboa Jorn. (2) **5.**

Beziehungen zwischen der logarithmischen und der Archimedischen Spirale. Tx. (Lp.)

L. Lecornu. Sur les développantes d'une développante de cercle. S. M. F. Bull. **26,** 85-86.

Unter allen Evolventen einer Kreisevolvente befindet sich eine einzige, deren Krümmungsradius in jedem Punkte gleich dem vom Kreismittelpunkte ausgehenden Radiusvector dieses Punktes ist. Schg.

C. W. Meyer. Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungscurven. Hoppe Arch. (2) **16,** 150-219.

Auf zwei ebenen rechtwinkligen Coordinatenaxen werden zwei Strecken $OM = m$ und $ON = n$ aufgetragen. Diese genügen der Relation $m^z + n^z = S$ bei constantem z und S. Es wird nun die einhüllende Curve der Geraden MN gesucht. Der Verf. nennt sie Begrenzungscurve und macht es sich in allem Folgenden zur Aufgabe, solcher Curven viele zu berechnen. H.

Weitere Litteratur.

F. Fricke. Ueber ebene Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte gehen. Jena. 33 S. 8°.

A. Naud. Sur la détermination du point double d'une cubique unicursale. Revue de math. spéc. **8,** 449-450.

P. Appell. Exercice sur la détermination du point double d'une cubique plane unicursale. Ibid. 505-506.

P. Appell. Exercices sur la détermination des points doubles d'une quartique plane unicursale. Revue de math. spéc. **8,** 585-589.

A. L. Hjelmman. Om plana kurver af fjärde ordningen med två dubbelpunter. Öfv. Finska Vetensk.-soc. Förh. **39,** 222-246 (1897).

E. N. Barisien. Sur deux courbes, généralisations du limaçon de Pascal. Bull. math. spéc. **5,** 77-79, 91-96.

V. Jung. Elementare Ableitung der Formel für die Quadratur der Curven $y = Cx^p$ für ein beliebiges reelles p. Časopis **27**, 246-254. (Böhmisch.) Sda.

E. N. Barisien. Au sujet de l'aire de deux courbes. Bull. math. spéc. **4**, 123-124.

E. Duporcq. Réponse. Ibid. 124-126.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

G. Ricci. Lezioni sulla teoria delle superficie. Verona-Padova: Drucker. Lithographirt. VIII + 416 S. gr. 8°.

Ricci, welcher seit vielen Jahren die Theorie der quadratischen Differentialausdrücke mit so grossem Erfolge studirt, hat sich jetzt nach den zahlreichen und bemerkenswerten Anwendungen derselben, welche bisher specielle Fragen der Differentialgeometrie betrafen, das Ziel gesteckt, in diesem Buche zu beweisen, dass man auf sie eine vollständige Behandlung der infinitesimalen Eigenschaften der Flächen bauen kann, und er verspricht für später eine analoge Behandlung der infinitesimalen Eigenschaften des gewöhnlichen Raumes. Sein Zweck ist durch den vorliegenden Band erreicht; derselbe wird in der italienischen mathematischen Litteratur an der Seite der Bücher von Bianchi und Cesàro einen Ehrenplatz finden. Folgendes ist eine Inhaltsübersicht:

Einleitung. Kap. I. Lineare homogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung; vollständige Systeme. II. Allgemeine Eigenschaften der quadratischen Differentialausdrücke. III. Absolute Differentialrechnung mit n Veränderlichen. IV. Klassification der quadratischen positiven Differentialausdrücke. V. Absolute Differentialinvarianten, welche einer Grundform und den associirten Systemen gemeinschaftlich sind. VI. Absolute Differentialrechnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Erster Teil. Eigenschaften der Fläche, als biegsame unausdehnbare Haut betrachtet. Kap. I. Coordinatensysteme auf einer beliebigen Fläche. II. Allgemeines über die durch Linien einer Fläche gebildeten Systeme. III. Allgemeine Betrachtungen über die Differentialinvarianten, welche man durch Associiren des Quadrats des linearen Elementes einer Fläche mit dem coordinirten System einer Congruenz von Linien und einer Fläche erhalten kann. IV. Congruenzen, welche man aus geodätischen oder parallelen Curven bilden kann. V. Isotherme Büschel und Systeme; conforme Abbildungen. VI. Ueber die Integration der Gleichung der geodätischen Congruenzen. VII. Liouville's isotherme Congruenzen.

Zweiter Teil. Theorie der als unbiegsames Gebilde betrachteten Fläche. I. Allgemeine Gleichungen der Flächentheorie. II. Krümmungslinien und asymptotische Curven. III. Die sphärische Abbildung. IV. Einige Flächenklassen. V. Evoluten und Weingarten'sche Fläche. VI. Fläche zweiter Ordnung. VII. Abwickelbarkeit der Fläche. La.

L. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisirte deutsche Uebersetzung von M. Lukat. In drei Lieferungen. Zweite Lieferung. Leipzig: B. G. Teubner. S. 337-528. 8⁰.

Wie bereits in F. d. M. **27**, 497, 1896 bemerkt worden ist, soll das ganze Werk nach Erscheinen der dritten Lieferung besprochen werden. St.

B. J. Bukrejew. Elemente der Flächentheorie. Vorlesungen, gehalten im Jahre 1897. Kiew Univ. No. 1, 9 u. 12, S. 1-80.

Bericht erfolgt im folgenden Bande des Jahrbuchs nach Abschluss der Arbeit. Si.

G. Darboux. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Tome I. Paris: Gauthier-Villars. VI + 338 S. 8⁰.

In fast unmittelbarem Anschluss an seine vortrefflichen Leçons sur la théorie générale des surfaces hat Darboux eine ausführliche Darstellung der Theorie der orthogonalen Flächensysteme und der allgemeinen krummlinigen Coordinaten gegeben, von der bis jetzt der erste Band, bestehend aus zwei Büchern mit je sechs Kapiteln, vorliegt. Wie alle Publicationen dieses hervorragenden Geometers zeichnet sich auch diese durch die elegante und scharfsinnige Darstellung aus und giebt in der Hauptsache eigene Originaluntersuchungen wieder, wenngleich das Eingehen auf die Arbeiten anderer Forscher auf den betreffenden Gebieten nirgends vermieden worden ist. Aber dieses Eingehen hat nie den Charakter der blossen Reproduction, sondern drückt dem Vorgetragenen stets den wertvollen Stempel der Darboux'schen Eigenart auf.

Das erste Kapitel des Werkes beschäftigt sich mit der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher jeder der drei Parameter der drei Familien eines orthogonalen Systems zu genügen hat, ein Satz, der zuerst von Darboux publicirt worden ist. Cayley war der erste, dem die Aufstellung dieser Gleichung in entwickelter Form gelang.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den orthogonalen Systemen, Lamé'sche Systeme genannt, welche eine Familie von Ebenen oder Kugeln enthalten. Es würde zu weit führen, Ausführliches über dieses schöne Kapitel mitzuteilen. Es sei nur bemerkt, dass die Aufstellung eines Orthogonalsystems, welchem eine gegebene Kugelschar angehört, die Integration einer allgemeinen Riccati'schen Gleichung mit complexen Coefficienten erfordert.

Das dritte Kapitel behandelt den Fall eines particularen Integrals von der ersten Ordnung der charakteristischen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung.

In dem vierten Kapitel werden in elegantester Weise die verschiedensten Formen dieser partiellen Differentialgleichung entwickelt.

Das fünfte Kapitel bespricht diejenigen Lamé'schen Systeme, deren eine Familie aus Flächen zweiten Grades gebildet wird, und ist von hohem geometrischen Interesse.

Das sechste Kapitel behandelt die orthogonalen Systeme von n Dimensionen, beziehungsweise von n Variabeln. Es enthält die bisher auf diesem Gebiete von Darboux erhaltenen ausgezeichneten Resultate, welche die Aufstellung der endlichen Gleichungen der Krümmungslinien einer grossen Zahl von Flächen dritten Grades ermöglichten. Auch dieses Kapitel ist von hervorragendem Interesse.

Das erste Kapitel des zweiten Buches dehnt die von Lamé in den Leçons sur les coordonnées curvilignes gegebenen Formeln auf Orthogonalsysteme von n Variabeln aus und giebt eine Reihe neuer umfangreicher Entwickelungen und Analogien, auf die näher einzugehen es einen bedeutenden Raum erfordern würde.

Das zweite Kapitel desselben Buches führt die Betrachtung des beweglichen Tetraeders ein, bei welchem die Bewegung von mehreren Parametern abhängt, und bringt die eingeführten Elemente in Beziehung zu dem ersten Differentialparameter einer beliebigen Function U und zu dem gemischten Differentialparameter zweier Functionen U und V. Es schliesst mit einer schönen Untersuchung über die Transformation quadratischer Differentialausdrücke.

Im dritten Kapitel folgt eine ausgezeichnete Untersuchung über dreifache Orthogonalsysteme, die gleichzeitig orthogonal und isotherm sind, welche Untersuchung im vierten Kapitel ihre Fortsetzung findet.

Auch im fünften Kapitel handelt es sich noch um isotherme Systeme, hauptsächlich um solche, für welche die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung unendlich viele particulare Integrale gegebener Form zulässt. Auch hier widersetzt sich der Reichtum der Entwickelungen einer auch nur andeutenden Wiedergabe ihres Inhalts.

Das sechste und letzte Kapitel behandelt die dreifachen Orthogonalsysteme Bianchi's, d. h. diejenigen Orthogonalsysteme, bei denen eine Familie aus Flächen von constanter positiver oder negativer Krümmung besteht. In Beziehung auf diese Bianchi'schen Systeme möge dem Referenten eine kurze Bemerkung gestattet sein. Der ausgezeichnete italienische Geometer hat diese Systeme mit dem Namen des Referenten bezeichnet. Diese Bezeichnung könnte den Eindruck hervorrufen, als ob Referent an der Entdeckung der in Rede stehenden Systeme irgend welches Verdienst hätte. Referent aber hat bei Gelegenheit der brieflichen Mitteilung der einfachen Bemerkung, die den Ausgangspunkt der Bianchi'schen Untersuchungen zu bilden scheint, ausdrücklich hervorgehoben, dass es ihm, trotzdem er diese Bemerkung schon vor Jahren gemacht habe, nicht gelungen sei, aus ihr irgend welche Vorteile zu

ziehen. Es können daher diese Systeme nur als Bianchi'sche Systeme, und nicht anders, bezeichnet werden. Die Ehre, die ihm sein Freund Bianchi angethan, erscheint dem Referenten als über die eigenen Verdienste weit hinausgehend.

Die Darstellung, welche Darboux von den Bianchi'schen Untersuchungen giebt, ist eine gedrängte und eigenartige, deren Lectüre auch in dieser Form von hohem Interesse ist. Mit diesen Untersuchungen schliesst der erste Band des hervorragenden Werkes ab, und von der Fortsetzung können wir weitere neue Bereicherungen der Wissenschaft erwarten. Wgt.

W. A. Anissimow. Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Warschau Univ. No. 3, 25 S. (Russisch.)

Eingehendere analytische Discussion der Formeln und der dadurch gewonnenen geometrischen Sätze, zum Teil von demselben Verf. in Mosk. Math. Samml. **12,** 42-49 (F. d. M. **17,** 745, 1885) gegeben. § 1. Allgemeine Formeln (als unabhängige Veränderliche wird der Bogen s angenommen). § 2. Hauptformeln bezüglich der Rückkehrkante (geometrischer Ort der Mittelpunkte der Krümmungskugeln). § 3. Hauptformeln bezüglich der Curve der Krümmungsmittelpunkte. § 4. Hauptformeln bezüglich der Evoluten [diese Curve wird erhalten, indem man der additiven Constante beim Integrale $\tau = \int_0^s ds/T$, wo T der Torsionsradius ist, einen bestimmten Wert zuschreibt; verschiedenen Werten dieser Constante entsprechen verschiedene Evoluten]. § 5. Abwickelung der Polarfläche und der auf ihr liegenden Curven auf die Ebene. § 6. Curven mit constantem Krümmungsradius. Si.

G. K. Suslow. Ueber die Krümmung der Raumcurven. Kiew Univ. No. 10, S. 1-4. (Russisch.)

Anwendung des Begriffs der geometrischen Ableitung eines veränderlichen Vectors zur Untersuchung der beiden Krümmungen einer Raumcurve. Si.

R. Hoppe. Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Curven und Flächen. Hoppe Arch. (2) **16,** 112.

Beweis einer Formel von Mangeot (S. M. F. Bull. **24,** 98; F. d. M. **27,** 501, 1896) über das Krümmungsverhältnis einer Curve und den nicht verschwindenden Hauptkrümmungsradius ihres Richtungskegels. Hsb.

Le Vavasseur. Sur les courbes sphériques à torsion constante. Toulouse Bull. **1,** 82-88.

Verf. beweist, dass es keine algebraischen Curven der im Titel

erwähnten Art giebt. Interessant ist das Auftreten der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Hsb.

A. Perna. L'immaginario i ed i numeri alternati i, j, k nello studio delle deformazioni infinitesime delle curve piane e delle curve storte. Palermo Rend. **12,** 322-325.

Mittels Einführung der imaginären Einheit i durch die Gleichungen $z = x + iy$, $\zeta = u + iv$ lassen sich die drei Fundamentalgleichungen für die infinitesimalen Deformationen der ebenen Curven durch eine einzige Gleichung ersetzen. Dasselbe findet für Curven doppelter Krümmung statt nach entsprechender Einführung der Grassmann'schen Einheiten (hier in Hamilton'scher Bezeichnung) i, j, k. Schg.

G. Pirondini. Projection orthogonale sur une surface de révolution. Nouv. Ann. (3) **17,** 246-266.

Eine Reihe von Formeln und kleineren Sätzen über das im Titel bezeichnete Thema, meistens auf specielle Curven und Rotationsflächen bezüglich. Wir heben folgenden Satz heraus (S. 256):

Von zwei Curven L und $\varLambda$ sei $\varLambda$ die orthogonale Projection von L auf die durch Rotation von $\varLambda$ um die z-Axe entstehende Fläche. Man leitet aus L und $\varLambda$ zwei neue Curven ab, indem man den Abstand jedes Punktes von der z-Axe um dasselbe constante Stück k vergrössert, ohne die Richtung und Höhe dieses Abstandes zu ändern. Zwischen den so transformirten Curven besteht dieselbe Beziehung wie vorher. Hsb.

A. Schönflies. Ueber eine neue geometrische Methode im Gebiet der Differentialgeometrie. Gött. Nachr. 1898, 71-79.

Untersuchung von Curven und Flächen auf Grund der relativen Bewegung Darboux'scher Trieder. Liegt z. B. auf einer Fläche $\varPhi$ eine Curve c, so erhält man 1. das Haupttrieder (Tangente, Haupt- und Binormale) der Curve, 2. das Flächentrieder längs der Curve (aus Tangente der Curve und Flächennormale), 3. das Haupttrieder der Rückkehrkante der $\varPhi$ längs c umbeschriebenen Developpabeln. Aus der Betrachtung der beiden letzteren fliesst eine ganze Reihe von Formeln, so das Meusnier'sche Theorem, die Liouville'sche Formel für die geodätische Krümmung u. a. Die Codazzi'schen Formeln für die Parameter der Krümmungslinien werden auf ähnliche Weise hergeleitet. Hsb.

K. Zorawski. Ueber einige Relationen in der Flächentheorie. Krak. Ber. **33,** 106-119. (Polnisch.)

Es sei $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche in cartesischen Coordinaten, R die Entfernung des Punktes (x, y, z) vom Coordinatenanfang, P die kürzeste Entfernung der Tangentialebene im Punkte (x, y, z)

von demselben, K die Gauss'sche Krümmung, M die mittlere Krümmung der Fläche, Θ der Winkel zwischen den Curven $R=$ const., $P=$ const. auf der Fläche, $R'=\frac{\delta R}{\delta n}$ $P'=\frac{\delta P}{\delta n}$ (δn bedeutet eine Verschiebung auf der Fläche in der Richtung, welche normal auf $R=$ const., resp. $P=$ const. ist), g die geodätische Krümmung der Curven $R=$ const.; dann finden zwischen den genannten Grössen folgende drei Relationen statt:

$$R^2R'^2=R^2-P^2,$$
$$P'^2+2M\cos\theta\,.\,P'\sqrt{R^2-P^2}+K(R^2-P^2)=0,$$
$$(R^2-P^2)g+(1+2\,PM)\sqrt{R^2-P^2}+PP'\cos\theta=0.$$

Es wird bewiesen, dass dies die einzigen identischen Relationen sind, welche die acht Grössen $R, P, K, M, \Theta, R', P', g$ verbinden. Der Verf. giebt diesen Relationen noch eine andere Form und interpretirt dieselben geometrisch. Dn.

P. Stäckel. Beiträge zur Flächentheorie. Leip. Ber. **50,** 1898, 3-20.

V. Eine Eigenschaft der Schraubenflächen.

Ihre Fundamentalformen gestatten dieselbe eingliedrige Gruppe von Transformationen in sich selbst. — Aus den in Beitrag III bestimmten Fundamentalformen derjenigen Flächen, die durch ihre Asymptotenlinien in Rauten mit constantem Winkel $\vartheta \gtreqless \frac{1}{2}\pi$ geteilt werden, ergiebt sich, dass es Rotationsflächen sind. Ist $\cot^2\frac{1}{2}\vartheta$ ganz, bezw. gebrochen rational, so lässt sich die Fläche durch elliptische, bezw. hyperelliptische Integrale darstellen.

VI. Zur Theorie der Spiralflächen.

Die invarianten Flächen bei der Combination einer infinitesimalen Drehung mit einer infinitesimalen Aehnlichkeitstransformation. Ihre Gleichung ist in Cylindercoordinaten z, r, ϑ:

$$\frac{z}{r}=\Omega(re^{-k\vartheta}).$$

Die Fläche ist reell, wenn Ω eine reelle Constante oder k eine reelle Constante und Ω eine reelle Function ihres Argumentes ist. $\Omega=$ const. giebt den trivialen Kreiskegel, der, wie leicht zu sehen, die einzige algebraische Spiralfläche ist. Hsb.

C. Burali-Forti. Sopra alcune questioni di geometria differenziale. Palermo Rend. **12,** 111-132.

Herleitung der Hauptsätze aus der Theorie der Flächen und Congruenzen auf Grund der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Die Kenntnis der Grassmann'schen Methode und Beziehungsweise ist beim Leser vorausgesetzt. Hsb.

L. Raffy. Détermination d'une surface par ses deux formes quadratiques fondamentales. C. R. **126**, 1852-1854.

Verf. bestimmt das Linienelement der Gauss'schen Kugel, daraus die Cosinus der Normale, was in bekannter Weise auf Riccati'sche Gleichungen führt. Aus den Cosinus ergeben sich die Coordinaten der Fläche durch Quadraturen. Das Verfahren ist in keiner Beziehung neu. Es findet sich vor allem in der Festschrift der technischen Hochschule (Berlin, 1884) von Weingarten entwickelt.

Verf. bemerkt am Schlusse noch, dass ein Satz von Darboux (No. 52 der Leçons), dass die Abwickelung von Flächen constanter Krümmung, deren Nulllinien bekannt sind, ohne Integration ausführbar ist, von Wangerin (Festschrift der Universität Halle-Wittenberg, 1894) übersehen worden sei. Hsb.

E. Goursat. Sur les équations d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle. S. M. F. Bull. **26**, 83-84.

Die von Cosserat (C. R. **125**, 159; F. d. M. **28**, 543, 1897) angegebenen Formeln zur Darstellung der Coordinaten eines Punktes einer Fläche, die auf ihre Linien von der Länge Null bezogen ist, werden auf eine noch mehr symmetrische Form gebracht. Schg.

J. G. Hardy. On Darboux lines on surfaces. American J. **20**, 283-292.

Darboux-Linien (D-Linien nach Cosserat) einer Fläche sind solche Linien, deren Schmiegungskugel die Fläche berührt. Nach Angabe der Litteratur über diesen Gegenstand beweist Verf.: Eine D-Linie, die geodätisch ist, besitzt constante erste Krümmung. Bei der Umkehrung kann die Linie auch eben statt dessen geodätisch sein. Verf. untersucht dann die D-Linien des Ellipsoids. Das Product aus dem Radius der Osculationskugel und dem Centrumsabstand der Tangentialebene ist constant. Der der Tangente einer D-Linie parallele Durchmesser hat constante Länge. Hsb.

A. G. Webster. Note on Stokes's theorem in curvilinear coordinates. American M. S. Bull. (2) **4**, 438-441.

„Der Ausdruck für den Quirl (curl) einer Vector-Punktfunction wird, wenn man sie in orthogonalen krummlinigen Coordinaten ausgedrückt braucht, gewöhnlich durch directe Transformation aus ihren Werten in rechtwinkligen Coordinaten erhalten. Der in meinen Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus gegebene, von Helmholtz herrührende Beweis des Stokes'schen Theorems kann leicht für krummlinige Coordinaten passend gemacht werden, so dass er das Theorem ergiebt, unabhängig von rechtwinkligen Coordinaten." Lp.

W. Arvay. Bestimmung einiger Grenzgrössen in der Flächentheorie. Prace mat.-fiz. **9,** 164-169. (Polnisch.)

Es werden auf der Fläche geometrisch zwei Grenzgrössen definirt, deren analytische Ausdrücke die folgenden sind:

$$G_1 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}, \quad G_2 = \tfrac{1}{2} + \frac{2\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + \varrho_2)^2},$$

ϱ_1 und ϱ_2 sind die beiden Hauptkrümmungsradien im betrachteten Punkte der Fläche. Dn.

S. Lie. Zur Geometrie einer Monge'schen Gleichung. Leipz. Ber. **50,** 1898, 1-2.

Lie zeigt, dass der Satz von Meusnier auf die Integralcurven einer beliebigen Monge'schen Gleichung $f(x, y, z, dx{:}dy{:}dz) = 0$ übertragen werden kann. Denkt man sich nämlich alle Integralcurven einer solchen Gleichung, die einen Punkt und in diesem Punkte die Tangente gemein haben, so liegen die zu diesem Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte der betreffenden Integralcurven auf einem Kreise. Eine Ausnahme bildet natürlich die Gleichung: $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ der Minimalcurven. Definirt die Monge'sche Gleichung einen Complex von geraden Linien, der nicht aus Minimalcurven besteht, so ist der Ort jener Krümmungsmittelpunkte eine Gerade. El.

A. Demoulin. Sur la transformation de M. Lie et les surfaces enveloppes de sphères. Darboux Bull. (2) **22,** 174-177.

Lie's berühmte Berührungstransformation verwandelt, wie der Verf. bemerkt, vier einer Geraden angehörige Flächenelemente, deren Punkte dasselbe Doppelverhältnis haben wie die Ebenen, in vier auf einer Kugel gelegene Elemente, deren Punkte auf einem Kreise liegen und wieder dasselbe Doppelverhältnis haben. Der Verf. bemerkt das, um zu zeigen, dass zwei bekannte Sätze über die Haupttangentencurven geradliniger Flächen und über die Krümmungslinien der von ∞^1 Kugeln umhüllten Flächen vermöge jener Berührungstransformation aus einander folgen. El.

J. Hadamard. Sur le billard non-euclidien. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 147-149.

Unter dem obigen Titel sucht der Verf. zur Vervollständigung der von ihm früher gewonnenen Ergebnisse über die Geodätischen der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten besondere Beispiele, in denen die Integration ausführbar wird. „Die nicht continuirliche perfecte Menge, die von Poincaré in der Theorie der Fuchs'schen Gruppen gefunden ist, reiht sich als besonderer Fall in diejenige ein, die ich beim Studium der Geodätischen auf den Oberflächen mit entgegengesetzten Krümmungen gefunden haben“ (vergl. S. 416 dieses Bandes). Lp.

J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Journ. de Math. (5) **4,** 27-73.

Der Verf. hat bereits in einer früheren Arbeit (C. R. **124,** 1503-1505; Journ. de Math. (5) **3,** 331-387; F. d. M. **28,** 540 u. 643, 1897) über die geodätischen Linien allgemeine Untersuchungen angestellt und die Frage nach der Gestalt derselben für Flächen von durchweg positiver Krümmung erledigt. Nunmehr werden Flächen von überall negativer Krümmung behandelt, unter Ausschluss derjenigen mit gar keinen oder unendlich vielen ins Unendliche laufenden Schalen. Nachdem in Kap. I die allgemeine Gestalt dieser Flächen betrachtet ist, werden in Kap. II topologische Untersuchungen über die verschiedenen Arten des Zusammenhangs und die wesentlich verschiedenen geschlossenen Konturen auf denselben angestellt. Kap. III: Géodésiques fermées: Zu jedem irreduciblen Typus geschlossener Konture giebt es eine und nur eine geschlossene geodätische Linie. Ausgeschlossen sind die Konture auf „nappes non évasées“, röhrenförmigen, ins Unendliche verlaufenden Teilen, wie sie sich an der Rotationsfläche der Tractrix finden. Auf solchen Teilen giebt es keine geschlossene geodätische Linie. Der Fall wird im Folgenden ausgeschlossen. Kap. IV. Géodésiques asymptotiques, bekannt von den Flächen constanter negativer Krümmung her. Es werden die bekannten Parallelensätze der nicht-euklidischen Geometrie für diese Linien nachgewiesen, wie: „Sind zwei geodätische Linien zu einer dritten asymptotisch, so sind sie es auch zu einander“. Kap. V. Géodésiques qui s'éloignent à l'infini. Jede ins Unendliche laufende Schale (röhrenförmige sind ausgeschlossen) lässt sich durch eine geschlossene geodätische Linie abgrenzen. Bei mehr als zweifachem Zusammenhang bleibt ein im Endlichen gelegenes Stück der Fläche übrig, welches von den geschlossenen geodätischen Linien begrenzt wird. Durchschneidet eine geodätische Linie diese Begrenzung, so läuft sie auf der Schale, in die sie dabei eintritt, ins Unendliche. Schneidet eine auf dem endlichen Stück liegende geodätische Linie den Kontur nicht, so ist sie entweder asymptotisch zu diesem, oder sie ist eine „géodésique de troisième catégorie“ (Kap. IV), die sich selbst beliebig oft beliebig nahe kommt, ohne sich zu schliessen. Sie ist mit beliebiger Annäherung geschlossen. Sie bietet darin ein Analogon zu den von Poincaré studirten Bewegungen, die mit beliebiger Annäherung periodisch sind.

Die Untersuchungsmethode des Verf. ist rein geometrischer, teilweise topologischer Natur. Formeln werden fast nicht gebraucht, Rechnungen gänzlich vermieden. Dies erleichtert das Verständnis der Arbeit wesentlich, lässt aber ein leichtes Misstrauen gegen die Allgemeingültigkeit der Resultate zurück (trotz der Sorgfalt, mit der alle Voraussetzungen angegeben sind), eine Eigentümlichkeit, die wohl allen rein geometrischen Untersuchungen zukommt und auf das allgemeine Misstrauen gegen die Anschauung zurückgeht (vergl. auch S. 416 dieses Bandes). Hsb.

J. Hadamard. Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 55-58.

In den Leçons sur la théorie des surfaces hat Darboux die Bestimmung der geodätischen Linien für Linienelemente von der Form $ds^2 = V . d\sigma^2$ untersucht, wo $d\sigma^2$ das Linienelement einer Ebene darstellt, V eine Function der Coordinaten dieser Ebene von der Art ist, dass die Linien $V =$ const. gerade Linien sind (im allgemeinen die Tangenten einer bestimmten Curve). Der Verf. zeigt, dass man dieses Problem nach einer von der Darboux'schen Behandlung ganz verschiedenen Methode auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann, und giebt einige Fälle an, in denen die Lösung sich auf Quadraturen bringen lässt. Lp.

J. J. Beliankin. Grundlagen der Lehre über die Abwickelung der Flächen. Flächen constanter Krümmung. Kiew Univ. 1898, No. 1, 3; auch sep. Kiew. II + 129 S. (Russisch.)

Kapitel I. Gauss'sche Coordinaten eines Punktes auf der Fläche. Differentialparameter. Geodätische Linie und geodätische Krümmung. Linienelemente einfacher Flächentypen. Kapitel II. Abwickelung der Flächen auf einander. Allgemeine geometrische Eigenschaften. Flächen constanter Krümmung. Kapitel III. Trigonometrie auf den Flächen constanter Krümmung. Eine Schlussnote ist der nicht-euklidischen Geometrie gewidmet. Si.

Geo. F. Metzler. Surfaces of rotation with constant measure of curvature and their representation on the hyperbolic (Cayley's) plane. American J. **20,** 76-86.

Die bekannte Formel, welche den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien auf einer Rotationsfläche constanten negativen Krümmungsmasses sind, durch die Winkel und das constante Krümmungsmass ausdrückt, wird vermittelst rechtwinkliger und polarer Coordinaten einfach hergeleitet. Es folgen dann eine Betrachtung der Lage der geodätischen Linien auf diesen Flächen, vorzüglich auf der Fläche, welche durch Rotation der Tractrixcurve entsteht, sowie die Besprechung der Abbildung der oberen Hälfte dieser zuletzt erwähnten besonderen Rotationsfläche constanten negativen Krümmungsmasses auf die hyperbolische Ebene. Ly.

M. Stuyvaert. Sur la courbure des lignes et des surfaces. Belg. Mém. Cour in 8° **55,** 19 S.

J. Neuberg. Rapport. Belg. Bull. (3) **33,** 276-277.

Beweis und systematische Anwendungen des folgenden Lehrsatzes: Zur Erforschung der Krümmung einer Linie oder einer Oberfläche kann

man die Curve oder die Oberfläche durch eine osculirende Curve oder Oberfläche ersetzen. Folgende zwei Sätze sind z. B. durch den Verf. aufgestellt: 1. Die Krümmung in einem Punkte einer algebraischen Oberfläche n^{ter} Ordnung ist gleich der Krümmung der polaren Fläche zweiter Ordnung dieses Punktes in ihm, multiplicirt mit dem Factor $(n-1)^2$. 2. Die mittlere Krümmung in einem Punkte der Oberfläche ist gleich dem n-fachen der mittleren Krümmung der polaren Fläche zweiter Ordnung. Mn. (Lp.)

A. R. Forsyth. Note on surfaces whose radii of curvature are equal and of the same sign. Messenger (2) **27**, 129-137.

Monge giebt eine Discussion der Oberflächen, deren Krümmungsradien gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Die für solche Oberflächen charakteristische Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\}^2 = 4(rt-s^2)(1+p^2+q^2);$$

dieselbe wird nach einem Verfahren integrirt, das von der Monge'schen Integrationsmethode abweicht. Lp.

C. Guichard. Sur les surfaces à courbure totale constante. C. R. **126**, 1556-1558, 1616-1618.

Verf. untersucht diejenigen Netze, deren sphärische Abbildung zugleich die der Krümmungslinien einer Fläche constanter Totalkrümmung ist. Es ergiebt sich eine neue Transformation dieser Flächen sowie eine Reihe von Klassen auf einander abwickelbarer Flächen, deren Bestimmung derjenigen der Flächen constanter Totalkrümmung äquivalent ist. Einfach genug, um hier angeführt zu werden, sind darunter die Klassen der auf das Rotations-Ellipsoid, bezw. -Hyperboloid abwickelbaren Flächen. Hsb.

C. Guichard. Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. (Suite.) Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15**, 179-227.

Fortsetzung der in F. d. M. **28**, 589 (1897) besprochenen Arbeit. Die auf S. 590ff. ebenda besprochenen Notizen des Verf. enthalten zum Teil bereits die Resultate der nunmehr erschienenen Fortsetzung.

Netze heissen abwickelbar, wenn sie dasselbe Linienelement besitzen. Je nachdem dies eine der speciellen Formen 0, dy^2 und $dy_1^2+dy_2^2$ besitzt, heisst es speciell ein Null-, Halbnull- und hypercyklisches (H. C.) Netz. (Réseau nul, semi-nul, hypercyclique). Null-Netze giebt es erst im Raume von sechs Dimensionen, daher Halbnullnetze erst bei fünf, hypercyklische bei vier Dimensionen. Es wird die Construction dieser drei Arten von Netzen gelehrt. Ferner sind alle zu einer H. O.-Congruenz harmonischen Netze von einer dieser drei Arten. Zum Beweis dient der Satz: „Jede Gerade einer Congruenz trifft eine

„Hypersphäre“ in zwei Punkten A, B. Beschreibt A ein Netz, so thut es B auch.“

Bei Betrachtung der cyklischen Netze (die sich auf Netze im dreidimensionalen Raume abwickeln lassen), wird bewiesen: „Notwendig und hinreichend dafür, dass ein Netz cyklisch sei, ist, dass die Quadratsumme seiner Richtungsparameter sich auf die Form $h^2 f(u)+l^2\varphi(v)$ bringen lässt.“

K-Netze und K-Congruenzen nennt der Verf. solche Netze und Congruenzen, die zu C-Congruenzen und C-Netzen conjugirt sind.

Im Kapitel III folgen analoge Untersuchungen über p-O, p-C und p-K Netze und Congruenzen. Die Definitionen sind bereits in F. d. M. **28,** 591 mitgeteilt, desgleichen die Fassungen des verallgemeinerten Bonnet'schen und Ribaucour'schen Problems, deren Behandlung die Fortsetzung der Arbeit gewidmet sein soll. Hsb.

C. F. Geiser. Zur Theorie der tripelorthogonalen Flächensysteme. Zürich. Naturf. Ges. **43,** 317-326.

C. F. Geiser. Sur la théorie des systèmes triples orthogonaux. Arch. sc. phys. (4) **6,** 363-364.

Soll eine Flächenschar $u(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$, wo x_1, x_2, x_3 cartesische Raumcoordinaten sind, einem dreifach orthogonalen System angehören, so muss u einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen. Zu deren Herleitung ist ein umständliches Eliminationsverfahren notwendig, welches Verf. durch geometrische Interpretation in homogenen Dreieckscoordinaten vereinfacht. Hsb.

C. Tzitzéica. Sur les systèmes orthogonaux. C. R. **127,** 856-857.

Verf. klassificirt die dreifach conjugirten Systeme, die sich in conjugirten Curvensystemen schneiden; er nennt ein solches System Ω_i, wenn die Laplace'sche Gleichung, der die Coordinaten x, y, z genügen, noch i weitere Lösungen R_λ besitzt, so dass $x^2+y^2+z^2-\Sigma R_\lambda^2$ auch ein Integral der Gleichung ist. Für $i=0$ erhält man die orthogonalen Systeme. Im allgemeinen ist $i=2$. Hsb.

M. Fouché. Sur les systèmes des surfaces triplement orthogonales où les surfaces d'une même famille admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. C. R. **126,** 210-213.

Wenn in einem dreifach orthogonalen System die Krümmungslinien der Flächen einer Schar dasselbe sphärische Normalenbild haben, so gilt das Gleiche von den Flächen der beiden anderen Scharen. Die übrigen Sätze über derartige Systeme sind nicht einfach genug, um sie hier anzuführen. Eine ausführliche Abhandlung ist in Aussicht gestellt. Hsb.

K. Carda. Zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung. Wien. Ber. **107**, 44-61.

Eine Uebertragung des Verfahrens, welches H. A. Schwarz zum Beweise des Satzes über das Minimum des Umfangs beim Höhenfusspunktendreieck angewandt hat, auf Flächen constanter Krümmung. In dem Schwarz'schen Beweise wird der als gerade Linie umgeklappte Umfang des Höhenfusspunktendreiecks mit dem eines beliebigen eingeschriebenen Dreiecks durch Parallelverschiebung verglichen. Die Parallelverschiebung muss bei Flächen nicht verschwindender Krümmung durch ein anderes Verfahren ersetzt werden. Verf. wickelt das Dreieck auf eine Rotationsfläche constanter Krümmung ab, so dass eine Seite des Höhenfusspunktendreiecks auf einen grössten, bezw. kleinsten Parallelkreis fällt. Der Parameter der Fläche wird so bestimmt, dass nach einer endlichen Zahl von Umklappungen das Dreieck in seine frühere Lage zurückkehrt, worauf sich sofort das Minimum nachweisen lässt. — Verf. betrachtet auch geodätische Kreis- und Kreisringsectoren mit eingeschriebenen Minimumsdrei- und Vierecken. Hier wird die Parallelverschiebung durch Drehung ersetzt, wodurch man mit zwei Umklappungen ausreicht. Das Verfahren ist sehr elegant. Hsb.

J. Weingarten. Note zur Theorie der Deformation der Flächen. Acta Math. **22**, 193-199.

Bei der Herleitung der Weingarten'schen Differentialgleichung (vergl. das Referat über Ricci's diesbezügliche Arbeit in F. d. M. **28**, 546, 1897) wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die sphärische Abbildung durch die Tangenten T_1 nicht ausarte. Ref. hat in seiner Dissertation nachgewiesen, dass in gewissen Fällen diese Ausartung eintritt und dem entsprechend gewisse Biegungen nicht bestimmt werden. Das ebenfalls vom Ref. angegebene Kriterium für das Nichteintreten dieser Singularität leitet Weingarten aus den Formeln seiner Preisschrift (F. d. M. **27**, 508, 1896) ab, vereinfacht es und zeigt, dass von den beiden, durch T_1 und T_2 vermittelten sphärischen Abbildungen nur eine ausarten kann. Dem entsprechend liefert die Integration der zu T_2 gehörigen Differentialgleichung sicher diejenigen Flächen, die aus der zu T_1 gehörigen nicht gefunden werden. Dies bestätigt eine einfache Transformation beider Differentialgleichungen in einander. Hsb.

P. Pizzetti. Sui poliedri deformabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 19-27.

Poliedri deformabili P sind Oberflächen, die sich aus Polygonen zusammensetzen und Deformationen unterworfen werden können, bei denen nur die Neigungswinkel der Polygone zu einander, nicht aber sie selbst sich ändern. Von solchen Oberflächen P wird diejenige Art P' untersucht, bei der eine Polygonkante höchstens zwei benachbarten Polygonen angehört. Für einen von Kanten der gegebenen Polygone

begrenzten Teil von P' wird eine Definition der totalen Krümmung gegeben, die der von Gauss in die Flächentheorie eingeführten nachgebildet ist. Den Curven einer Fläche entsprechen auf P' Polygonzüge, deren Nachbarkanten auch benachbarten Polygonflächen angehören. Für solche Polygonzüge wird die Definition der geodätischen Krümmung wiederum den analogen Untersuchungen für Curven einer Fläche entlehnt.

Js.

J. E. Campbell. Transformations, which leave the lengths of arcs on surfaces unaltered. London M. S. Proc. **29,** 249-264.

Eine Mannigfaltigkeit von $n > 2$ Dimensionen im euklidischen Raume von $n+1$ Dimensionen lässt sich nur dann biegen, wenn sie von einer linearen Mannigfaltigkeit der Gestalt

$$z = ax_1 + bx_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 + \cdots + f_{n+1}$$

eingehüllt ist, worin $f_3, \ldots, f_{n+1}$ Integrale einer und derselben Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial a\partial b}\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} + \frac{\partial^2\psi}{\partial b^2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0$$

sind, und ψ eine willkürliche Function von a, b ist. Bei allen Biegungen bleibt der Quotient der Hesse'schen Determinante $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right|$ und des Ausdrucks $\left\{1 + \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{\frac{n+2}{2}}$ unveränderlich.

Hsb.

A. Pellet. Sur la théorie des surfaces. S. M. F. Bull **26,** 138-159.

A. Pellet. Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. C. R. **126,** 392-394.

Verf. setzt in der ersten Abhandlung seine flächentheoretischen Untersuchungen fort auf Grund einer in früheren Arbeiten entwickelten Methode (F. d. M. **28,** 541, 1897), welche die Betrachtung wesentlich vereinfachen soll. Neue Resultate ergeben sich nicht bis auf folgenden Satz, der zugleich den Gegenstand der zweiten Notiz bildet:

Soll $A^2(du^2 + dv^2)$ das Quadrat des Linienelements einer Rotationsfläche und A eine Function der Totalkrümmung sein, so muss A eine Function von $pu + qv$ sein (p und q const.). Hsb.

F. Quellhorst. Zur Biegung geradliniger Flächen. Pr. (No. 318) Gymn. Emden. 36 S. 4°.

Referent hat in der Arbeit nichts Neues gefunden. Hsb.

E. Duporcq. Sur l'hyperboloïde osculateur à une surface réglée le long d'une génératrice. Nouv. Ann. (3) **17,** 106-111.

Das Osculations-Hyperboloid wird construirt für den Fall, dass die Regelfläche von einer Geraden erzeugt wird, die sich auf drei gegebene Curven stützt. Scht.

Kuscow. Sur la généralisation des théorèmes de Guldin. Nouv. Ann. (3) **17**, 209-215.

Verf. erklärt zuerst die allgemeine Methode der Kubatur, wobei er ein System krummliniger Coordinaten α, β, γ zu Grunde legt. Das Körperelement ist hierbei von den Flächen α, $\alpha+d\alpha$, β, $\beta+d\beta$, γ, $\gamma+d\gamma$ begrenzt. Er geht dann zu dem einfacheren Falle über, wo man die durch den Körper parallel zu einer Ebene geführten Schnitte schon quadrirt hat. Hierauf betrachtet er den Fall, in welchem der Körper durch Ebenen, die durch eine Axe (OZ) gehen, geschnitten wird. Zwei benachbarte Ebenen, die mit einer festen Ebene die Winkel θ und $\theta+d\theta$ bilden, schliessen eine unendlich dünne Schicht des Körpers ein vom Rauminhalte $SK\mathrm{tg}(d\theta)$ oder $S.K.d\theta$, wo S der Flächeninhalt des Schnittes durch die Ebene θ und K der Abstand seines Schwerpunktes von OZ ist. Ist nun V das Volumen des betrachteten Körpers, so ist $V=\int_{\theta_1}^{\theta_2} SKd\theta$, und diese Formel ist eine allbekannte Verallgemeinerung des Guldin'schen Theorems, in welchem letzteren nämlich $\theta_1=0$, $\theta_2=2\pi$. Es folgen noch zwei Anwendungen, und eine entsprechende Verallgemeinerung des andern Satzes von Guldin, der sich auf Flächenbestimmung bezieht. Mz.

Weitere Litteratur.

Ch. de la Condamine. Démonstration d'un théorème relatif au plan osculateur. Bull. math. spéc. **4**, 121-122.

B. Niéwenglowski. Remarque. Ibid. 122-123.

V. Jamet. Sur la théorie des lignes géodésiques. Marseille Ann. **8**, 117-128.

W. Kornakoff. Deformation ebener Oberflächen. St. Petersburg. 110 S. 8°. (Russisch.)

G. Künzler. Sur les lignes doubles des surfaces développables. Arch. sc. phys. (4) **6**, 370-371.

G. A. Nitsche. Ueber die Probleme der Biegung und der sphärischen Abbildung der Flächen. Leipzig. 70 S. 8°.

A. Razzaboni. Delle superficie nelle quali un sistema di geodetiche sono curve del Bertrand. Nota I, II. Bologna: Gamberini. 9, 17 S. 8°.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

Paul Hugaard. Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhang. Diss. Kjöbenhavn. 97 S.

Diese Abhandlung, „Vorstudien zu einer topologischen Theorie über den Zusammenhang der algebraischen Flächen“, sucht zuerst eine anschauliche Darstellung einer Function von zwei unabhängigen complexen Variabeln zu geben. Dazu bedarf man einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, und diese findet der Verf., indem er die Punkte unseres gewöhnlichen Raumes mit Cotenzahlen belegt. Im ersten Abschnitte werden nun Beispiele dieser Darstellungsweise gegeben. Im zweiten Abschnitte entwickelt der Verf. seine topologischen Studien. Julius Petersen hat in seiner Functionentheorie (Kap. IV) durch Punktirung und Erweiterung der Punktirungen die Riemann'sche Fläche auf eine Normalform gebracht, bestehend aus einer Elementarfläche mit angehefteten Doppelhenkeln. In ähnlicher Weise sucht jetzt Hugaard das Diagramm einer dreifachen Mannigfaltigkeit zu construiren. Es besteht aus kleinen Kugeln (Elementarräumen), verbunden mit kleinen röhrenförmigen Räumen (Drähten) und flachen Räumen (Platten). Hugaard sucht eine Normalform dieser Diagramme zu finden. Dieses gelingt nicht. Doch giebt er verschiedene Methoden an, mittels deren das Diagramm vereinfacht werden kann.

Die wesentlichste Bedeutung der Abhandlung liegt aber in ihrer Kritik betreffs des von Betti aufgestellten Satzes, dass in einem n-dimensionalen, geschlossenen Raume die Betti'schen Zahlen bezüglich des Zusammenhanges p_{n-m} und p_m gleich sein sollen. Der Verf. verwirft sowohl die Beweise, die Picard und Poincaré gegeben haben, als den Satz. Die Unrichtigkeit des Satzes wird durch ein Beispiel, bei dem er nicht gilt, erwiesen. Es soll noch bemerkt werden, dass Poincaré später in Palermo Rend. **13**, 285-343 den Satz und die Beweise aufs neue untersucht hat. Er bemerkt hier, dass man zwei verschiedene Definitionen der genannten Zahlen hat, eine von Betti und eine von ihm selbst. Nach der Definition von Betti ist der Satz unrichtig, nach seiner richtig. Er erkennt aber die Richtigkeit von Hugaard's Einwendungen gegen den Beweis an, den er in seiner Abhandlung „Analysis situs“ (J. de l'Éc. Pol. (2) **1**; F. d. M. **26**, 541, 1895) gegeben hat, und liefert jetzt einen neuen Beweis. V.

É. Picard. Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique. C. R. **126**, 1383-1386.

É. Picard. Quelques remarques relatives aux périodes des intégrales doubles et aux cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques. C. R. **126**, 1457-1459.

Wenn eine ebene algebraische Curve vom Geschlecht p vorliegt, so

kann man bekanntlich p Abel'sche Functionen von p Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_p$ aufstellen, derart, dass jedem Wertsystem der u nur eine einzige Gruppe von p Punkten der Curve entspricht, und umgekehrt, jeder Punktgruppe der betreffenden Serie nur ein System der u, wenn man von den Perioden absieht.

Analog fragt der Verf. für algebraische Flächen, ob es nicht Serien von Gruppen von n Punkten der Fläche giebt, die in gleicher Weise einem System Abel'scher Functionen von $2n$ Variabeln zugeordnet werden können? Seien $f(x, y, z) = 0$ die vorgelegte Fläche, und (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Coordinaten von n beliebigen Punkten der Fläche. Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}$ willkürliche rationale symmetrische Functionen der x_i, y_i, z_i, so existirt eine Relation $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}) = 0$. Indem diese Relation als „Fläche" im Raume von $2n+1$ Dimensionen gedeutet und untersucht wird, insbesondere hinsichtlich ihrer totalen Differentiale erster Gattung, kommt der Verf. zu dem negativen Ergebnis, dass Flächen f der gesuchten Art nur für $n = 1$ existiren können; in diesem Falle gelangt man zu einer bekannten Eigenschaft der hyperelliptischen Flächen.

Die zweite Note beschäftigt sich mit den Perioden der Abel'schen Integrale, die sich auf algebraische Curven, resp. Flächen beziehen. Während man bei den Curven die Perioden in logarithmische und cyklische unterscheidet, so zeigt der Verf., dass bei Flächen eine Unterscheidung der Perioden, wie der zugehörigen Doppelintegrale in mehrere Kategorien auf eigenartige Schwierigkeiten stösst. Als Grundlage dient das Beispiel der unicursalen Fläche dritter Ordnung $x^3+y^3+z^3 = 1$ mit dem Doppelintegral $\iint \frac{y\,dx\,dy}{z}$.

Eine ähnliche Schwierigkeit zeigt das Verhalten der Geschlechtszahl p_2 bei Flächen. My.

L. Lo Monaco-Aprile. Sopra una curva gobba luogo di certi punti parabolici di una rete di superficie, generale, dell'ordine n. Palermo Rend. **12**, 141-162.

Sind im Raume ein Flächennetz $[F]$ n^{ter} Ordnung und eine Gerade E gegeben, so ist der Ort für die Berührungspunkte der Ebenen, welche durch E gehen und die Flächen von $[F]$ berühren, eine Fläche Ξ_E der Ordnung $3n-2$; diese enthält die Gerade E und geht durch die n^3 Basispunkte des Netzes. Die Flächen Ξ_E, $\Xi_{E'}$, welche den beiden in einer Ebene liegenden Geraden E, E' in dieser Weise entsprechen, schneiden sich in der Jacobi'schen Curve des gegebenen Flächennetzes. Das Studium der Flächen Ξ bildet den Hauptgegenstand der von Guccia beeinflussten Abhandlung. Es wird zunächst das Verhalten einer solchen Fläche Ξ_E in einem Basispunkte O des Netzes $[F]$ betrachtet. Der letzte Abschnitt enthält die Untersuchung eines Netzes $[\Xi]$ sowie der zu diesem Netze gehörenden Flächen Ξ_E und der zugehörigen Jacobi'schen Curve. Ot.

Ch. Bioche. Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche. S. M. F. Bull. **26,** 217-232.

Haben drei Flächen zweiter Ordnung eine kubische Curve Γ gemeinsam, und bezeichnet man denjenigen Punkt M', in welchem sich die drei Polarebenen eines beliebigen Raumpunktes M schneiden, als den zu M in Bezug auf Γ conjugirten, so ergiebt sich zunächst, dass zu einer Curve m^{ter} Ordnung, welche Γ in k Punkten schneidet und die Schmiegungsebene in h dieser Punkte berührt, eine Curve der Ordnung $m' = 3m-(k+h)$ conjugirt ist, und dass die entsprechende Formel für eine Fläche m^{ter} Ordnung $m' = 3m - 4(k+h)$ ist. Wenn nun Γ eine Asymptotenlinie auf einer Fläche dritter Ordnung ist, so ist $m = 3$, $k = h = 1$, also $m' = 1$, und daraus ergiebt sich eine geometrische Definition für eine Fläche dritter Ordnung mit einer kubischen Asymptotenlinie sowie die Gleichung einer solchen Fläche. Soll allgemein eine Fläche m^{ter} Ordnung Γ zur Asymptotenlinie haben, so muss sie $3(m-2)$ Doppelpunkte auf Γ besitzen, und die Coefficienten ihrer Gleichung müssen $6m-2$ lineare Bedingungsgleichungen erfüllen; specielle Annahmen über das Verhältnis der Ordnungszahlen m und m' führen zu Flächen mit interessanten Eigenschaften. Eine geradlinige Fläche, deren sämtliche Asymptotenlinien Γ-Curven sind, kann definirt werden als Ort der Geraden, welche jeden Punkt einer Γ-Curve mit den Punkten verbindet, in welchen die entsprechende Schmiegungsebene eine feste Gerade, die Directrix, schneidet. Die verschiedenen möglichen Lagen dieser Geraden zu Γ bestimmen sechs Typen solcher Flächen, unter ihnen die Cayley'sche, bei welcher Γ von der Directrix berührt wird. Ot.

F. Palatini. Alcune proprietà sul sistema di superficie di ordine r passanti per gli spigoli di un $(r+1)$-edro completo. Ven. Ist. Atti (7) **10,** 187-208.

Sind auf einer Geraden r Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ gegeben, und ausserdem ein Punkt o, so wird ein Punkt m durch die Gleichung

$$\Sigma h'_{r-h} \frac{ma_{r-h}}{oa_{r-h}} = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, r-1),$$

worin durch h' beliebige Zahlen ausgedrückt werden, definirt als anharmonisches Centrum vom ersten Grade und dem Modul $[h']$ für den Punkt o, in Bezug auf die r Punkte a. Ebenso erhält man $r-1$ anharmonische Centra m vom Grade $r-1$, wenn man im obigen Ausdrucke den Factor $ma_{r-h} : oa_{r-h}$ durch denjenigen ersetzt, der ihn zu dem Producte $\dfrac{ma_1 \,.\, ma_2 \ldots ma_r}{oa_1 \,.\, oa_2 \ldots oa_r}$ ergänzt. Finden diese Bestimmungen auf allen durch einen Raumpunkt o gehenden Geraden statt, in Bezug auf die r Schnittpunkte einer jeden mit r Ebenen, die ein Polyeder F^r begrenzen, so ist der Ort der Punkte m im ersten Falle eine Ebene,

im zweiten eine Fläche $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (anharmonische Polarfläche). Ist endlich o ein Punkt einer Fläche F^n, so bilden die Polarflächen aller Punkte o ein System von Flächen, die alle durch die Ecken des Polyeders gehen. Diese Flächensysteme werden näher untersucht und zahlreiche Eigenschaften derselben abgeleitet. Schg.

F. Enriques. Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)}=1$. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 234-240, 253-257.

Während der Verf. in einer früheren Note (vergl. F. d. M. **27**, 523, 1896) diejenigen Doppelebenen (d. h. Flächen der Gleichung $z^2=R(x,y)$, wo $R(x,y)$ eine rationale Function bedeutet) in Typen eingeteilt hatte, für welche die Geschlechtszahlen p_n, p_g, $p^{(1)}$, P sämtlich den Wert 1 haben, giebt er in der vorliegenden Arbeit die analoge Klassification für die Doppelebenen, welche das Liniengeschlecht $p^{(1)}=1$ haben, während das numerische Geschlecht p_n, das geometrische Geschlecht p_g und das Bigeschlecht P beliebige Zahlen sind. Lsg.

F. Enriques. Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 281-286.

F. Enriques. Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 344-347.

In Erweiterung eines Satzes von Noether (Math. Ann. **3**) über Flächen mit einem Bündel rationaler Curven beweist der Verf. den Satz: Eine algebraische Fläche mit einem Bündel rationaler Curven kann birational in eine Regelfläche transformirt werden. Der Satz von Noether bezieht sich auf den Fall $p=0$, die erste Note auf den Fall $p=1,2$, die zweite auf beliebiges p, wo p das Geschlecht des Bündels bedeutet. Lsg.

P. Painlevé. Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles. C. R. **126**, 512-515.

Die Existenz von algebraischen Oberflächen, welche unendlich viele discontinuirliche, aber keine continuirlichen Transformationen in sich selbst zulassen, wurde bereits von Humbert (F. d. M. **26**, 518, 1895) erwiesen; diese Eigenschaften entdeckte er bei gewissen nicht ausgearteten Kummer'schen Flächen. Der Verf. giebt hier einfachere Beispiele von Flächen, bei denen er dieselbe Eigenschaft nachweist; die Coordinaten eines Punktes dieser Flächen sind durch elliptische Functionen zweier Parameter darstellbar. Als einfachste der aufgeführten Flächen sei die folgende, bei welcher sich die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes durch:

$$x=\wp(u),\quad y=\wp(v),\quad z=\frac{\wp'(u)}{\wp'(v)}$$

ausdrücken, angeführt. Am Schluss wirft Painlevé die Fragen auf:

1. alle Oberflächen zu bestimmen, deren Coordinaten hyperelliptische Functionen zweier Parameter u, v sind, so dass einem Punkte der Oberfläche mehrere nicht congruente Paare u, v entsprechen (diese Paare leiten sich aus einander durch eine lineare Transformation ab), 2. unter allen diesen Oberflächen diejenigen, welche eine unendliche discontinuirliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zulassen, auszusondern. Wenn die Anzahl der Paare (u, v) gleich 2 ist, so ist nach Untersuchungen von Humbert die Oberfläche aus einer Kummer'schen Fläche durch birationale Transformation herleitbar; wenn sie grösser als 2 ist, so arten die hyperelliptischen Functionen in elliptische aus und die Oberfläche ist, wie behauptet wird, aus in der Note angeführten Beispielen oder ähnlichen durch birationale Transformation ableitbar.

Ly.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

G. Baldauf. Ueber die Punkte kleinster Summe der absoluten Abstände von n Geraden. Pr. (No. 568) Kgl. Gymn. Plauen i. V. 30 S. 4°.

Es wird hier die Aufgabe behandelt: Gegeben sind n Gerade $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ in beliebiger Lage im Raume. Es sollen diejenigen Punkte, für welche die Summe ihrer absoluten Abstände $r_1, r_2, \ldots, r_n$ von jenen Geraden ihren Minimalwert besitzt, gefunden und es soll zugleich gezeigt werden, dass endliche Maximalwerte nicht vorkommen.

Zunächst werden mit grosser Sorgfalt folgende vier Unterfälle behandelt: A) Alle Geraden schneiden einander in einem und demselben, in der Endlichkeit gelegenen Punkte. (Dieser ist dann der einzige vorhandene Minimalpunkt). B) Alle Geraden laufen einander parallel. C) Alle Geraden besitzen eine und dieselbe Gerade als gemeinsames Lot. D) Alle Geraden liegen in derselben Ebene. — Hier ist das Ergebnis: Man bestimme den Wert der Abstandssumme für sämtliche Schnittpunkte der Geraden. Ist unter deren Werten ein kleinster enthalten, so stellt er den Minimalwert und der betreffende Punkt den Minimalpunkt dar. Sind unter den Werten zwei gleich und kleiner als die andern, so ist dieser Wert Minimalwert, und die verbindende Strecke beider Punkte ist Minimalstrecke. Sind mehr als zwei gleich und kleiner als die übrigen Abstandssummen, so sind diese Minimalwerte; die betreffenden Punkte sind Ecken eines geschlossenen Flächenstücks, das die Geraden bilden, und dieses Flächenstück ist die Minimalstelle.

Es folgt dann die geometrische Behandlung der allgemeinen Aufgabe und zuletzt die analytische Behandlung des Falles von n einander kreuzenden Geraden. In Betreff der Resultate wird auf die Arbeit verwiesen.

Mz.

W. Burnside. The trigonometry of a rectangular gauche hexagon. Messenger (2) 28, 92-96.

In zwei früheren Aufsätzen in Messenger **19**, 104-108 (F. d. M. **21**, 931, 1889) und **23**, 19-22 (F. d. M. **25**, 1348, 1893) hat der Verf. eine Construction zur Bestimmung der Resultante zweier beliebigen endlichen Verrückungen eines starren Körpers gegeben. Die Construction, welche, wie an beiden Stellen gezeigt ist, sowohl für den nicht-euklidischen wie für den euklidischen Raum gilt, hängt wesentlich von der Construction eines windschiefen Sechsecks ab, dessen Winkel alle $\frac{1}{2}\pi$ sind. Die Figur und ihre kinematischen Beziehungen für den hyperbolischen Raum bilden die Grundlage für Schilling's Abhandlung „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function“ (Math. Ann. **44**, 162-260; F. d. M. **25**, 694, 1894), und er gebraucht sie, um eine geometrische Deutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie zu erhalten, wenn die Argumente complexe Grössen sind. Der Zweck, den der Verf. in der vorliegenden Note verfolgt, ist der, die trigonometrischen Beziehungen der Figur im gewöhnlichen Raume zu entwickeln, ohne auf die bekannten Ergebnisse der sphärischen Trigonometrie zurückzugreifen. Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie werden natürlich nach diesem Verfahren erhalten. Die Figur selbst, welche ja vollständig durch drei willkürlich angenommene Geraden bestimmt ist, kann zugleich als eine Verallgemeinerung eines ebenen und eines sphärischen Dreiecks angesehen werden. Lp.

A. Saporetti. Analisi di casi singolari geometrici paragonati con le relative algebriche forme. Bologna Mem. (5) **7**, 213-221.

An einer Aufgabe der mathematischen Geographie zeigt der Verf., wie eine Einteilung der acht sphärischen Dreiecke, die durch drei grösste Kreise auf einer Kugel ausgeschnitten werden, in zwei verschiedene Klassen notwendig werden kann. Zugleich erweist es sich als erforderlich, gewisse singuläre Fälle besonders zu untersuchen. My.

Ph. Brückel. Zusammenstellung der Formeln des Hrn. S. Gundelfinger zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten. J. für Math. **119**, 210-233, 313-329.

Die Lehrbücher der analytischen Geometrie enthalten die einschlägigen Entwickelungen meist nur für cartesische Coordinaten; hier werden allgemeinste projective Coordinaten vorausgesetzt und gerade die Ausartungen mit besonderer Einfachheit und Ausführlichkeit dargestellt. Die Beweise sind meist nur skizzirt. Die Arbeit zerfällt in vier Teile: I. Kriterien der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, sowie der Curven zweiter Ordnung im Raume. II. Hauptaxenproblem für die Flächen zweiter Ordnung (Mittelpunkt, Lage der Hauptebenen, Richtung der Axen). III. Dasselbe für die Flächen zweiter Klasse. IV. Bedingungen für die Rotationsflächen und weitere analoge Ausartungen. R. M.

L. Ripert. Sur la discussion de l'équation des quadriques. Nouv. Ann. (3) **17**, 413-421.

Die bekannten Kriterien, nach denen die Flächen zweiten Grades zu klassificiren sind, werden in recht anschaulicher Form analytisch abgeleitet. Js.

J. Thomae. Zur Hesse'schen Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Schlömilch Z. **43**, 334-338.

Hesse hat die Lösung des obigen Problems unter Voraussetzung reeller Punkte und mit Construction eines Hülfskegelschnittes gegeben. Verf. zeigt, dass die von Hesse angewandten Principien genügen, um das Problem allgemein und unmittelbar zu lösen, und zerlegt dasselbe für diesen Zweck in drei Aufgaben, die nach einander, auch unter Berücksichtigung singulärer Fälle, gelöst werden. Schg.

H. E. Timerding. Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden. Annali di Mat. (3) **1**, 95-135.

Auf die nicht wechselseitig eindeutigen quadratischen Verwandtschaften hat Reye durch eine inhaltsreiche Abhandlung in Math. Ann. **48** (F. d. M. **27**, 558, 1896) die Aufmerksamkeit der Geometer von neuem hingelenkt; Verf. hielt es daher an der Zeit, die in der Ueberschrift gekennzeichnete Verwandtschaft, welche auch eine einfache analytische Behandlung gestattet, näher zu studiren. Aus dem ersten Abschnitt, welcher dem Gebüsch der quadratischen Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder gewidmet ist und die für das Folgende wichtigen Eigenschaften zusammenstellt, seien nur die Formeln hervorgehoben, welche die zu betrachtende Abbildung charakterisiren. Wählt man bei einem Gebüsch quadratischer Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder das Poltetraeder als Haupttetraeder und bezieht auf dasselbe homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so ist die Gleichung einer beliebigen Fläche des Gebüsches $(f)^3$:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Bezeichnet man den Raum des Systems $(f)^3$ mit (x), den Raum der den Flächen des Systems entsprechenden Ebenen mit (X), nimmt das Haupttetraeder beiden Räumen gemeinsam an und sucht zu jeder Fläche des Gebüsches in Bezug auf den Einheitspunkt die Polarebene, so hat man die Flächen des Gebüsches eindeutig auf die Ebenen des Raumes bezogen und erhält die Transformationsformeln: $\varrho X_i = x_i^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; die Coordinaten eines Punktes des Raumes (X) sind also proportional den Quadraten der Coordinaten des entsprechenden Punktes im Raume (x); umgekehrt sind die Coordinaten eines Punktes des Raumes (x)

proportional den Quadratwurzeln aus den Coordinaten des entsprechenden Punktes im Raume (X).

Der zweite Abschnitt, welcher die Ueberschrift „über eine Reihe besonderer Flächen vierter Ordnung“ führt, behandelt die Flächen f^4, welche im Raume (x) den Flächen F^2 des Raumes (X) entsprechen. Die Flächen f^4 werden besonders interessant, wenn die F^2 in gewisser Beziehung zu dem Haupttetraeder stehen. Berührt F^2 alle Ebenen des Haupttetraeders, so wird f^4 die von Cayley Tetraedroid genannte Fläche, welche von 17 Parametern abhängt und eine Verallgemeinerung der Fresnel'schen Wellenfläche ist. Einem Hyperboloid F^2, welches drei Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht eine biquadratische Regelfläche, welche dieselben drei Kanten zu Doppellinien hat und eine Kegelschnittschar mit besonderer Lage zum Haupttetraeder trägt. Nur wenn F^2 ein Kegel ist, dessen Spitze in einer Ebene des Haupttetraeders liegt, besitzt f^4 einen Doppelkegelschnitt. Einem Kegel des Raumes (X), der dem Haupttetraeder umbeschrieben ist, entspricht im Raume (x) eine sogenannte desmische Fläche. Von den erwähnten Flächen werden aus der Art der Abbildung ihre Eigenschaften, auf die hier nicht ausführlich eingegangen werden kann, hergeleitet. Bei dem Tetraedroid, für welches die schon von Cayley gegebene Gleichung in Determinantenform angegeben ist, wird z. B. die gegenseitige Lage der 16 Knotenpunkte zu einander besprochen; die 120 Verbindungsgeraden je zweier Knotenpunkte sind mit den 120 Schnittlinien je zweier der 16 singulären Ebenen der Fläche identisch. An der desmischen Fläche treten bei der Abbildung die 12 Knotenpunkte hervor, welche die Ecken dreier Tetraeder eines desmischen Systems bilden; ferner wird das Verhalten der 16 Geraden der Fläche studirt, von denen je vier auf 12 Ebenen liegen, welche letztere die Ebenen dreier Tetraeder sind, die ein neues desmisches System bilden; die desmische Fläche erscheint als Brennfläche von drei Strahlencongruenzen zweiter Ordnung sechster Klasse und kann auf dreifache Art als Enveloppe eines quadratischen Büschels von Flächen zweiter Ordnung erzeugt werden.

Der dritte Abschnitt ist der Steiner'schen Fläche vierter Ordnung dritter Klasse gewidmet. Irgend einer Ebene des Raumes (x) entspricht im Raume (X) eine Steiner'sche Fläche. Wählt man $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ zur Bildebene, so erscheint die Steiner'sche Fläche in der Form $\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\sqrt{X_4}=0$; in diese Form kann die Steiner'sche Fläche auch stets gebracht werden. Wegen der Einfachheit der analytischen Form erweist sich die Verwandtschaft für das Studium der Steiner'schen Fläche als besonders nützlich. Ausser der Herleitung der bekannten Resultate von Cremona, Clebsch, der einfachsten rationalen, zuerst von Kummer angegebenen Gleichungsform der Steiner'schen Fläche geht Verf. unter anderem auf die Cuspidalkegelschnitte ein (Kegelschnitte, in denen die in den sechs Cuspidalpunkten construirten Tangentialebenen die Steiner'sche Fläche schneiden); ferner auf die vier Contracuspidalpunkte, welche durch die Cuspidalkegelschnitte

definirt werden, und auf die schon von Renner in einer Strassburger Dissertation (1896) näher studirten 24 Collineationen, welche die Steiner'sche Fläche in sich transformiren.

Der letzte Abschnitt handelt von der Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Jeder biquadratischen Raumcurve des Raumes (x), welche die Schnittlinie zweier Flächen des Gebüsches $(f)^3$ ist, entspricht im Raume (X) eine gerade Linie g; die vier Kegel, welche durch die Raumcurve gehen, entsprechen den vier Ebenen, welche die gerade Linie g mit den Ecken des Haupttetraeders verbinden. Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumcurve entsprechen den vier Schnittpunkten der Geraden g mit den Ebenen des Haupttetraeders. Auch die Wendeberührungslinien und Ebenen, ferner die schon von Harnack (Math. Ann. **12**) betrachteten 32 Collineationen, welche die Raumcurve in sich transformiren, kommen eingehend zur Sprache. Besonders wichtig unter den Regelscharen, welche die Sehnencongruenz der Raumcurve enthält, ist die Tangentenfläche achter Ordnung der Raumcurve; ihr entspricht im Raume (X) eine Fläche vierter Ordnung, welche von den die Gerade g und die vier Ebenen des Haupttetraeders berührenden Kegelschnitten erfüllt wird. Diese Fläche vierter Ordnung ist eine Plücker'sche Complexfläche; einer der zugehörigen quadratischen Complexe ist stets ein tetraedraler mit dem Haupttetraeder. Dieser Complex ist auch für die Raumcurve vierter Ordnung von Bedeutung. Die Geraden des Complexes lassen sich nämlich als Polaren sämtlicher Punkte des Raumes in Bezug auf die Raumcurve vierter Ordnung auffassen. Durch Verfolgen dieser Betrachtungen ergiebt sich eine durch ein Tetraeder vermittelte Zuordnung der Geraden des Raumes zu Kegelschnitten, kubischen und biquadratischen Raumcurven. Zum Schluss geht Verf. kurz auf eine Arbeit von Wilhelm Stahl (J. für Math. **101**) ein, in welcher Stahl durch das Studium der quadratischen Verwandtschaft aus der Tangentenfläche der biquadratischen Raumcurve die desmische Fläche zwölfter Ordnung herleitet, und zeigt den Zusammenhang mit den hier vorliegenden Untersuchungen.

Dem Referenten sei noch gestattet, darauf hinzuweisen, dass die studirte Transformation und ihre Verwertung für die Steiner'sche Fläche auch schon in der Geometrie der Berührungstransformationen von Lie und Scheffers (1896), S. 355, berührt wurde. Ly.

A. Sayre. The generation of surfaces. Annals of Math. **12**, 118-138.

Die Flächenerzeugung, um die es sich handelt, ist die folgende: eine ebene Curve wird der Bedingung unterworfen, sich auf einer festen ebenen oder einer festen Raumcurve zu bewegen. Diese Methode wird auf eine Reihe von speciellen Fällen angewandt; auf diese Art werden unter anderem die Oberflächen zweiter Ordnung behandelt. Ly.

O. Staude. Die algebraischen Grundlagen der Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Math. Ann. **50**, 398-428.

Man bezeichne mit $2a$ die Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel, mit e die lineare Excentricität, mit r und r' die Abstände eines Punktes der Curve von den beiden Brennpunkten, so gilt die Identität:

$$(\mathrm{I}_0)\; -a^2(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right\}=\left\{a^2-\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right\}.$$

Für die Parabel hat man (wenn $r=\sqrt{x^2+y^2}$):

$$(\mathrm{II}_0)\; -p\left(\frac{y^2}{p}+2x-p\right)=(p-x-r)(p-x+r).$$

In analoger Beziehung stehen zu den Focaleigenschaften der fünf Flächen zweiter Ordnung die beiden Identitäten:

$$(\mathrm{I})\; -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}$$
$$=\left\{a^2-\frac{1}{16}(r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e)^2\right\}$$
$$\times\left\{a^2-\frac{1}{16}(r_2+r_2'-r_1-r_1')^2\right\}\left\{a^2-\frac{1}{16}(r_2-r_2'-r_1+r_1')^2\right\},$$

$$(\mathrm{II})\; -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$
$$=(p-x-r_1)(p-x-r_2)(p-x-r_3).$$

Der Nachweis dieser Beziehungen bildet die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung. Die „gebrochenen Focaldistanzen“ (vergl. F. d. M. **28**, 563, 1897) r_1, r_2, r_1', r_2' eines laufenden Raumpunktes (x, y, z) in (I) sind in § 1 als Maxima und Minima der über eine gegebene Ellipse weg gemessenen Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten dieser Ellipse eingeführt und sind nach § 5 im wesentlichen die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung. In ähnlicher Weise sind die in (II) enthaltenen r_1, r_2, r_3 mit Bezug auf eine gegebene Parabel definirt und in § 14 als Wurzeln einer kubischen Gleichung nachgewiesen. Die algebraische Bestimmung der gebrochenen Focaldistanzen führt in § 4 und § 13 von selbst auf den zu der gegebenen Ellipse oder Parabel conjugirten Focalkegelschnitt und auf die gemeinsamen Transversalen zweier conjugirten Focalkegelschnitte, die Focallinien. Der Uebergang aber von den algebraischen Gleichungen der gebrochenen Focaldistanzen auf die Identitäten (I) und (II) erweist sich nach § 8 und § 17 als gleichbedeutend mit der Einführung der elliptischen und parabolischen Coordinaten. Aus der Deutung jener Identitäten gehen endlich in § 9 und § 18 die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung hervor.

Lp.

W. Ludwig. Ueber die Ebenen, welche aus einer Fläche zweiten Grades einem gegebenen Kegelschnitte ähnliche Kegelschnitte ausschneiden. Diss. Breslau. 74 S. 8°.

Im ersten Abschnitt wird mit Hülfe höherer Correspondenzen der Kegel der Ebenen untersucht, deren Schnittkanten mit einem Kegel zweiten Grades O^2 einen Winkel ϑ einschliessen. Daraus fliessen die Eigenschaften der Ebenen, welche aus einer F^2 einem C^2 ähnliche Kegelschnitte ausschneiden, indem man O^2 über dem unendlich fernen Kegelschnitt von F^2 stehen lässt und als ϑ den Asymptotenwinkel von C^2 nimmt. Es ergiebt sich, dass dieselben im allgemeinen eine unendlich ferne Curve vierter Klasse umhüllen, und ferner, dass die sämtlichen bei einer F^2 so erhaltenen unendlich fernen Curven eine Schar bilden, indem sie, wenn F^2 centrisch ist, die vier absoluten Punkte von F^2 zu Doppelpunkten und in ihnen gemeinsame Doppelpunktstangenten haben, dagegen, wenn F^2 parabolisch ist, in den absoluten Punkten von F^2 einander berühren und ausserdem die beiden unendlich fernen Geraden von F^2 zu Doppeltangenten haben. Da aber O^2 und ϑ auch imaginär sein können, so wird im zweiten Abschnitt die Klasse jener Curven allein mittels stets reeller Gebilde bestimmt. Da ferner nach den benutzten Aehnlichkeitskriterien ähnliche Ellipsen reell und imaginär sein und ähnliche Hyperbeln entweder in gleichen oder in verschiedenen Schnittwinkelpaaren ihrer Asymptoten liegen können, so werden im dritten Abschnitt die Bedingungen aufgesucht, unter welchen aus F^2 dem C^2 wirklich ähnliche Kegelschnitte durch reelle Ebenen ausgeschnitten werden können. Der vierte Abschnitt geht über zu den Ebenen des betrachteten Orts, welche F^2 berühren. Die Curve derjenigen Punkte, in welchen sich die Geraden der beiden Regelscharen von F^2 unter dem Winkel ϑ schneiden, wird untersucht; die Eigenschaften dieser „ϑ-Curve von F^2" werden mit Hülfe der durch sie zwischen den Regelscharen von F^2 erzeugten Correspondenz ermittelt; hierbei ergiebt sich: die ϑ-Curven einer centrischen F^2 sind im allgemeinen von der achten Ordnung und begegnen jeder Geraden von F^2 viermal; sie bedecken die Fläche einfach, haben die vier absoluten Punkte derselben zu gemeinsamen Doppelpunkten und berühren einander in acht endlichen imaginären Punkten. Die ϑ-Curven eines Paraboloids sind im allgemeinen Raumcurven 4. O. 1. Sp., welche einander in vier endlichen imaginären Punkten berühren. Zum Schluss wird im besonderen auf den Fall eingegangen, dass F^2 eine Rotationsfläche ist. T.

E. Lacour. Relation entre les axes d'une section centrale d'un ellipsoïde et la distance du centre au plan tangent en l'un des sommets de la section. Nouv. Ann. (3) **17,** 272-275.

Die Note handelt von der Einführung von vier besonderen, durch zwei Gleichungen verbundenen Grössen, welche als Coordinaten zur Bestimmung eines Punktes eines Ellipsoids dienen können. Diese vier

Coordinaten werden von Darboux in seinen Leçons sur la théorie des surfaces **4**, 469 zur Behandlung der Fresnel'schen Wellenfläche verwendet, die sich bekanntlich aus dem Ellipsoid ableiten lässt. Ly.

Cesaro. Sur une démonstration simple de Fresnel. Liége Mém. **20**, 8 S.

Die Differenz der Quadrate der reciproken Axen eines Ellipsoidschnittes, der mit den cyklischen Ebenen dieser Oberfläche die Winkel θ und θ' bildet, ist $\sin\theta \,.\, \sin\theta'$ proportional. Mn. (Lp.)

E. B. Elliott. Question 11122. Ed. Times **68**, 82-83.

S, U, V, W sind vier Flächen zweiter Ordnung, die einen ebenen Schnitt $C^{(2)}$ gemeinschaftlich haben; durch einen beliebigen Punkt P legt man sechs andere Flächen zweiter Ordnung, die einzeln durch den zweiten ebenen Schnitt gehen, den die Flächen S, U, V, W paarweise gemeinschaftlich haben. Dann haben die sechs neuen Flächen noch einen zweiten Punkt Q gemeinschaftlich. Durchläuft P eine fest gegebene Ebene, so ist der Ort von Q im allgemeinen eine Fläche zweiter Ordnung durch $C^{(2)}$. Lp.

Grossetête. Agrégation des Sciences mathématiques; Concours de 1896. Solution de la question de mathématiques élémentaires. Nouv. Ann. (3) **17**, 130-137.

Verf. betrachtet eine variable Kugel Σ, die rechtwinklig zu einer festen Kugel S ist und eine andere feste Kugel S_1 berührt. Dann hat man Folgendes:

1. Wenn die Kugel Σ der Bedingung unterworfen ist, ihr Centrum in einer bestimmten Ebene P zu haben, so ist der Ort des Berührungspunktes von Σ und S_1 ein Kreis. Berührt ferner die Ebene P die Kugel S, so ist der Ort des Centrums von Σ ein Kegelschnitt, der den Berührungspunkt von S mit P zum Brennpunkte hat. Betrachtet wird dann der Fall, in welchem die Ebene P die Kugel S in einem Punkte desjenigen Kreises berührt, in welchem S und S_1 sich schneiden.

2. Auf der Geraden, welche die Centra von S und S_1 verbindet, kann man einen solchen Punkt f bestimmen, dass die Kugel Σ_0, die zu Σ concentrisch ist und durch f geht, während Σ variirt, beständig eine feste Kugel D berührt, deren Centrum das Centrum f_1 von S_1 ist.

3. Seien m das Centrum von Σ_0 und m' der Berührungspunkt von Σ_0 mit D. Wenn dann m' einen Kreis auf D beschreibt, so bleibt m in derselben Ebene und beschreibt in dieser Ebene eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Nachher wird angenommen, dass die Ebene dieses auf D liegenden Kreises parallel mit sich verschoben wird.

4. Sei T diejenige Ebene, welche in der Mitte der Linie, die f mit einem Punkte m' von D verbindet, zu dieser Linie senkrecht ist.

Wenn dann T' durch einen festen Punkt q geht, so ist der Ort des Punktes m' ein Kreis γ_q.

Verschiebt sich der Punkt q in einer festen Ebene, so bleibt der Kreis γ_q rechtwinklig zu einem festen Kreise der Kugel D. Auch wird der Fall betrachtet, in welchem der Punkt q eine feste Gerade beschreibt.

5. Ist c die Mitte auf ff_1, so treffen sich die Geraden cm und fm' in einem Punkte, der in einer festen Ebene bleibt, während die Kugel Σ_0 variirt.

Dies wird in der Arbeit weiter ausgeführt und begründet.

Mz.

Ph. du Plessis. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1898. Composition de Mathématiques. Nouv. Ann. (3) **17,** 522-529.

Verf. behandelt Folgendes: Man betrachte eine Kugel (S) mit dem Radius R, deren Mitte der Coordinatenanfang O rechtwinkliger Coordinaten $Oxyz$ ist; ferner ein Paraboloid (P), das die Ebene xOy zur Directorebene hat und als Directrices erstens die Axe Oz, zweitens die Gerade AB, wobei A die Coordinaten (R, O, R) und B die Coordinaten (a, b, c) hat. Die Gleichung der Kugel ist dann: $x^2+y^2+z^2=R^2$ und die des Paraboloides:

$$z(bx+y(R-a))-R(bx+y(c-a))=0.$$

Man nimmt nun auf Oz einen Punkt $M(0, 0, h)$, ferner die Polarebenen dieses Punktes, und zwar (Σ) in Bezug auf die Kugel und (Π) in Bezug auf das Paraboloid. Dann wird der Ort des Durchschnittes dieser beiden Ebenen gesucht, während M die Axe Oz durchläuft; dieser Ort ist das Paraboloid (Q) mit der Gleichung:

$$R(bx+y(R-a))-z(bx+y(c-a))=0.$$

Das Paraboloid Q geht durch Oz und hat auch die Ebene Oxy zur Directorebene; es hat ferner mit (P) die Geraden gemein: I. $z=R$, $y=0$, II. $z=-R$, $(2a-R-c)y-2bx=0$. Hierauf wird AB unter einem Winkel von 45^0 gegen Oz vorausgesetzt, und ferner möge AB die Kugel (S) im Punkte B, der im Trieder $Oxyz$ liegt, berühren. Dann werden die Coordinaten a, b, c des Punktes B als Functionen von R ausgedrückt, und zwar:

$$a=\tfrac{1}{2}R\sqrt{2}, \qquad b=R\sqrt{\sqrt{2}-1}, \qquad c=\tfrac{1}{2}R(2-\sqrt{2}).$$

Endlich werden noch die Generatrices des Paraboloides (P) ermittelt, welche von O den Abstand R haben, also Tangenten an (S) sind. Diese sind erstens die beiden Geraden I und II von vorher und zweitens die Gerade AB und ihre Symmetrische in Bezug auf Oz. Die Lösung geschieht zuerst nach analytischer Methode; dann folgt eine rein geometrische Behandlung des Gegenstandes. Mz.

H. Piccioli. Note sur les géodésiques du cône. Nouv. Ann. (3) **17,** 207-209.

Enneper hat zuerst gefunden, dass längs der geodätischen Linie des Kegels das Verhältnis der beiden Radien erster und zweiter Krümmung gleich einer linearen Function des Bogens dieser Curve ist. Darauf hat Pirondini gezeigt, dass diese geodätischen Linien durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass ihre Schmiegungsebenen gleichen Abstand vom Scheitel des Kegels haben. Verf. beweist diese Sätze und auch ihre Umkehrung auf eine einfache und elegante Weise, indem er die bekannten Relationen zwischen den Cosinus der Winkel der Tangente, Hauptnormale und Binormale gegen die Coordinatenaxen einerseits und die beiden Krümmungsradien andrerseits zu Grunde legt. Mz.

J. Hadamard. Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre. S. M. F. Bull. **26,** 195-216.

In einer früheren Arbeit (C. R. **124,** 1503; F. d. M. **28,** 540, 1897) hatte Verf. gezeigt, dass jede unendliche „erweiterte" Schale einer Fläche negativer Krümmung als von einer geschlossenen geodätischen Linie, der „Kehllinie" dieser Schale, begrenzt angesehen werden kann, die so beschaffen ist, dass jede andere sie durchschneidende und in die Schale eintretende geodätische Linie sich auf letzterer ins Unendliche erstreckt. In der vorliegenden Abhandlung wird das Verhalten und die Form derartiger geodätischer Linien untersucht, und zwar hauptsächlich an den Beispielen des hyperbolischen Paraboloids und des geradlinigen Hyperboloids. Als Hülfsmittel dient die Abbildung der betrachteten Fläche auf einen achtblättrigen Streifen in der Ebene der elliptischen Coordinaten; die Resultate der Ebene lassen sich sodann ohne Schwierigkeit auf den Raum übertragen. Durch eine sorgfältige Discussion der in den hyperelliptischen Integralen der Gleichung der geodätischen Linien auftretenden willkürlichen Constante ergeben sich für das einschalige Hyperboloid ausser den von Halphen (Tr. des fonct. ell. **2,** Kap. 6) angegebenen Arten geodätischer Linien zwei neue Arten: 1. Linien, die sich der Kehlellipse, 2. Linien, die sich einer Geraden asymptotisch nähern. Nach einigen Verallgemeinerungen der erlangten Resultate stellt sich der Verf. noch die Aufgabe, einige Fundamentaltheoreme über negativ gekrümmte Flächen für die geradlinigen Flächen zweiten Grades zu verificiren. Dabei ergiebt sich unter anderem folgendes Resultat: Verbindet man zwei Punkte m, m' des einschaligen Hyperboloids durch eine geodätische Linie, die eine immer grössere Zahl von Umläufen um die Fläche vollzieht, so nähert sich die Anfangsrichtung dieser geodätischen Linie in einem beliebigen ihrer äussersten Punkte m, m' der Richtung der Asymptote, die durch den betreffenden Punkt an die Kehlellipse gezogen ist (vergl. S. 522 dieses Bandes). Ot.

E. Duporcq. Deuxième concours des: „Nouvelles Annales“ pour 1897. Nouv. Ann. (3) **17**, 53-64.

In dieser preisgekrönten Arbeit sind interessante Sätze über Raumcurven dritter Ordnung, die hier „Kubiken“ heissen mögen. Eine „gleichseitige Kubik“ hat ihre drei Asymptoten paarweise zu einander senkrecht. So liegen zum Beispiel die Fusspunkte der sechs von einem Punkte an ein Ellipsoid gehenden Normalen auf einer gleichseitigen Kubik. Ferner wird orthocentrisches Tetraeder ein solches genannt, in welchem die vier Höhen durch denselben Punkt gehen. Verf. beweist nun folgende Sätze:

I. Sind zwei Sehnen AB und CD einer gleichseitigen Kubik zu einander senkrecht, so ist das Tetraeder $ABCD$ orthocentrisch. II. Geht irgend eine Kubik durch die Ecken eines Tetraeders, das einer Fläche zweiten Grades conjugirt ist, so ist sie unendlich vielen Tetraedern umbeschrieben, die gleichfalls dieser Fläche conjugirt sind. III. Jede gleichseitige Kubik, die einem orthocentrischen Tetraeder umbeschrieben ist, geht durch den Höhenschnitt des Tetraeders. IV. Jede Kubik, die durch die Ecken und den Höhenschnitt eines orthocentrischen Tetraeders geht, ist eine gleichseitige Kubik. V. Schneidet man eine gleichseitige Kubik durch eine Reihe paralleler Ebenen, so ist der Ort der Höhenschnitte aller Dreiecke, deren Ecken die Kubik in diesen Ebenen bestimmt, diejenige Doppelsecante der Kubik, die zu diesen Ebenen senkrecht ist.

Es sei nun Σ eine Kugel mit dem Radius R, und ihr Centrum O liege auf einer gleichseitigen Kubik. Dann giebt es unendlich viele Tetraeder $ABCD$, die der Kubik eingeschrieben und zu Σ conjugirt sind. 1. Der Ort der Schwerpunkte dieser Tetraeder ist eine Gerade. 2. Man betrachtet die Kugeln S, die den Tetraedern $ABCD$ umbeschrieben sind; die Centra dieser Kugeln liegen auf einer Geraden. Gefragt wird, wie diese Gerade sich bewegt, wenn bei festem O der Radius R sich ändert. 3. Jede Kugel S schneidet die Kubik in zwei anderen Punkten E und F; diese sind fest und hängen nicht von R ab. 4. Verändert sich O, so beschreibt die Gerade EF eine Fläche zweiten Grades, und die Ebene OEF umhüllt einen Kegel zweiten Grades. 5. Verändert sich O, so beschreibt die Mitte von EF eine gleichseitige Kubik.

Mz.

F. Dumont. Sur deux formes particulières de l'équation réduite des surfaces du troisième ordre générales. S. M. F. Bull. **26**, 124-129.

Von der Gleichung dritten Grades mit drei Variablen werden diejenigen beiden Specialformen aufgestellt, in denen die Glieder mit Quadraten der Variabeln und die Glieder ersten Grades, bezw. die Glieder dritten Grades bis auf xyz und die Glieder ersten Grades fehlen. Sodann wird festgestellt, welche Arten von Oberflächen dritter Ordnung in jeder dieser Gleichungen enthalten sind. In derselben Weise werden zum Schluss weitere Specialfälle der zweiten Form untersucht. Schg.

Dumont. Sur l'une des formes canoniques de l'équation des surfaces cubiques. Nouv. Ann. (3) **17**, 503-507.

Die betrachtete Form der Gleichung der Fläche dritter Ordnung ist die folgende mit sieben wesentlichen Parametern:

$$ax^2y+by^2z+cz^2t+dt^2x+2fxyz+2gyzt+2hztx+2ktxy=0$$

(vergl. das vorangehende Referat). Ly.

Ch. Bioche. Sur une certaine surface de troisième ordre. Nouv. Ann. (3) **17**, 111-115.

Die von Clebsch (Math. Ann. **4**; F. d. M. **3**, 32, 1871) Diagonalfläche genannte Fläche dritten Grades, deren Gleichung in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(X+Y+Z+T)^3-X^3-Y^3-Z^3-T^3=0,$$

wird hier bezüglich der Besonderheiten der Lage ihrer 27 Geraden behandelt, die alle reell und verschieden sind. Scht.

A. Emch. Reciprocal transformations of projective coordinates and the theorems of Ceva and Menelaos. American M. S. Bull. (2) **5**, 143-150.

Sind x und $a-x$, y und $b-y$, z und $c-z$ die Abschnitte der drei Seiten eines Dreiecks, so kann man das Theorem von Ceva durch die Formel ausdrücken:

$$\text{(I)} \qquad xyz=(a-x)(b-y)(c-z),$$

dasjenige des Menelaos durch

$$\text{(II)} \qquad xyz=-(a-x)(b-y)(c-z).$$

Die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes der Ebene geben

$$x=\frac{ax_3}{x_2+x_3},\quad y=\frac{bx_1}{x_1+x_3},\quad z=\frac{cx_2}{x_2+x_1};$$

die reciproke Transformation $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$ ergiebt

$$x'=\frac{ax_2}{x_3+x_2},\quad y'=\frac{bx_3}{x_1+x_3},\quad z'=\frac{cx_1}{x_2+x_1}.$$

Die Punkte (x, y, z) und (x', y', z') der Oberfläche (I) zeigen, dass diese Oberfläche symmetrisch ist in Bezug auf ein Centrum $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$ auf ihr. Der Charakter dieser Transformation wird des näheren erläutert und in einer Figur veranschaulicht. Eine ähnliche kurze Betrachtung schliesst sich an die Gleichung (II) an, die ein einschaliges Hyperboloid darstellt. Lp.

Weitere Litteratur.

J. Caron. Les paraboles asymptotes dans l'intersection de deux quadriques. Revue de math. spéc. **8**, 506-509.

G. Diem. Ueber Ellipsen auf einem Ellipsoid, deren Axen gegebenen einfachen Bedingungen genügen, insbesondere über congruente Ellipsen. Diss. München. 42 S. 8°.

G. Fontené. Lieu des foyers des sections centrales d'une quadrique. Revue de math. spéc. **9**, 89-91.

R. Frenzel. Flächen zweiter Ordnung, die durch die Rotation eines ebenen Gebildes um einen im Raume befindlichen Strahl entstehen. Pr. Jägerndorf. 16 S. 8°.

L. Gérard. Invariants des cylindres et des systèmes de deux plans parallèles. Bull. math. spéc. **4**, 113-114.

E. Humbert. Question relative aux examens de l'École Polytechnique. Revue de math. spéc. **9**, 34-35.

G. Lapointe. Note sur l'équation du second degré qui permet de déterminer les axes d'une section plane d'une quadrique. Revue de math. spéc. **9**, 65-67.

S. Rindi. Sulla polare interna di una superficie del terzo ordine. Atti della R. Acc. Lucchese **29**, 361-378.

D. Andere specielle Raumgebilde.

A. Brambilla. Intorno alla superficie di Steiner. Napoli Rend. (3) **4**, 19-22.

P. del Pezzo. Relazione. Ibid. 18.

A. Brambilla. Estensione di una proprietà della superficie di Steiner. Napoli Rend. (3) **4**, 300-303.

P. del Pezzo. Rapporto. Ibid. 299.

Der erste Aufsatz handelt von dem Ort der Pole irgend einer festen Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Steiner'schen Fläche S; dieser Ort ist wieder eine Steiner'sche Fläche. Der Autor bezeichnet diese neue Steiner'sche Fläche nach Koenigs (S. M. F. Bull. **16**; F. d. M. **20**, 823, 1888) als Koenigs'sche Fläche. Erst nach vollendeter Drucklegung merkte Brambilla, dass Lie bereits 1878 (F. d. M. **10**, 531, 1878) dieses Theorem veröffentlicht hat; zumal dieses Resultat, welches Sophus Lie schon 1869 der Universität in Christiania einreichte (vergl. Noether, Math. Ann. **53**, 3), einen der frühesten von dem grossen Geometer stammenden Sätze darstellt, wollen wir die zu einer Ebene ζ bezüglich S gehörige neue Steiner'sche Fläche die zu ζ gehörige Lie'sche Fläche $L\zeta$ nennen. Verf. giebt für den Lie-Koenigs'schen Satz einen analytischen Beweis. Er zeigt ferner: wenn eine Ebene η die zu einer Ebene ζ gehörige Fläche $L\zeta$ berührt, so berührt ζ die zu η gehörige Fläche $L\eta$. Es werden dann die von Koenigs gegebenen Sätze bewiesen: Die Doppeltangentialebenen der zu Grunde liegenden Steiner'schen Fläche S sind einfache Tangentialebenen einer jeden Lie'schen Fläche, die zu irgend einer Ebene in Bezug

auf S gehört. Die Lie'sche Fläche, die zu irgend einer Ebene ζ in Bezug auf die Steiner'sche Fläche S gehört, geht durch die Schnittcurve von ζ mit S.

In der zweiten Note dehnt Brambilla das Lie'sche Resultat bezüglich der Steiner'schen Fläche $(F_2^4)_3$ auf Flächen im vier- und fünfdimensionalen Raume aus. Die $h+1$ homogenen Coordinaten der zu betrachtenden $(F_2^4)_h$, wobei jedoch h nur die Werte 3, 4, 5 annehmen möge, sollen als quadratische homogene Functionen dreier Parameter gegeben sein. Es gilt dann der Satz: der Ort der Pole irgend einer festen, linearen, im h-dimensionalen Raume gelegenen Mannigfaltigkeit in Bezug auf alle Kegelschnitte der $(F_2^4)_h$ ist wiederum eine $(F_2^4)_h$. Auch die anderen für die $(F_2^4)_3$ in dem ersten Aufsatze hergeleiteten Resultate werden auf die $(F_2^4)_h$ ausgedehnt. Ly.

E. Lacour. Sur la surface de Steiner. Nouv. Ann. (3) **17**, 437-445.

Ausgehend von der einfachsten rationalen Gleichungsform der Steiner'schen Fläche:

$$Y^2Z^2+Z^2X^2+X^2Y^2-2XYZ=0,$$

leitet Verf. die bekannten Eigenschaften der Fläche bezüglich ihrer Abbildung auf eine Ebene elementar-analytisch her. Irgend einem ebenen Schnitte der Steiner'schen Fläche entspricht in der Bildebene ein Kegelschnitt; das Bild eines Schnittes einer Tangentialebene zerfällt in ein Geradenpaar; die vier singulären Tangentialebenen, von denen eine jede die Steiner'sche Fläche längs eines Kegelschnitts berührt, bilden sich in vier doppelt zu zählende Geraden ab. Schliesslich werden die parabolische Curve, welche aus den vier Berührungskegelschnitten der vier singulären Tangentialebenen besteht, und die Asymptotenlinien der Steiner'schen Fläche behandelt. Ly.

E. Lacour. Réduction à la forme canonique des formules qui donnent, en fonction rationnelle de deux paramètres, les coordonnées d'un point de la surface de Steiner. Nouv. Annales (3) **17**, 499-503.

Definirt man die vier homogenen Coordinaten eines Punktes der Steiner'schen Fläche als rationale homogene ganze Functionen zweiten Grades dreier Parameter x, y, z, so kann man sich x, y, z in einer Hülfsebene als Dreieckscoordinaten eines Punktes deuten. Den ebenen Schnitten der Steiner'schen Fläche entspricht dann in der Hülfsebene ein unendliches lineares Kegelschnittsystem, das sich aus vier Kegelschnitten zusammensetzt. Diesem Kegelschnittsystem steht eine nach Rosanes conjugirte oder in der Bezeichnung von Reye apolare Kegelschnittschar gegenüber. Wählt man für die Coordinatenbestimmung in der Hülfsebene zu Seiten des Fundamentaldreiecks die Diagonalen des Vierseits, dem alle Kegelschnitte der conjugirten Kegelschnittschar einbe-

schrieben sind, so kann die Steiner'sche Fläche leicht in die bekannte Gleichungsform:

$$X' = 2yz, \qquad Y' = 2zx, \qquad Z' = 2xy, \qquad T' = x^2+y^2+z^2$$

gebracht werden. In Bezug auf die singulären Fälle, welche sich durch Ausartung des Vierseits ergeben, wird auf die Arbeit von Clebsch (J. für Math. **67**, 1-22) verwiesen. Ly.

E. Lacour. Sur la surface de l'onde. Nouv. Ann. (3) **17**, 266-272.

Die Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche:

$$(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)-(\beta^2+\gamma^2)\alpha^2x^2-(\gamma^2+\alpha^2)\beta^2y^2 \\ -(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0$$

wird vom Verf. in die Form:

$$\varphi^2-\lambda Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 0$$

gebracht; λ ist dabei eine Constante, $\varphi = 0$ die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_4 = 0$ sind die Gleichungen der vier zur Ebene $y = 0$ senkrechten, reellen ($\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2$) singulären Tangentialebenen; die Rechnung ergiebt leicht, dass diese vier Ebenen Kreisschnitte von $\varphi = 0$ liefern. Hiermit ist der Hamilton'sche Satz, dass die vier singulären reellen Tangentialebenen die Wellenfläche längs Kreisen berühren, einfach erwiesen. Die gleiche Betrachtung wird auf die bekanntlich analog gebaute Gleichung der Wellenfläche in Ebenencoordinaten angewandt; hierbei treten dann die vier singulären reellen Punkte der Fläche hervor. Schliesslich wird die von H. Weber (J. für Math. **84**, 353) gegebene Darstellung der Coordinaten für die Punkte der Wellenfläche durch elliptische Functionen, welche in der Weber'schen Arbeit als Specialisirung der für die Kummer'sche Fläche gültigen Resultate erscheint, auf sehr einfache Weise direct abgeleitet. Bezüglich des letzten Punktes gestattet sich der Referent, darauf hinzuweisen, dass auch H. Weber selbst sich kürzlich mit diesem Gegenstand beschäftigt hat. (Zürich. Nat. Ges. **41**, vergl. F. d. M. **27**, 532, 1896.) Ly.

J. J. Hutchinson. Note on the tetrahedroid. American M. S. Bull. (2) **4**, 327-329.

In der Note: „A special form of a quartic surface“ (F. d. M. **28**, 573, 1897) hat der Verf. eine specielle Gestalt für den Ort der Spitze eines Kegels betrachtet, der durch sechs gegebene Punkte geht. Gegenwärtig behandelt er den Zusammenhang dieser besonderen Oberfläche mit dem Tetraedroid. Nebenbei wird die Bedingung gefunden, unter der die durch sechs willkürlich angenommene Knotenpunkte bestimmte Kummer'sche Fläche ein Tetraedroid wird: Die sechs Knotenpunkte bilden eine Involution auf der durch sie bestimmten kubischen Raumcurve. Lp.

G. Brunel. Sur une surface à courbures opposées. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 62-64.

Der Verf. gewinnt die Fläche aus dem einschaligen Hyperboloide durch eine einfache Construction; ihre Gleichung ist:

$$(x^2+z^2)(x^2+z^2+y^2-a^2) = 8x^2z^2.$$

In keinem Punkte der Oberfläche wechselt die Krümmung ihr Zeichen. Die Tangentialebene in $x=0$, $z=0$, $y=\pm a$ schneidet die Oberfläche in vier Geraden. Die Fläche besitzt vier unendliche Schalen.

Lp.

J. Hadamard. Sur une surface à courbures opposées. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 163-164.

Während der Verf. in früheren Mitteilungen nur Oberflächen mit unendlichen Schalen berücksichtigt hatte, war er durch eine Notiz von Brunel in dem Artikel „Des contours tracés sur les surfaces“ (vergl. diesen Band S. 416-417) auf eine Fläche von Neovius aufmerksam gemacht worden, die ein Loch, aber auch unendlich viele Schalen besitzt. Als Beispiel einer durchlochten Fläche wird jetzt angeführt:

$$[(x+a)^2+y^2-z^2-b][(x-a)^2+y^2-z^2-b] = K,$$

wo K eine sehr kleine positive Zahl bedeutet, $a^2-b>0$ ist.

Lp.

Dziobek. Ueber die Schattenfläche. Astr. Nachr. **148**, 129-138.

Es handelt sich um die astronomisch wichtige und daher schon von Laplace studirte abwickelbare Fläche, welche von sämtlichen gemeinsamen Tangentialebenen zweier dreiaxigen Ellipsoide eingehüllt wird. Der Verf. legt der analytischen Darstellung das (in praxi allerdings schwer zu findende) beiden Ellipsoiden gemeinsame Polartetraeder zu Grunde und gelangt dadurch sehr schnell zu einer Parameter-Darstellung der Fläche in Punkt- und Ebenencoordinaten, aus der sich vier in den Hauptebenen liegende Doppelkegelschnitte und mittels ihrer eine einfache Construction der erzeugenden Geraden herauslesen lassen. Für die Rückkehrcurve ergiebt sich eine elegante Darstellung. Einige Figuren erläutern die gestaltliche Discussion der Fläche. R. M.

E. Soler. Nuovi studi sopra una certa deformata della sfera. Atti della R. Acc. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo (3) **5**, Nota I 35 S., Nota II 23 S.

Diese Studien beziehen sich auf eine Rotationsfläche constanten, positiven Krümmungsmasses, deren Verwendung in der Geodäsie der Verf. schon früher vorgeschlagen hat (Sopra une certa deformata della sfera, Palermo Rend. **8**, 209-221; F. d. M. **25**, 1277, 1894).

Vi.

Montcheuil. Etude des surfaces définies par l'équation $R+R' = F(u)+F_1(u_1)$. S. M. F. Bull. **26**, 103-114.

Die Minimalflächen, welche bekanntlich dadurch definirt sind, dass bei ihnen zwischen den Hauptkrümmungsradien R und R' die Relation $R+R'=0$ besteht, können als Specialfall einer viel allgemeineren Flächengattung aufgefasst werden. Diese Flächen sind dadurch bestimmt, dass bei ihnen (1) $R+R'=F(u)+F_1(u_1)$ sein soll, wobei F und F_1 beliebige Functionen ihrer Argumente vorstellen und die Richtungscosinus der Flächennormale durch die Formeln:

$$c=\frac{u+u_1}{uu_1+1},\quad c'=i\,\frac{u_1-u}{uu_1+1},\quad c''=\frac{uu_1-1}{uu_1+1}$$

gegeben werden. Man sieht leicht, dass die Gleichung der Tangentialebene der untersuchten Flächen:

$$(u+u_1)x+i(u_1-u)y+(uu_1-1)y+\xi=0$$

ist, wobei ξ der Differentialgleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\partial u_1^2}=0$$

genügt, d. h. ξ ist von der Form:

$$\xi=Au_1+A_1u+B+B_1,$$

wobei A und B Functionen von u, A_1 und B_1 Functionen von u_1 sind. Es liegt nahe, bei diesen Flächen nach einer ähnlichen Erzeugungsweise, wie sie Sophus Lie bei den Minimalflächen gefunden hat, zu fragen. Verf. findet nun die folgenden zwei Theoreme:

I. Führt man durch die Mitte eines geradlinigen Segmentes, dessen Enden M und M_1 irgend zwei Raumcurven beschreiben, eine Gerade D, welche dem Schnitte der Tangentialebenen in den Punkten M und M_1 an zwei abwickelbare Flächen, welche die zwei Curven enthalten, parallel ist, so ist notwendig und hinreichend, damit die Congruenz der so definirten Geraden D normal zu einer Familie von Flächen steht, dass die gegebenen abwickelbaren Flächen isotrop seien.

II. Die Flächen, welche normal zu der soeben betrachteten Congruenz sind, sind diejenigen, welche Lösungen der Gleichung (1) oder (2) sind.

Wählt man die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen als die zu untersuchenden Curven, so wird $A'+B-uB'=\text{const.}$, $A'_1+B_1-u_1B'_1=\text{const.}$ Um hieraus Minimalflächen zu erhalten, braucht man nur die Constanten Null zu setzen. Hiermit hat man die Lie'sche Erzeugungsweise der Minimalflächen: sie ergeben sich als Ort der Mitte des geradlinigen Segments, dessen Enden die Rückkehrcurven der zwei isotropen abwickelbaren Flächen, d. h. von Minimalcurven, beschreiben. Verf. betrachtet noch vier weitere Flächen, die zu der studirten Gattung gehören; er erhält dieselben durch Specialisirung der abwickelbaren Flächen bezüglich ihrer Curven.

Zum Schluss wird noch der allgemeine Satz bewiesen: Die Oberflächen, welche der Ort der Mitte eines Segments sind, dessen Enden

irgend zwei Curven beschreiben, werden erhalten, indem man zu den durch die Gleichung (2) definirten Flächen gewisse zugehörige Flächen (développée moyenne, wie sie Montcheuil nennt) bestimmt. Unter dieser zugehörigen Fläche (développée moyenne) ist dabei die Fläche zu verstehen, welche der Ort der Mitte des Focalsegments einer zu einer Flächenfamilie normalen Congruenz ist. Ly.

Issaly. Sur une formule d'Enneper et sa corrélative. S. M. F. Bull. **26**, 114-124.

Das Enneper'sche Theorem, von dem die Arbeit handelt, ist das folgende: das Quadrat der Torsion der Asymptotenlinien ist in jedem Punkte einer Fläche gleich der mit negativem Zeichen genommenen Totalkrümmung der Fläche. (Enneper, Gött. Nachr. 1870, 499.) Der ausserdem von Issaly bewiesene neue Satz, welcher das Gegenstück zum Enneper'schen bilden soll, betrifft die Pseudominimalflächen und lautet: das Quadrat der Torsion der zwei Krümmungslinien, welche sich in jedem Punkte einer Pseudominimalfläche schneiden, ist gleich dem mit negativem Zeichen genommenen reciproken Wert des Productes aus den zwei Hauptkrümmungsradien der Pseudofläche. Es verdient dabei vielleicht bemerkt zu werden, dass die Hauptkrümmungsradien einer Pseudofläche verschieden von denjenigen einer gewöhnlichen Fläche sind. Bezüglich der Definition der schon früher von Issaly eingeführten Pseudoflächen und ihrer wesentlichen Unterschiede von den gewöhnlichen Flächen muss auf die Issaly'schen Arbeiten in S. M. F. Bull. **16, 17** (vergl. F. d. M. **21**, 822, 1889) verwiesen werden. Die Pseudominimalflächen bilden bezüglich ihrer Asymptotenlinien das Gegenstück der gewöhnlichen Flächen bezüglich ihrer Krümmungslinien; die Asymptotenlinien der Pseudominimalflächen durchschneiden sich senkrecht. Ly.

L. Sinigaglia. Sulle superficie ad area minima applicabili su sè stesse. Batt. G. **36**, 172-182.

Die Aufgabe, diejenigen Minimalflächen zu bestimmen, welche sich auf sich selbst auf eine endliche Anzahl von Arten abwickeln lassen, hängt von der Bestimmung der quadratischen Differentialausdrücke ab, welche Transformationen in sich selbst gestatten. Der Verf. findet fünf Klassen von Minimalflächen, welche diese Eigenschaft besitzen und den cyklischen, diedrischen, tetraedrischen, oktaedrischen und ikosaedrischen Typen der endlichen Substitutionsgruppen entsprechen. Unter diesen Oberflächen findet er diejenigen wieder, welche schon von Henneberg, Scherk und Lecornu entdeckt sind. Lp.

J. Deruyts et P. Mansion. Rapport sur un Mémoire de M. A. Demoulin intitulé: Sur les surfaces minima réglées et les surfaces minima à lignes de courbures planes. Belg. Bull. (3) **36**, 232-234.

P. Zeeman. Une surface minima algébrique du vingtième ordre. Archives Teyler (2) **5,** 299-345.

Die betreffende Fläche besitzt eine Kardioide als geodätische Linie; drückt man x, y, z als Functionen zweier Parameter α und ϱ aus, so sind die Curven $\alpha =$ Const. Raumcurven vierter Ordnung, $\varrho =$ Const. Raumcurven achter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Die Fläche besitzt eine vierfache Gerade, eine Doppellinie sechster Ordnung. Lp.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Th. Craig. Displacements depending on one, two and three parameters in a space of four dimensions. American J. **20,** 135-156.

Die von Darboux in den beiden ersten Bänden seiner „Théorie générale des surfaces" angewandten kinematischen Methoden werden für den vierdimensionalen Raum verallgemeinert. Ohne auf Anwendungen der vorgetragenen Theorie einzugehen, weist der Verf. auf die grosse Fruchtbarkeit derselben hin bezüglich der Ableitung von Formeln über Hyperflächen, Flächen und Curven im R_4. Schg.

E. Veneroni. Sopra una rappresentazione univoca dello spazio rigato sullo spazio punteggiato a quattro dimensioni. Batt. G. **36,** 300-305.

Man kennt zwei Abbildungen obiger Art, von denen die erste durch Aschieri (Rom. Acc. L. Mem. (4) **4,** 172-180; F. d. M. **19,** 661, 1887), die zweite in einem Specialfalle von Chizzoni (Acc. Catania, **20;** F. d. M. **20,** 656, 1888) untersucht worden ist. Für diese zweite giebt der Verf. die Grundlagen zu einer allgemeinen Behandlung mittels projectivischer Correspondenzen und zeigt u. a., dass das auf stereographischer Projection beruhende Verfahren als besonderer Fall des seinigen betrachtet werden kann. Schg.

C. Rosati. Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di S_n sopra un S_{n-2}. Annali di Mat. (3) **1,** 25-37.

Die bekannte Abbildung des quadratischen allgemeinen Complexes auf den dreidimensionalen Raum R_3 ist von Bertini dadurch bewirkt worden, dass er auf einen R_3 die Quartik projicirte, welche die Basis eines Büschels von Quadriken des Raumes R_5 ist, und zwar mit Hülfe eines R_1 der Quartik. Dieses Verfahren lässt sich auf die Quartik ausdehnen, welche Basis von Quadriken eines R_n ist, und eine solche Quartik ist birational auf einen R_{n-2} abbildbar. Diese Ausdehnung bildet den Gegenstand der Arbeit, ist aber nicht ohne weiteres ersichtlich, weil für ein beliebiges n Mannigfaltigkeiten und Eigenschaften auftreten, die für $n = 5$ verschwinden. Lp.

P. H. Schoute. Extension of the notion of wave-surface to space of n dimensions. Edinb. M. S. Proc. **16**, 51-56.

Die Art der Erzeugung der Wellenfläche ist diejenige, welche im dreidimensionalen Raume der Definition entspricht, dass die Wellenfläche der Ort des Punktes P ist, von welchem an ein gegebenes Ellipsoid L ein einhüllender Kegel geht, dessen einer Hauptschnitt ein rechter Winkel ist (vergl. Steiner, Ges. Werke **2**, 724 u. 742 und die Progr. Abhdl. des Ref., besprochen in F. d. M. **2**, 591, 1870). Die fragliche Oberfläche in einem Raume R_n ist daher der Ort des Punktes P, für welchen in Bezug auf einen gegebenen quadratischen Raum $L_{n-1} \equiv \Sigma x_i^2/b_i^2 - 1 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ein Hauptschnitt des einhüllenden Kegels ein rechter Winkel ist. Die allgemeine Methode wird zuerst entworfen, die Einzelheiten werden dann für den Fall $n = 4$ durchgearbeitet. Es ergiebt sich, dass diese Erzeugungsmethode zwar eine Ausdehnung auf den n-dimensionalen Raum gestattet, aber dass diese Verallgemeinerung verwickelterer Art ist als die der beiden gewöhnlichen Erzeugungen (Mannheim in C. R. **78**; F. d. M. **6**, 512, 1874; Schoute in Nieuw Archief (2) **3**; F. d. M. **28**, 587, 1897).

Lp.

G. Ricci. Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions. C. R. **127**, 344-346.

Verf. betrachtet einen R_3 mit quadratischem Bogenelemente und bezeichnet als Riemann'sche Krümmung dieses Raumes in dem Punkte x_1, x_2, x_3 längs der Richtung $dx_1 : dx_2 : dx_3$ die totale Krümmung der geodätischen Fläche, die durch den Punkt geht und auf der Richtung senkrecht steht. Diese Krümmung erhält eine sehr einfache Form, aus der sofort drei Invarianten des Bogenelements ersichtlich werden. Soll das Bogenelement eine transitive Gruppe gestatten, so müssen diese Invarianten constant sein. Ausserdem giebt Verf. noch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass die Gruppe gerade sechs, vier oder drei Parameter enthält. El.

G. Ricci. Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque. C. R. 127, 360-361.

Verf. teilt ohne Beweis die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür mit, dass in einem R_n mit quadratischem Bogenelemente eine continuirliche Gruppe von Transformationen existirt, die das Bogenelement invariant lässt und die eine gegebene Schar von ∞^{n-1} Curven zu Bahncurven hat. Er benutzt dabei Begriffe, die er in einer früheren Abhandlung (F. d. M. **27**, 543, 1896) eingeführt hat. El.

G. Kowalewski. Ueber eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Leipz. Ber. **50**, 1898, 60-111; auch sep. Diss. Leipzig.

Im ersten Abschnitte der Arbeit beweist der Verf. eine Anzahl neuer Sätze über die Gruppen von Punkttransformationen des R_n, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, während sich die Invarianten beliebig vieler Punkte durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen. Es ist das eine Klasse von Gruppen, deren vollständige Bestimmung für den Fall $n = 3$ Lie schon 1890 in den Leipziger Berichten veröffentlicht hat.

Im zweiten Abschnitte bestimmt der Verf. alle Gruppen des R_4, die diese Eigenschaft besitzen, und zwar zunächst ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse. Die primitiven Gruppen dieser Art sind von vorn herein bekannt, es sind die euklidischen und die nicht-euklidischen Bewegungen. Von den imprimitiven beweist er, dass keine solche Gruppe eine Schar von ∞^1 dreifach ausgedehnten oder von ∞^2 zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten invariant lassen kann, ein Satz, der sich überhaupt auf die betreffenden Gruppen des R_n übertragen lässt (bei einer solchen Gruppe kann keine Schar von $\infty^1 M_{n-1}$ oder von $\infty^2 M_{n-2}$ invariant bleiben). Es bleiben daher nur die Gruppen des R_4, die eine invariante Schar von ∞^3 Curven primitiv transformiren, und dabei sind nur zwei Fälle zu unterscheiden, deren Discussion je eine Gruppe von der verlangten Art liefert. Nimmt man auf Realitätsverhältnisse Rücksicht, so erhält man sechs reelle primitive und drei reelle imprimitive Gruppen.

Im dritten Abschnitte endlich bestimmt Verf. im R_5 alle imprimitiven Gruppen der betrachteten Art und findet, dass es nur zwei solche Gruppen giebt. Ausserdem zeigt er noch, dass es überhaupt in jedem $R_n (n > 3)$ sicher zwei imprimitive Gruppen giebt, die seine Forderung erfüllen. Es ist bemerkenswert, dass die Zahl der imprimitiven Gruppen von der betrachteten Art im R_4 und R_5 so sehr viel kleiner ist als im R_3 (vgl. Lie, Transformationsgruppen, Bd. **3**, Kap. 20). El.

R. Banal. **Sugli spazii a curvatura costante.** Rom. Acc. L. Rend. **6**$_2$, 356-362 (1897); **7**$_1$, 7-15.

In dieser Abhandlung werden die Methoden der absoluten Differentialrechnung, welche Ricci begründet hat (vergl. F. d. M. **24**, 371, 1892), auf einige Fragen angewandt, welche mit einer früheren Arbeit des Verf. einigen Zusammenhang besitzen (vergl. F. d. M. **27**, 538, 1896). Um dieselben zu bestimmen, bemerken wir mit Banal, dass im vierdimensionalen Raume R_4 ausser den beiden Mannigfaltigkeiten, welche „Räume constanter Krümmung“ genannt werden, noch eine dritte denselben Namen verdient, da sie zwei gleiche nicht verschwindende Krümmungen hat und die dritte gleich Null. Da die ersteren Riemann'sche und Lobatschewsky'sche Räume genannt werden, die letzte aber durch Ricci zuerst betrachtet wurde (vergl F. d. M. **21**, 264, 1889), so schlägt der Verf. vor, dieselbe Ricci'schen Raum zu nennen (Ricci hatte dafür den Namen „gerader dreidimensionaler Kreiscylinder“ gebraucht). Es wird durch den einen oder den anderen der folgenden

Ausdrücke des Linearelements bestimmt:

$$ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2)$$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

wo c^2 das constante Gauss'sche Krümmungsmass ist. — Während die Riemann'schen und Lobatschewsky'schen Räume keine Deformation in R_4 zulassen, so besitzt der Ricci'sche Raum unendlich viele; und die Aufgabe, alle dreidimensionalen Räume zu bestimmen, welche auf einen Ricci'schen Raum abwickelbar sind, deckt sich mit derjenigen, die Deformationen einer Kugel zu bestimmen. Dieselbe Eigenschaft kommt allen Mannigfaltigkeiten zu, deren Linearelement auf die Form

$$ds^2 = k_1^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1-k_1}}, \qquad \text{wo } k_1 < 1,$$

reducirbar ist; hiermit beschäftigt sich Verf. am Ende seiner Arbeit.

La.

E. Bertini. Sui sistemi di ipersuperficie di S_r aventi le stesse prime polari. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 217-227, 275-281.

In einem n-dimensionalen Raume R_n entspricht jedem Punkte in Bezug auf eine Mannigfaltigkeit V_{r-1}^n eine bestimmte Polar-Mannigfaltigkeit V_{r-1}^{n-1}. Im allgemeinen ist diese Verwandtschaft eine eindeutige; sie hört aber auf, eine solche zu sein, falls V_{r-1}^n ein Kegel ist, d. h. einen n-fachen R_{h-1} besitzt. Verf. beweist aber zuerst, dass dasselbe auch für andere Mannigfaltigkeiten stattfinden kann. Er stellt ferner fest, dass die V_{r-1}^n, welche dieselben Polaren haben, ein lineares System $\varDelta$ bilden; nimmt man zwei solche Mannigfaltigkeiten beliebig und betrachtet als entsprechend zwei Punkte, welche in Bezug auf sie dieselbe Polare haben, so bekommt man eine Projectivität im R_n, deren Erforschung als die Grundlage der Bertini'schen Untersuchungen angesehen werden kann; ein Ordnungspunkt der in Rede stehenden Verwandtschaft ist n-facher Punkt seiner V_r^{n-1} des Büschels, welchen die in $\varDelta$ gewählten V_r^{n-1} bestimmen. Verf. benutzt auf eine geschickte Weise, welche wir hier nicht näher bestimmen wollen, die oben definirten Projectivitäten; so gelangt er zum Schluss, dass die Mannigfaltigkeiten V_r^{n-1}, welche dieselben Polaren besitzen, in Bezug auf ein gewisses System von Quadriflächen apolar sind; alle V_r^{n-1}, welche diese Eigenschaft besitzen, bilden ein System $\varDelta$ oder unendlich viele solcher Systeme. Nicht unerwähnt bleibe, dass eine Abzählung von Constanten glauben lässt, dass die V_{r-1}^n eines Systems $\varDelta$ immer particularisirt sind, eine Induction, welche die Formeln für $r = 1, 2, 3$ leicht bestätigen.

Die Fälle $r = 1, 2$ wurden von dem Verf. schon in einer früheren Arbeit gründlich erforscht (vergl. F. d. M. **28**, 511, 1897). Der Fall $r = 3$ wird in dem zweiten der in Rede stehenden Aufsätze betrachtet, nachdem der Verf. am Ende des ersten die dazu nötigen Materialien gesammelt hat. Er findet, dass nur 13 Systeme $\varDelta$ existiren, wenn man die Fälle ausschliesst, wo die besagten Projectivitäten nicht allgemein sind. — Von diesen Systemen sind fünf ∞^3; die entsprechenden apolaren Quadriflächen sind diejenigen (∞^5), welche einem Tetraeder eingeschrieben sind. Die Gleichungen dieser Systeme in projectiven Coordinaten sind der Reihe nach:

$$\text{I.}\quad \theta_1 x_1^n + \theta_2 x_2^n + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0,$$

$$\text{II.}\quad \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_2^n + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0,$$

$$\text{III.}\quad \theta_1 x_1 x_3^{n-1} + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0,$$

$$\text{IV.}\quad \theta_1 (A x_1 x_3^{n-1} + B x_2^2 x_3^{n-2}) + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0,$$

$$\text{V.}\quad x_4^{n-3}\{\theta_1 (A x_1 x_4^2 + B x_2 x_3 x_4 C x_3^3) + \theta_2 (D x_2 x_4^2 + E x_3^2 x_4) + \theta_3 x_3 x_4^2 + \theta_4 x_4^3\} = 0,$$

wo θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 willkürliche Parameter und $A, \dots, E$ Constanten sind, welche im V. Falle die Bedingungen $A = D^2$, $BE = CD$ erfüllen. — Vier andere Systeme $\varDelta$ sind ∞^{n+2}; die entsprechenden V_2^2 sind zu den ∞^4 Quadriflächen apolar, welche eine Gerade und zwei Ebenen gemeinschaftlich haben; bezeichnet man durch $u_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ eine algebraische Form vom Grade k in den Veränderlichen $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$, só können als Gleichungen jener Systeme die folgenden gewählt werden:

$$\text{VI.}\quad u_n(x_1, x_2) + \theta_1 x_3^n + \theta_2 x_4^n = 0,$$

$$\text{VII.}\quad u_n(x_2, x_3) + \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_4^n = 0,$$

$$\text{VIII.}\quad u_n(x_3, x_4) + \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_2^n = 0,$$

$$\text{IX.}\quad u_n(x_3, x_4) + \theta_1 (A x_1 x_3^{n-1} + B x_2^2 x_3^{n-2}) + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} = 0,$$

wo θ_1, θ_2 und die Coefficienten der Form u_n als Parameter fungiren. — Zwei weitere Systeme $\varDelta$ sind ∞^{2n+1}; die in einem solchen enthaltenen Flächen sind in Bezug auf die ∞^3 Quadriflächen apolar, welche durch zwei feste Gerade gehen; ihre Gleichungen sind:

$$\text{X.}\quad u_n(x_1, x_2) + v_n(x_3, x_4) = 0,$$

$$\text{XI.}\quad x_1 u_{n-1}(x_3, x_4) + x_2 v_{n-1}(x_3, x_4) + w_n(x_3, x_4) = 0.$$

Endlich sind die übrigen Systeme $\infty^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$; jede der constituirenden Flächen ist zu den ∞^2 Flächen zweiter Klasse apolar, von denen eine beliebige aus einem gegebenen Punkte und einem Punkte einer gegebenen Ebene besteht; als Gleichungen dieser Systeme können die folgenden gelten:

$$\text{XII.}\quad u_n(x_1, x_2, x_3) + \theta x_4^n = 0,$$

$$\text{XIII.}\quad u_n(x_1, x_1, x_3) + \theta x_1 x_2^{n-1} = 0.$$

La.

L. Berzolari. Ancora sull'estensione dei teoremi di Eulero et Meusnier agli iperspazii. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 4-6.

Verf. hatte kürzlich die Ausdehnung der Theoreme für den Fall bewiesen, dass die im R_n liegende M_{n-1} in einem beliebigen Punkte durch ebene R_{n-1} geschnitten wird. Er zeigt hier, dass dies auch für den Fall gilt, dass die beiden schneidenden ebenen Räume irgend welche $r < n-1$ Dimensionen haben. Sfs.

L. Berzolari. Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque. Torino Atti **33**, 692-700, 759-778.

Diese Arbeit, eine Fortsetzung zweier früheren Aufsätze desselben Verf. (F. d. M. **28**, 425, 1897, und vorangehendes Referat), ist ein beträchtlicher Beitrag zur Differentialgeometrie des n-dimensionalen Raumes R_n constanter Krümmung $1/k^2$. Als Grundlage derselben muss das bekannte Killing'sche Buch (F. d. M. **17**, 508, 1885) angesehen werden, andere Hülfsarbeiten werden vom Verf. sorgfältig angeführt. Als Hauptzweck mag die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Krümmungstheorie auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension m bezeichnet werden. Nachdem der Verf. einige aus Killing entlehnte Formeln in Erinnerung gebracht hat, erklärt und berechnet er den Wert der Flexion in einem Punkte einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_m, sowie auch die Tangential- und Normalflexion einer in V_m enthaltenen W_h, wo natürlich $h < m$ ist. So setzt er sich in den Stand, den folgenden Satz zu begründen, die vollkommene Ausdehnung eines anderen, der für die Fälle n beliebig, $m = n-1$, $h = 1$, ferner $n = 4$, $m = 2$, $h = 1$ nach Ricci (vgl. F. d. M. **27**, 543, 1896) und Kommerell (F. d. M. **28**, 582, 1897) schon bekannt ist: „Ist in einem n-dimensionalen Raume R_n constanter Krümmung eine beliebige Mannigfaltigkeit gegeben, so ist das Quadrat der Flexion in einem seiner Punkte gleich der Summe der Quadrate der Tangential- und Normalflexion in demselben Punkte". In ähnlicher Weise sind das Meusnier'sche Theorem und eine bekannte Eigenschaft der geodätischen Krümmung einer Curve des gewöhnlichen Raumes in den beiden folgenden Theoremen enthalten: „Wenn auf einer beliebigen V_m von R_n eine W_h gegeben ist, so ist die Flexion von W_h in einem ihrer Punkte O gleich der Flexion in demselben Punkte des Normalschnittes $W_h^{(n)}$ von V_m, welcher mit W_h den Tangentialraum R_h in O gemeinschaftlich hat, dividirt durch den Cosinus des Winkels, welchen die Osculationsräume $(h+1)^{\text{ter}}$ Dimension in O zu W_h und $W_h^{(n)}$ unter einander bilden. Und die Tangentialflexion von W_h in O ist gleich ihrer absoluten Flexion, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, welchen die Osculationsräume in O zu W_h und zu ihrer Projection auf den Tangentialraum m^{ter} Dimension in O zu V_m unter einander bilden".

Diese Sätze werden vom Verf. in seinem ersten Aufsatze durch eine specielle Wahl der Coordinaten begründet; dieselben werden dann

in II wiedergefunden, wo er durch Anwendung der Theorie der quadratischen Differentialausdrücke und eine besondere Benutzung der sogenannten „Christoffel'schen und Riemann'schen Symbole" zu allgemeinen, symmetrischen und eleganten Ausdrücken der oben erwähnten Grössen kommt, in welchen gewisse klassische Formeln der gewöhnlichen Differentialgeometrie stecken, und welche die wichtigsten Eigenschaften derselben Grössen (insbesondere diejenige, Biegungsinvarianten zu sein) in ein klares Licht setzen. La.

F. Palatini. Linee contenute nelle rigate di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. Batt. G. **36**, 368-375.

Verf. entwickelt und benutzt die Theorie der rationalen Regelflächen eines n-dimensionalen Raumes, welche in der Segre'schen Abhandlung „Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque" (F. d. M. **16**, 604, 1884) auseinandergesetzt ist. Durch eine einfache arithmetische Discussion erhält er alle Curven einer Ordnung $> n$, welche in einer solchen Regelfläche enthalten sind; die so gewonnenen Resultate können nicht in einen hinreichend kurzen Ausdruck zusammengedrängt werden. La.

B. Levi. Sulla varietà delle corde di una curva algebrica. Torino Mem. (2) **48**, 83-142.

Die in dieser Abhandlung niedergelegten Untersuchungen betreffen eine algebraische ein-dimensionale Mannigfaltigkeit C, welche in einen linearen Raum Σ der Dimension $n \geqq 3$ eingetaucht ist. Verbindet man die Punkte von C zu je zweien, so erhält man eine neue algebraische zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit, von der jedes Element eine „Sehne" von C ist. Unter diesen verdienen die sogenannten uneigentlichen Sehnen eine besondere Betrachtung; jede enthält zwei nicht verschiedene Punkte von C. Durch jeden n-fachen Punkt P von C gehen unendlich viele solcher Sehnen, welche einen algebraischen Kegel bilden: dieser aber zerfällt immer in eine gewisse Anzahl von Ebenen (Hauptebenen nach des Verf. Benennung); einige der Erzeugenden des Kegels schneiden C noch ausser in P. Benutzt man die Reihenentwickelungen der durch P gehenden Curvenzweige, so sieht man die Notwendigkeit, die uneigentlichen Sehnen, welche auf einen einzigen Curvenzweig Bezug haben, von denjenigen zu unterscheiden, welche zwei betreffen; dieselbe Betrachtung führt auf die Erklärung der „Mannigfaltigkeit" einer Sehne. Solche und ähnliche Begriffe werden vom Verf. in dem I. Kapitel (Einleitung) seiner Arbeit erklärt; in dem II. aber (Analytische Untersuchungen) begründet er abermals durch Benutzung der Reihenentwickelungen zwei Gruppen von Sätzen, deren eine die uneigentlichen Sehnen zum Gegenstand hat, welche einen einzigen Zweig betreffen, während die andere die übrigen behandelt. Führen wir die wichtigsten an:

„In Bezug auf einen Curvenzweig ν^{ter} Ordnung und eine einzige ν^{te} von 1 verschiedene Einheitswurzel existirt eine und nur eine Hauptebene des Zweiges, welche Träger eines Büschels uneigentlicher Sehnen ist, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Zweiges liegt. Die Hauptebene geht durch die Tangenten zum Zweige und kann eine specielle uneigentliche Sehne enthalten, d. h. eine solche, die eine grössere Vielfachheit besitzt als die übrigen uneigentlichen Sehnen jenes Büschels. Auf einer speciellen uneigentlichen Sehne kann man einen und nur einen speciellen Punkt finden, in Bezug auf welchen die Sehne eine grössere Vielfachheit besitzt als in Bezug auf die anderen.“ „Man betrachte zwei Curvenzweige, welche denselben Ursprung P und die Ordnungen ν, $\bar{\nu}$ haben, und nenne N den grössten gemeinschaftlichen Teiler von ν, $\bar{\nu}$ und θ eine N^{te} Einheitswurzel; in Bezug auf diese zwei Zweige und die Einheitswurzel existirt eine einzige Hauptebene des Paares, welche durch die gemeinschaftliche Tangente der Zweige in P geht und der Träger eines Büschels von uneigentlichen Sehnen mit P als Mittelpunkt ist. Diese Hauptebene kann eine und nur eine uneigentliche specielle Sehne enthalten; nur eine solche kann specielle Punkte enthalten. Die Hauptebenen des Zweigpaares können in zwei Klassen verteilt werden, u. s. w.“

Das dritte Kapitel (Hülfssätze) enthält eine Reihe von Theoremen, welche zwei für das Folgende nützliche Abbildungen betreffen. Die eine dieser Abbildungen ist allgemein bekannt: Stellt man eine Gerade von Σ mittels der Grassmann'schen Coordinaten dar, so kann man jeder Geraden von Σ einen Punkt einer Mannigfaltigkeit $M_{2(n-1)}$ eines $R_{\frac{1}{2}n(n+1)-1}$ entsprechen lassen; die erste Gruppe von Sätzen, welche der Verf. beweist, ist eben diesem Entsprechen gewidmet. Die zweite betrifft Folgendes: Man betrachte in Σ eine Mannigfaltigkeit Φ m^{ter} Ordnung und $(n-1)^{ter}$ Dimension; durch eine birationale Transformation werde Σ in Σ' und Φ in Φ' transformirt; m' sei die Ordnung von Φ'; jede Gerade g von Σ schneidet Σ in m Punkten, denen m Punkte von Φ' in Σ' entsprechen, welche zu je zwei durch $\frac{1}{2}m(m-1)$ Gerade g' verbunden werden: so entsprechen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Gerade g' von Σ' jeder Geraden g von Σ; umgekehrt entsprechen $\frac{1}{2}m'(m'-1)$ Gerade g von Σ jeder Geraden g' von Σ'. Es entsteht daher zwischen den Geradenräumen Σ und Σ' eine Transformation $T(\frac{1}{2}m'(m'-1), \frac{1}{2}m(m-1))$, welche der Verf. eingehend erforscht, sowohl im allgemeinen als in dem besonders bemerkenswerten Falle, wo Φ aus zwei linearen Räumen besteht.

Das letzte Kapitel (Synthetische Untersuchungen) vervollständigt das zweite durch die geometrische Interpretation einiger in §§ 2 und 3 auseinandergesetzten Resultate; die behandelten Gegenstände kann man aus der folgenden Inhaltsübersicht ersehen: § 6. Vielfachheit der uneigentlichen Sehnen; Mannigfaltigkeiten, welche die Mannigfaltigkeit der Sehnen längs einer uneigentlichen Sehne berühren. § 7. Auflösung der singulären Punkte einer algebraischen Curve; eine Anwendung des Begriffes der uneigentlichen Sehne (Erweiterung der bekannten Formel,

welche den Rang einer Curve unserer Räume angiebt, auf Curven mit beliebigen Singularitäten). §. 8. Erzeugung der uneigentlichen Sehnen durch quadratische Transformationen. § 9. Erzeugung der uneigentlichen Sehnen durch Projection. — Einige Betrachtungen über die dualen Eigenschaften schliessen die inhaltsreiche Arbeit. La.

J. Hadamard. Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 85-87.

„Die Krümmung eines Linienelementes von n Variablen ist nach ihrer Definition von Riemann nichts weiter als die Krümmung derjenigen zweidimensionalen Oberfläche in einem bestimmten Punkte O, welche von den vom Punkte O ausgehenden Geodätischen der Mannigfaltigkeit gebildet wird, deren Anfangsrichtungen in einer und derselben (zweidimensionalen) Ebene liegen. Um die früher der Gesellschaft mitgeteilten Untersuchungen auf die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen auszudehnen, habe ich diesen Begriff verallgemeinern und die Krümmung einer beliebigen Oberfläche studiren müssen, welche durch Geodätische des gegebenen Linienelementes erzeugt wird.“ Lp.

J. Hadamard. Sur les éléments infinitésimaux du second ordre dans les transformations ponctuelles. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 11-15.

Es wird gefragt, ob in einem Raume von n Dimensionen bei zwei hinter einander ausgeführten Transformationen für die Coefficienten der Differentiale zweiter Ordnung ähnliche Beziehungen sich aufstellen lassen, wie bei einem Raume von zwei Dimensionen, wo man für die Determinanten δ, δ' der einzelnen Transformationen und δ'' der componirten Transformationen die Beziehung hat $\delta'' = \delta\delta'$. Wie der Verf. bemerkt, handelt es sich um invariante Untergruppen einer Transformationsgruppe; die Untersuchung wird daher mit Hülfe der Lie'schen Theorie durchgeführt. Lp.

H. W. Curjel. Question 13395. Ed. Times 68, 39-40.

Ein n-dimensionaler euklidischer Raum werde mit R_n bezeichnet. Beschreibt man in R_n p verschiedene R_{n-1}, so teilen dieselben im allgemeinen R_n in v_n endliche und u_n unendliche Abteile, wo

$$v_n = \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!},$$

$$u_n = 2\left\{1+p-1+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}+\cdots\right\},$$

die letztere Summe auf n Glieder erstreckt. Lp.

C. Carrone. Le trasformazioni birazionali fra due spazî ad n dimensioni, con particolare considerazione al caso di $n = 4$. Accad. Gioenia Atti (4) **11**, No. VIII, 62 S. [Bollet. Acc. Gioenia **52**, 15.]

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

T. Cifarelli. Sull'analisi intrinseca delle congruenze. Batt. G. **36**, 145-160.

Die Bedeutung des Aufsatzes liegt wesentlich in der befolgten Methodik: die wichtigsten Eigenschaften der Strahlencongruenzen nach dem Verfahren der „geometria intrinseca" herzuleiten. Lp.

G. Bordiga. Sulla classificazione delle congruenze. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 28-31.

Durch Anwendung einer Abbildung der Geraden des gewöhnlichen Raumes auf die Punkte eines linearen vierdimensionalen Raumes erhielt R. Schumacher eine Klassification der algebraischen Strahlensysteme, bei der vier Zahlen die Hauptrolle spielen (vergl. F. d. M. **22**, 818, 1890). Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, zu beweisen, dass man denselben Zweck ohne die mehrdimensionale Geometrie erreichen kann. Der Verf. bemerkt ferner die Ausdehnbarkeit seiner Untersuchungsmethode auf die algebraischen Systeme von ∞^{n-1} Strahlen des R_n.

La.

E. Veneroni. Sopra una classe di superficie-complesso. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 257-267.

In einer Ebene ω sei ein Büschel von Curven n^{ter} Ordnung gegeben; jeder Curve lässt man einen Punkt einer willkürlichen Geraden r entsprechen, so dass der Schnittpunkt O von r mit ω der durch O gehenden Curve entspricht. Die Geraden, welche die Punkte von r mit den Punkten der zugeordneten Curven verbinden, bilden eine specielle Congruenz n^{ten} Grades. Die Abbildung derselben auf der Ebene ω wird betrachtet, ferner ihre Brennfläche als auf r bezügliche Complexoberfläche.

Lp.

E. Veneroni. Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso generale di terzo grado. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 1072-1088.

Jeder einem geradlinigen Complexe dritten Grades angehörige Strahlenbüschel bestimmt eine gewisse Congruenz neunten Grades, die einen Teil des Complexes ausmacht. Diese Congruenz entspricht eindeutig den Punkten der Ebene jenes Büschels und den durch seinen

Mittelpunkt gehenden Ebenen. Die Abbildung dieser Congruenz auf einer Ebene wird behandelt; ferner werden die geradlinigen, dem besagten Büschel zugeordneten kubischen Oberflächen betrachtet.

Lp.

C. Guichard. Sur les congruences conjuguées aux réseaux C. C. R. **126**, 718-721.

C. Guichard. Sur les congruences qui sont de plusieurs manières des congruences K. C. R. **126**, 1011-1013.

C. Guichard. Sur les congruences rectilignes. C. R. **126**, 1183-1185.

C. Guichard. Sur les surfaces minima. C. R. **126**, 1487-1489.

Zunächst sei bezüglich der Bezeichnungen, deren sich der Verf. in den vorliegenden vier Noten bedient, und welche auch im Referate zur Verwendung kommen sollen, auf seine inhaltsreiche Arbeit „Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques" (Ann. de l'Éc. Norm. 1897, 1898), sowie auf die eingehende Besprechung, welche seinen vorjährigen Noten aus den C. R. in diesem Jahrbuch (1897, 590) zuteil wurde, verwiesen (vergl. auch S. 524 dieses Bandes). In der ersten Note wird zuerst ein in der citirten Arbeit (1898, 218) auch schon bewiesener Satz hergeleitet: Ist K eine Congruenz des dreidimensionalen Raumes, welche einem Netze C (cyklisches Netz) conjugirt ist, so sind die der Congruenz K conjugirten Netze C, $2C$ oder $3C$. Um die Verteilung der Netze zu untersuchen, wird der Satz benutzt, dass jede Congruenz K des dreidimensionalen Raumes auf eine Congruenz K' des fünfdimensionalen Raumes abwickelbar ist; hieraus ergiebt sich: Die Netze C einer Congruenz K entsprechen den Schnittpunkten von K' mit der Ebene:

$$p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \cdots + p_5 Y_5 = \text{const.}; \quad p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_5^2 = 0;$$

die Netze $2C$ entsprechen den Schnittpunkten von K' mit der Ebene:

$$p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \cdots + p_5 Y_5 = \text{const.}; \quad p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_5^2 \gtrless 0;$$

die anderen Netze sind $3C$.

Der Ausgangspunkt der zweiten Note ist die Frage, ob eine Congruenz K des dreidimensionalen Raumes (d. h. eine Congruenz, welche einem Netze C conjugirt ist) etwa auf mehrere verschiedene Congruenzen des fünfdimensionalen Raumes abwickelbar sein kann; auf eine Congruenz des fünfdimensionalen Raumes ist sie stets abwickelbar. Die Ergebnisse, zu welchen Guichard gelangt, sind folgende: Wenn eine Congruenz auf zwei Weisen eine Congruenz K ist, so ist sie es auf unendlich viele Arten. Die Aufsuchung der Congruenzen, die mehrfach K sind, ist identisch mit dem Problem von Ribaucour für den fünfdimensionalen Raum (vergl. F. d. M. **28**, 591, 1897). Jedes Netz C einer Congruenz, die mehrfach K ist, ist: C, C oder C, $2C$ oder C, $3C$. Jede Congruenz, die einem Netze C, C conjugirt ist, ist mehrfach K.

Jedes Netz C, $2C$ ist auch auf unendlich viele Arten $2C$ oder $3C$; jedes Netz C, $3C$ ist auf unendlich viele Arten $3C$.

Die dritte Note knüpft an die Ergebnisse der vorjährigen Note in C. R. „Sur le problème de Bonnet" an. Dort hatte Guichard gezeigt, dass jede Congruenz O, die einem Netze C conjugirt ist, durch die Normalen von Netzen J gebildet wird. (J-Netze sind solche, welche den Krümmungslinien einer Isothermfläche parallel sind.) Hier wird nachgewiesen, dass die Normalen eines Netzes J eine Congruenz bilden, die auf unendlich viele Arten K ist. Hieraus kann vermöge der Resultate der voraufgegangenen Note die Art der J-Netze näher bestimmt werden, und es ergeben sich Transformationen der Isothermflächen in neue.

Die letzte Note ist der Untersuchung der Netze M gewidmet. Unter einem Netze M ist ein Netz O, dessen sphärische Abbildung isotherm ist, zu verstehen; solche Netze M besitzen die Minimalflächen. Die Normalen eines Netzes M bilden eine Congruenz K und O, man hat es daher hier mit einem Specialfalle der in der vorigen Note untersuchten Netze zu thun. Zunächst ergiebt sich, dass jedes Netz M auf unendlich viele Arten $2C$ ist. Diese Untersuchungen stehen in innigstem Zusammenhange mit Netzen auf Paraboloiden und der neuen von Thybaut gefundenen Klasse von Isothermflächen. (F. d. M. **28**, 566, 1897.) Ly.

A. Pell. On the focal surfaces of the congruences of tangents to a given surface. American J. **20**, 101-134.

Die Arbeit beschäftigt sich vorzüglich mit den Brennflächen derjenigen Liniencongruenzen, welche von den Tangenten an die Krümmungslinien einer Fläche Σ gebildet werden; die Krümmungslinien, auf welche die Fläche bezogen wird, mögen kurz als u- und v-Linien bezeichnet werden. Es seien ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien, h_1 und h_2 die absoluten Krümmungsradien, R_2 und R_1 die Radien der geodätischen Krümmung der u- bez. v-Linie, also: $h_1 = \varrho_1 \cos\varpi_1$, $h_2 = \varrho_2 \cos\varpi_2$, $h_1 = R_2 \sin\varpi_1$, $h_2 = R_1 \sin\varpi_2$, ferner t_1 und t_2 die Radien der geodätischen Torsion, r_1 und r_2 die Torsionsradien der u-, bez. v-Linien. Die zwei Brennflächen S_1 und S_2 lassen sich mit Hülfe zweier von Koenigs und Darboux (Théorie des surfaces **3**, 121) stammenden Theoreme behandeln. Bezeichnen ds_1 und ds_2 die Bogenelemente der u-, bez. v-Linien auf Σ, ds'_1 und ds'_2 die Linienelemente von S_1, bez. S_2, so wird:

$$ds_1'^2 = (dR_1 + ds_1)^2 + \frac{R_1^2}{h_1^2} ds_1^2,$$

$$ds_2'^2 = (dR_2 + ds_2)^2 + \frac{R_2^2}{h_2^2} ds_2^2.$$

Hieraus geht hervor, dass die entsprechenden Brennflächen aller Flächen, bei denen entweder R_1/h_1 oder R_2/h_2 durch dieselbe Function von

R_1+s_1 und s_1 oder R_2+s_2 und s_2 ausgedrückt ist, auf einander abwickelbar sind. Ist $h_1=f(R_1)$, so kann die Bestimmung der isometrischen wie aller geodätischen Linien von S_1 durch Quadraturen ausgeführt werden; in diesem Falle gilt auch ein Satz von Caronnet (C. R. **115**, 589-592: Sur les centres de courbure géodésique. F. d. M. **24**, 732, 1892). Ist $h_1=f(s_1)$, so wird die Brennfläche S_1 eine abwickelbare Fläche.

An die Betrachtung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von S_1 und S_2 schliesst sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Asymptotenlinien von S_1 und S_2 den Krümmungslinien von Σ entsprechen; dazu muss Σ ebene Krümmungslinien besitzen. Die Untersuchung der Flächen Σ, deren Asymptotenlinien denen von S_1 entsprechen, führt auf ein Theorem von Cosserat und Demoulin (F. d. M. **25**, 1287, 1894). Notwendig und hinreichend hierfür ist die Relation: $\varrho_1\varrho_2\varrho'_1\varrho'_2=\left(\frac{R_1\varrho_1}{h_1}\right)^4$; hierbei sind ϱ'_1 und ϱ'_2 die Hauptkrümmungsradien von S_1. Charakteristisch für das Entsprechen der Krümmungslinien von Σ und S_1 ist das Bestehen der Beziehung: $\varrho'_1=R_1\tau_1/h_1$. Diese Frage ist schon von Guichard (Ann. de l'Éc. Norm. 1890) in Zusammenhang mit den Flächen constanter totaler Krümmung behandelt worden. Haben S_1 und S_2 entsprechende Krümmungslinien, so erfordert dies auch, dass sich die Asymptotenlinien entsprechen; das Umgekehrte ist nicht notwendig. Zum Schluss werden noch Congruenzen von geraden Linien behandelt, die irgend eine gegebene Familie von Curven auf Σ berühren. Ly.

C. Tzitzéica. Sur les systèmes cycliques. Darboux Bull. (2) **22**, 172-173.

Die Note ist dem Nachweis des folgenden Satzes gewidmet: Betrachtet man eine Congruenz, bei welcher die über dem Focalsegment als Durchmesser beschriebene Kugel orthogonal zu einer festen Kugel ist, so ist die Congruenz cyklisch. Das so erhaltene cyklische System ist das allgemeinste, welches aus Kreisen besteht, die orthogonal zu einer festen Kugel und einer willkürlichen Fläche sind. Ly.

C. Tzitzéica. Sur un théorème de M. Cosserat. C. R. **127**, 167-168.

Verf. beweist folgenden Satz: Betrachtet man eine Congruenz C und lässt jeder Geraden D von C die Berührungssehne $\varDelta$ der über dem Focalsegment von D als Durchmesser beschriebenen Kugel mit ihrer Enveloppe entsprechen, so ist, wenn auf der Geraden $\varDelta$ ein Punkt μ existirt, welcher eine Fläche beschreibt, deren Normale in μ parallel zu D ist, die Congruenz cyklisch. Aus diesem Satze über das allgemeine cyklische System ergiebt sich ein Satz von Cosserat, welcher von einem System handelt, das gleichzeitig cyklisch und ein Ribaucour'sches ist. Ly.

J. Hadamard. Sur une congruence remarquable et sur un problème fonctionnel qui s'y rattache. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 19-24.

Die Congruenz ist die von Waelsch in Wien. Ber. **95,** 781 (F. d. M. **19,** 850, 1887) behandelte, welche aus den gemeinschaftlichen Loten aller Erzeugenden derselben Schar bei einem einschaligen Hyperboloid gebildet wird; zu dieser ersten Congruenz K steht in einfacher Beziehung K', die in gleicher Weise aus den Erzeugenden der zweiten Schar des Hyperboloids entspringt. Eine beliebige Gerade der einen Congruenz schneidet alle diejenigen der anderen Congruenz, zu denen sie rechtwinklig ist. Diese letzteren bilden ein Konoid, wie schon Waelsch bemerkt hat; dasselbe ist nach dem Verf. kein anderes als das Plücker'sche Konoid, oder das Cylindroid, für welches damit eine einfache Erzeugung gewonnen ist. Die Congruenz K umfasst somit eine ∞^2-Schar von Konoiden, indem die Axe eines dieser Konoide eine beliebige Gerade der Congruenz K' ist. Diese Eigenschaft charakterisirt die beiden Congruenzen K und K'; der Verf. zeigt dies, indem er zwei Congruenzen aufsucht von der Art, dass die Geraden der einen alle diejenigen der anderen schneiden, die zu ihnen senkrecht sind. Die analytische Behandlung führt auf eine Functionalgleichung, deren Lösung das gewünschte Ergebnis in sich schliesst. Lp.

G. Candido. Conséquence d'un théorème sur les congruences pseudosphériques. Nouv. Ann. (3) **17,** 275-277.

Aus einem von Bianchi in seinen Lezioni di Geometria differenziale (S. 269) bewiesenen Theorem über pseudosphärische Congruenzen wird folgender Satz hergeleitet: Es giebt eine unendliche Anzahl von Oberflächen, welche eine derartige Abbildung auf die Kugel zulassen, dass gleichzeitig sowohl die Orthogonalität eines Curvensystems (u, v) wie auch die Flächenelemente erhalten bleiben; unter diesen unendlich vielen Flächen giebt es auch Schrauben- und Rotationsflächen.

Ly.

D. Montesano. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette. Annali di Mat. (3) **1,** 313-357.

Folgende drei Probleme werden behandelt: I. Wenn $k_1, k_2, \ldots, k_m$ m lineare Strahlencomplexe sind, das System derjenigen Strahlenbüschel zu untersuchen, bei denen die den gegebenen Complexen angehörigen Strahlen bezw. $r_1, r_2, \ldots, r_m$ eine zu einer gegebenen Gruppe eines fundamentalen geometrischen Gebildes erster Stufe projective Gruppe bilden, für $m = 4, 5, 6, 7, 8$. II. In einem linearen Strahlencomplexe nimmt man n lineare Congruenzen heraus ($n = 4, 5, 6$); das System derjenigen Strahlenbüschel des Complexes zu untersuchen, bei denen die zu den gegebenen Congruenzen gehörigen Strahlen bezw. $r_1, r_2, \ldots, r_n$

eine zu einer gegebenen Gruppe eines fundamentalen geometrischen Gebildes erster Stufe projective Gruppe bilden. III. Wenn fünf lineare Strahlencomplexe gegeben sind, die Curve zu untersuchen, welche der Ort eines Punktes ist, dem in den Complexen solche Ebenen entsprechen, welche eine zu einer Gruppe von fünf durch einen gegebenen Punkt gehenden Ebenen homographische Gruppe bilden, und die Eigenschaften der von den Raumcurven des bezeichneten Typus gebildeten linearen Congruenz aufzufinden. Lp.

D. Sintsof. Théorie des connexes dans l'espace. Darboux Bull. (2) **22**, 227-228.

Bericht über ein in russischer Sprache erschienenes Werk, welches der Verf. selbst schon in F. d. M. **27**, 546, 1896 besprochen hat. Ly.

V. Snyder. Geometry of some differential expressions in hexaspherical coordinates. American M. S. Bull. (2) **4**, 144-154.

Der Verf. bezeichnet seine Arbeit als einen Anhang zu seiner Göttinger Dissertation: „Ueber die linearen Complexe der Lie'schen Kugelgeometrie", die der Redaction nicht eingesandt ist und daher in F. d. M. **26**, 769, 1895 nur mit dem Titel angezeigt ist. Die Form der sechs homogenen Coordinaten x_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$ ist so gewählt, dass sie der Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$ genügen, wobei zwei der Coordinaten imaginär sein müssen, wenn jene Gleichung eine reelle Kugel darstellen soll. Die untersuchten Differentialausdrücke entsprechen den von F. Klein in der Liniengeometrie benutzten. Ist $\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$, wo f einen homogenen Ausdruck n^{ter} Ordnung der Variablen $x_1, \dots, x_6$ bedeutet, so stellt $f(x_1, \dots, x_6) = 0$ die ∞^3 Kugeln dar, welche ihren Punktort berühren. Ist $\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$, so sind die gemeinschaftlichen Kugeln von $f = 0$ und $\varphi = 0$ die Hauptkugeln ihrer Brennfläche. Wenn die Combinante dreier Complexe verschwindet, umhüllen ihre gemeinschaftlichen Kugeln eine Curve statt einer Ringfläche. Auf den quadratischen Complex angewandt, ergiebt sich das System confocaler Cykliden mit ihren Focalcurven und Krümmungslinien ohne den Gebrauch von Punktcoordinaten. Lp.

E. Müller. Die Geometrie orientirter Kugeln nach Grassmann's Methoden. Monatsh. f. Math. **9**, 269-315.

Bericht auf S. 488 dieses Bandes.

Kapitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

G. Fano. Ueber Gruppen, insbesondere continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes. Monatsh. f. Math. **9**, 17-29.

Der vorliegende Aufsatz wurde als Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Congress in Zürich (1897) gehalten; er behandelt zuerst kurz die ältere Litteratur über birationale oder Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes, um dann vorzüglich auf die gruppentheoretischen Untersuchungen aus der Theorie der Cremona-Transformationen einzugehen. Verf. bespricht einerseits die endlichen (d. h. die aus einer endlichen Anzahl von Transformationen bestehenden), andererseits die continuirlichen Gruppen im Sinne von Lie. Die Untersuchungen über endliche Gruppen in der Ebene, welche von den periodischen und vorzüglich den involutorischen Cremona-Transformationen ihren Ausgang nahmen, lassen sich in zwei Klassen einteilen, nämlich solche, bei denen die Ordnung (Autonne) und solche, bei denen die Aufzählung sämtlicher verschiedenen Typen ohne Rücksicht auf die Ordnung (S. Kantor und Wiman) die Hauptrolle spielt; für die Beantwortung der analogen Fragen im Raume ist noch wenig gethan. Auch bezüglich der continuirlichen Gruppen von Cremona-Transformationen sowohl der Ebene wie des Raumes können die erwähnten zwei Richtungen unterschieden werden. Noether hat sich (F. d. M. **28**, 598, 1897) mit einer Frage, die in das Gebiet der Ordnung schlägt (nämlich der Aufzählung der fünf verschiedenen Arten von continuirlichen Gruppen quadratischer Transformationen) beschäftigt; Untersuchungen von Enriques und Fano haben die Frage nach den Typen erledigt. Die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchungen, dass jede Gruppe von Cremona-Transformationen der Ebene birational in eine von drei verschiedenen Kategorien (projective, Gruppen quadratischer Transformationen und Gruppen von Jonquières) und jede Gruppe von Cremona-Transformationen des Raumes in eine von fünf verschiedenen Typen (projective, conforme, verallgemeinerte Jonquières'sche und zwei dreigliedrige Gruppen dritter, bez. siebenter Ordnung) birational übergeführt werden kann, werden in besonders eingehender Weise besprochen; die primitiven Gruppen werden dabei von den imprimitiven abgesondert. Zum Schluss werden einige Resultate über verallgemeinerte Jonquières'sche Gruppen angegeben und verschiedene Fragen für die Cremona-Transformationen des R_n aufgeworfen. Vor allen Dingen wäre die Erledigung der Frage erwünscht,

ob es für $n > 2$ ein dem alten Noether'schen Satze (Erzeugung aller Cremona-Transformationen der Ebene durch quadratische) ähnliches Theorem über einfache erzeugende Operationen sämtlicher Cremona-Transformationen des R_n giebt (vergl. die folgenden Referate). Ly.

G. Fano. Ueber Gruppen, insbesondere continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes. Verh. des intern. Math.-Congr. **1**, 1897, 254-255.

Jede continuirliche Gruppe von Cremona-Transformationen eines R_n ist einer projectiven Gruppe einer rationalen M_n in einem gewissen R_m $(m \geqq n)$ aequivalent (vergl. das vorangehende Referat). Sfs.

G. Fano. I gruppi di Jonquières generalizzati. Torino Mem. (2) **48**, 221-278.

In einer gemeinsamen Arbeit (F. d. M. **28**, 598, 1897) hatten Enriques und Fano eine Klassification aller continuirlichen Gruppen von Cremona'schen Transformationen des R_3 gegeben. Sie haben aber damals die Gruppen, die der einen ihrer vier Klassen angehören, noch nicht aufgezählt, was jetzt Fano ausführt. Es handelt sich um die Gruppen, die durch birationale Transformationen so umgeformt werden können, dass sie entweder einen Ebenenbüschel oder einen Geradenbündel oder auch beides zugleich invariant lassen. Das sind die verallgemeinerten Jonquières'schen Gruppen. Verf. findet, dass jede Gruppe dieser Art birational in eine von 12 vollständig bestimmten Gruppen oder in eine der zugehörigen Untergruppen übergeführt werden kann. El.

G. Fano. Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio. Rom. Acc. L. Rend. (5) **7**$_1$, 302-308.

Verf. bespricht die Gruppen von Cremona'schen Transformationen des R_3, die unter den von Lie in Bd. **3** der Transformationsgruppen, Kapitel 8, bestimmten imprimitiven Gruppen des R_3 vorkommen, und zeigt, dass alle diese Gruppen entweder zu den von ihm und von Enriques aufgezählten Gruppen (F. d. M. **28**, 598, 1897 und vorangehendes Referat) gehören oder in solchen als Untergruppen enthalten sind. El.

G. Fano. Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio. Rom. Acc. L. Rend. (5) **7**$_1$, 332-340.

Vollständige Aufzählung aller continuirlichen Gruppen von Cremona'schen Transformationen des R_3, die in keinen grösseren Gruppen dieser Art enthalten sind, mit Angabe der infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppen. Verf. stützt sich dabei auf die in F. d. M. **28**, 598, 1897 und in den vorangehenden Referaten besprochenen Ar-

beiten und vervollständigt damit zugleich die Ergebnisse der vorhergehenden. El.

G. Fano. I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio. Torino Atti **33**, 480-504.

In Wiederaufnahme der vom Verf. in Gemeinschaft mit Enriques geführten Untersuchung (Annali di Mat. (2) **26**, 59-98; F. d. M. **28**, 598, 1897) beweist der Verf. den für die aufgestellte Reduction wichtigsten Satz von neuem und führt die entsprechenden Gruppen auf neun typische Gruppen zurück, von denen acht dieselben sind wie die von Lie unter dem Gesichtspunkte der Punkttransformationen aufgezählten verschiedenen Gruppen; die neunte ist die Gruppe der ∞^6 conformen Transformationen, welche eine gegebene Kugel in sich selbst überführen. Lp.

E. W. Rettger. Note on the projective group. American Ac. Proc. **33**, 493-499.

Verf. geht aus von der Bemerkung, dass nicht jede endliche Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe in der Ebene von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist. Er schreibt diese Bemerkung Study zu, scheint also die Arbeit in den Leipziger Berichten von 1892, die er citirt, gar nicht gelesen zu haben. Er wirft dann eine Frage auf, die allerdings untersucht zu werden verdient. Er denkt sich nämlich im Raume der adjungirten Gruppe $\mathfrak{G}$ einer r-gliedrigen Gruppe G_r zwei Punkte, die zwei innerhalb G_r gleichberechtigte infinitesimale Transformationen im Sinne von Lie darstellen, und fragt, ob nicht unter Umständen jede in der adjungirten Gruppe enthaltene Transformation, die den einen Punkt in den andern überführt, zu denen gehören kann (singuläre Transformationen nennt sie Verf.), die von keiner infinitesimalen Transformation der adjungirten Gruppe erzeugt sind. Es ist ihm jedoch nicht gelungen, ein Beispiel aufzufinden, in dem dieser Fall wirklich eintritt, obwohl er die projectiven Gruppen der Ebene und die linearen homogenen Gruppen des R_3, die singuläre Transformationen enthalten, alle untersucht hat. Im Verlaufe seiner Arbeit bespricht er eine Anzahl von solchen Gruppen und giebt am Schlusse eine Tabelle von ihnen. El.

A. Demoulin. Sur les relations entre les éléments infinitésimaux de deux figures homographiques ou corrélatives. C. R. **126**, 390-392.

Vermöge einer homographischen Transformation entspricht einer jeden Curve wieder eine Curve; bei der Correlation kann man einer jeden Curve die Rückkehrcurve der abwickelbaren Fläche zuordnen, welche der Curve infolge der Correlation entspricht. Verf. giebt Relationen zwischen den Krümmungsradien und den Radien der Torsion in zwei vermöge der erwähnten Transformation entsprechenden Punkten

von zwei zugeordneten Curven an. Wir wollen uns hier darauf beschränken, nur eine für die Correlation gültige Formel anzugeben. Es seien C irgend eine Curve, C' die Rückkehrcurve der abwickelbaren Fläche, welche C infolge der Correlation entspricht, M ein beliebiger Punkt auf C, M' der M entsprechende Punkt auf C'; dann ist, wenn τ und τ' die Radien der Torsion in M und M' bedeuten:

$$\tau\tau' = \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{\omega^2}.$$

x, y, z sind die Coordinaten des Punktes M bezüglich dreier Axen, welche drei conjugirte Durchmesser eines Kegels Γ sind; diesem Kegel Γ soll vermöge der Correlation der unendlich ferne Kugelkreis entsprechen. ω ist der Abstand der Spitze des Kegels Γ von der Osculationsebene an die Curve C in M. Schliesslich ist:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

die Gleichung des Kegels Γ. Wenn der Kegel in einen Cylinder übergeht, so erleidet die Formel eine Modification. Ly.

S. Kantor. Théorème fondamental sur les transformations birationnelles à coefficients entiers. C. R. **126**, 946-949.

Die Kantor'sche Note beschäftigt sich mit der Zerlegung der arithmetischen birationalen Transformationen in Transformationen derselben Art. Unter einer arithmetischen birationalen Transformation soll dabei eine Transformation:

$$x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_{r+1} = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \ldots : \Phi_{r+1}(x)$$

verstanden werden, bei welcher die Φ ganze rationale homogene Functionen der Variablen x mit ganzzahligen Coefficienten sind und die eindeutige Umkehrung:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{r+1} = \Phi'_1(x') : \Phi'_2(x') : \ldots : \Phi'_{r+1}(x')$$

für die Φ' nur rationale Coefficienten ergiebt. Bei drei homogenen Variablen, mit denen sich Kantor weiterhin ausschliesslich beschäftigt, gilt für birationale Transformationen, wenn man auf die arithmetische Natur der Coefficienten keine Rücksicht nimmt, bekanntlich der Noether'sche Fundamentalsatz, dass sich jede birationale Transformation aus quadratischen zusammensetzen lässt. Die hier betrachtete Zerlegung wird natürlich weniger einfach; trotzdem kann, wie Kantor angiebt, jede birationale arithmetische Transformation stets in eine endliche Anzahl von wohlbestimmten, nämlich sechzehn vom Verf. aufgezählten Klassen birationaler arithmetischer Transformationen zerlegt werden. Will man eine Zerlegung der arithmetischen birationalen Transformationen in quadratische birationale Transformationen vornehmen, so sind diese letzteren nicht ausnahmslos arithmetisch birational, sondern es werden Irrationalitäten eingeführt; über die Art der Irrationalitäten gestatten die

aufgezählten sechzehn Typen, aus denen jede birationale arithmetische Transformation componirbar ist, Schlüsse zu ziehen. Ly.

A. Emch. On circular transformations. Annals of Math. **12**, 141-160.

Die Steiner'schen Aufgaben über Kreisreihen werden mit Hülfe des Princips der reciproken Radien gelöst, eines Princips, das übrigens Steiner selbst zu jenen Aufgaben geführt haben mag. Js.

P. Cassani. Sulla corrispondenza quadratica. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 30-34.

Es seien r_1 und r_2 zwei feste Geraden, ϱ_1 und ϱ_2 ihre Polaren bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung Q, a_1 eine Transversale von r_1 und r_2, a_2 die zu a_1 conjugirte Transversale von ϱ_1 und ϱ_2. Die quadratische Verwandtschaft, um die es sich handelt, entsteht durch die Punkte A_1 und A_2, in denen a_1 und a_2 eine feste Ebene α treffen. Lp.

G. Frattini. Di alcune condensazioni dello spazio entro una sfera infinitesima in relazione col gruppo delle sostituzioni lineari. Periodico di Mat. **13**, 203-207.

Der Verf. wirft die Frage auf: „Giebt es solche Transformationen, die den ganzen Raum innerhalb einer Kugel von beliebig kleinem Radius σ condensiren, falls sie eine endliche und einzige Anzahl von Malen auf alle Punkte desselben Raumes angewandt werden?“ Die Antwort lautet bejahend. Die betreffenden Transformationen sind eindeutig, bringen in centraler Bewegung alle Punkte des Raumes innerhalb der Kugel vom Radius σ und verwandeln die zu dieser Kugel concentrischen Kugeln wieder in Kugeln; sie werden „perfecte Compressionen“ genannt. Für sie gilt der Satz: „Es giebt perfecte Compressionsgruppen des Raumes, die mit der Gruppe der gewöhnlichen Compressionen in Isomorphismus stehen.“ Lp.

L. E. Dickson. The quadratic Cremona transformation. California Acad. Proc. **1**, 13-23.

F. Giudice. Nozioni sulle transformazioni puntuali e sui gruppi continui. Brescia: Appolonio. X + 144 S. 8°.

E. Wierzbicki. Résumé des Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen“, dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. 1 Band. Leipzig 1897. Prace mat.-fiz. **9**, 170-212. (Polnisch.)

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

L. Euler. Drei Abhandlungen über Kartenprojection (1777). Hrsg. von A. Wangerin. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissensch. No. 93.) Leipzig: W. Engelmann. 78 S. 12°.

Die verdienstvolle Ostwald'sche Sammlung hat zu den von ihr früher herausgegebenen Lambert'schen und Lagrange'schen Arbeiten nun auch die zeitlich zwischen beiden erschienenen Euler'schen Abhandlungen gefügt. Es sind die sonst schwer zugänglichen und daher weniger bekannten Arbeiten:

De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.

De projectione geographica superficiei sphaericae.

De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata.

Die beiden ersten eng zusammenhängenden Abhandlungen gehen vom allgemeinsten Begriff der Abbildung aus und leiten die speciellen Formeln daraus ab, während die dritte Arbeit sich mehr mit praktischen Fragen beschäftigt. Das Verständnis des Lesers wird durch die sachkundigen Anmerkungen des Herausgebers gefördert; leider finden sich gelegentlich typographische Fehler, welche z. B. auf S. 1 geeignet sind, Irrtümer über Fig. 1 hervorzurufen. Der natürliche Logarithmus ist überall einfach durch log bezeichnet. R. M.

G. K. Suslow. Zur Frage über die conforme Abbildung einer Fläche auf eine andere. Moskau Phys. Sect. **9**, No. 2, 12-14. (Russisch.)

Die Lösung der Aufgabe von der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer vorgeschriebenen Fläche unter der Wirkung von Kräften, die eine Potentialfunction besitzen, giebt auch die Lösung der Frage nach der conformen Abbildung der Fläche auf eine andere. Die Trajectorien der Punkte sind dann Abbildungen der geodätischen Linien, die Curven der gleichen Wirkung die der zu den geodätischen Linien orthogonalen Curven. Aehnlichkeitsmodul $\equiv$ Potential der Geschwindigkeit. Si.

G. Souslow. Sur la représentation conforme d'une surface sur une autre. C. R. **126**, 30-31.

Sind zwei Flächen mit den Linienelementen ds und ds_1 conform auf einander abbildbar und ist λ das Aehnlichkeitsverhältnis, so besteht zwischen den Gauss'schen Krümmungsmassen der zwei Flächen in entsprechenden Punkten und der Grösse λ eine Relation. Dieses Resultat wird mittels eines symmetrischen Coordinatensystems hergeleitet, das auf den Flächen eingeführt wird. Ly.

F. v. Dalwigk. Ueber die Integration von $\Delta u = 0$ und die conforme Abbildung. Habilitationsschrift. Marburg 1897, 53 S.

Verf. giebt eine zusammenhängende Darstellung der auf die Integration von $\Delta u = 0$ bezüglichen Untersuchungen von Schwarz, C. Neumann und Painlevé und nimmt Veranlassung, einerseits einzelne daselbst nur angedeutete Beweise weiter auszuführen, andererseits die Bedingungen dieser Beweise schärfer hervorzuheben. Ausserdem teilt Verf. drei Verfahren mit, um die Existenz des Potentials u auch für Gebiete mit teils convexen, teils concaven Randlinien unter gewissen Voraussetzungen über den Charakter der Begrenzung nachzuweisen.

Eine kurze Mitteilung einiger der Resultate hat Verf. schon 1894 in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht. Jhk.

K. Wessely. Anwendungen von Dühring's Begriff der Wertigkeit. II. Hoppe Arch. (2) **16,** 225-240.

Fortsetzung einer in Bd. **10** derselben Zeitschrift veröffentlichten Arbeit (F. d. M. **22,** 697, 1890). Die dort vom Verf. aufgestellte Theorie der aus den Kubikwurzeln der Einheit (k) zusammengesetzten Vectoren $(a+kb+k^2c)$ wird benutzt, um für die conforme Abbildung einer Fläche eine einfache Darstellung zu gewinnen. Ist nämlich

$$\mathfrak{F}(w) = \mathfrak{F}(x+ky+k^2z) = U+kV+k^2W,$$

so giebt es für jede Function von w eine bestimmte Fläche, welche auf der ihr durch $\mathfrak{F}(w)$ zugeordneten in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird. Als Beispiel einer abzubildenden Fläche wird eine Rotationsfläche gewählt. Die Richtigkeit der Abbildung als einer conformen wird durch Aufstellung je zweier Scharen von Orthogonalcurven auf beiden Flächen und Zuordnung entsprechender Punkte durch Relationen zwischen den x, y, z und den U, V, W dargethan. Die Arbeit schliesst mit einer Untersuchung über die auszuschliessenden Unstetigkeitsstellen einer eindeutigen Function eines dreiwertigen Argumentes. Schg.

H. E. Timerding. Ueber die Mercator'sche Projection. Schlömilch Z. **43,** 320-328.

Die Gleichung der „Mercator-Curve", welche bei der Mercator'schen Projection aus einem beliebigen Kugelkreise entsteht, lässt sich in einfacher Weise durch Hyperbelfunctionen ihrer Winkel-Coordinaten ausdrücken. Hierbei ergeben sich zwei Typen solcher Curven nebst einem Uebergangstypus. Eine Curve der letzteren Art liefert dann sämtliche Curven eines isothermischen Systems, dessen (schon von Holzmüller in Bd. **16** derselben Zeitschrift untersuchte) conforme Abbildung auf zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen von Parallelen wiederum durch eine sehr einfache Gleichung vermittelt wird. Die Rectification der Mercator-Curven führt auf elliptische Integrale erster Gattung. Zum Schluss wird die Untersuchung auf die Abbildung der sphärischen Kegelschnitte ausgedehnt. Schg.

Miss M. E. Barwell. The conformal representation of a pentagon on a half plane. Lond. M. S. Proc. **29,** 695-706.

Ein von geraden Linien begrenztes Polygon der w-Ebene, dessen Seiten sich nicht kreuzen, lässt sich mittels der bekannten von H. A. Schwarz und Christoffel gefundenen Formel conform auf die obere z-Halbebene abbilden. Lässt man bei der Abbildung dreien Ecken des Polygons etwa die Punkte ∞, 0, 1 der reellen Axe der z-Ebene entsprechen, so bleiben im Falle des Fünfecks noch zwei Grössen zu bestimmen. Hiermit beschäftigt sich die Verfasserin. Zur Auffindung dieser zwei Grössen dienen beim Fünfeck Gleichungen, in denen hypergeometrische Functionen dritter Ordnung auftreten, wie sie von Pochhammer in seiner Arbeit „Hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung" (J. für Math. **71;** F. d. M. **2,** 265, 1870) eingeführt wurden. Ly.

E. Hassengier. Ueber die conforme Abbildung $Z=\sqrt[3]{z-a}-\sqrt[3]{z-b}$. Pr. (No. 774) Oberrealsch. u. Realsch. v. d. Holstenth. Hamburg. 23 S. 4°. Taf.

Die in der Ueberschrift angegebene Abbildung kann erhalten werden, indem man zunächst die z-Ebene mittels der Relation:

$$\zeta=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$$

conform auf eine Hülfsebene ζ und diese ζ-Ebene vermöge der Beziehung:

$$\zeta=-\frac{Z^3+a-b}{3Z}$$

auf die Z-Ebene abbildet. Verf. untersucht sowohl die Abbildung der z auf die ζ-Ebene, wie der ζ-Ebene auf die Z-Ebene und setzt die neunblättrige z-Fläche und die zweiblättrige Z-Fläche in eindeutige Beziehung. Die Abhandlung ist mit einer Reihe instructiver Figuren versehen. Ly.

É. Cotton. Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions. C. R. **127,** 349-351.

Eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ist durch die n Variablen x_i und eine quadratische Form ds^2 der Differentiale von nicht verschwindender Determinante festgelegt. Zwei Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen x_i, ds^2 und x'_i, ds'^2 heissen auf einander conform abbildbar, wenn man die x derartig als Functionen der x' bestimmen kann, dass die entsprechende Transformation ds^2 bis auf einen von den Differentialen unabhängigen Factor in ds'^2 überführt; geht durch diese Transformation ds^2 in ds'^2 selbst, also ohne Factor, über, so heissen die zwei Mannigfaltigkeiten auf einander abwickelbar.

Die Beantwortung der Frage, wann zwei Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen auf einander conform abbildbar sind, wird vom Verf. auf folgende Art entschieden: Man kann für jede Mannigfaltigkeit

$ds^2 = \sum_1^3 a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ eine bestimmte Function ϱ_1 der Variable, die nicht von den Differentialen abhängt, eindeutig bestimmen und mithin der vorgelegten Mannigfaltigkeit eine neue Mannigfaltigkeit $\varrho_1^2 ds^2$, welche die Hauptmannigfaltigkeit heisse, zuordnen. Notwendig und hinreichend, damit zwei Mannigfaltigkeiten auf einander conform abgebildet werden können, ist, dass ihre zwei Hauptmannigfaltigkeiten auf einander abwickelbar sind. Dieses Problem ist aber bereits durch die Arbeiten von Christoffel, Lipschitz u. a. erledigt.

Die Aufsuchung der Hauptmannigfaltigkeit zu ds^2, also des ϱ_1, wird auf folgende Art gelehrt: Betrachtet man $d\sigma^2 = \varrho^2 ds^2$, so wird zunächst eine zu $d\sigma^2$ covariante quadratische Form der Differentiale bestimmt; diese Form hängt von ϱ ab, wobei ϱ nur eine Function der Variablen, nicht der Differentiale, bedeutet. Aus $d\sigma^2$ und der gefundenen Form kann eine kubische Covariante, die von drei verschiedenen Systemen von Differentialen abhängt, gebildet werden; von dieser Form wird behauptet, sie enthält ϱ nicht mehr. Diese kubische Covariante bleibt ungeändert, wenn man ds^2 mit irgend einer Function der drei Variablen multiplicirt. Vermöge dieser kubischen Covariante und einer weiteren Covariante von $d\sigma^2$ lässt sich dann ϱ_1 eindeutig definiren und damit die Hauptmannigfaltigkeit festlegen. Ly.

J. Lüroth. Studien über die geodätische Abbildung. Math. Ann. **51**, 161-180.

Verf. führt seine interessanten geometrischen Untersuchungen aus den Münchener Berichten fort (F. d. M. **24**, 730, 1892), die aus einem Problem der Praxis hervorgegangen und für die Bestimmung der Erdgestalt wichtig sind. Zwei beliebige Flächenstücke F und F' ohne gerade Linien seien auf folgende Weise auf einander abgebildet: Für drei beliebige Punkte A, B, C von F und ihre entsprechenden A', B', C' von F' möge, wie auch immer die Punkte auf F, bezüglich F' gelegen sind, der $\angle ABC = \angle A'B'C'$ sein. Der $\angle ABC$ soll dabei der Winkel sein, den die beiden Ebenen, welche durch die Lotlinie von B und die Punkte A, bez. C gelegt sind, mit einander bilden. Unter der Lotlinie irgend eines Punktes A von F sei eine ganz beliebige, also nicht notwendig zur Fläche senkrechte Linie, welche durch den Punkt A gelegt ist, verstanden. In der Praxis kann also für die Lotlinie jede wohl definirte Richtung, nicht nur diejenige der Schwere, verwandt werden. Analoge Definitionen mögen für F' gelten.

Eine derartige, vom Verf. geodätisch genannte Abbildung ist im allgemeinen nicht ähnlich; doch geht, wie in der früheren Arbeit gezeigt wurde, F' und sein Lotliniensystem Σ' aus F und dessen Lotliniensystem Σ durch eine projective Transformation $\mathfrak{T}$ hervor. Bei der betrachteten Abbildung lassen sich von jeder Lotlinie der Fläche F zwei Ebenen legen, die gleichzeitig den unendlich fernen Kugelkreis ω und einen Kegelschnitt Ω, der aus ω durch die projective Transformation

$\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht, berühren. Die Discussion des Verhaltens dieser zwei erwähnten Grenzflächen zu einander lehrt, dass bei einer geodätischen Abbildung entweder: 1. F' ähnlich zu F ist, oder 2. die Lotlinien von F (und dann auch die zu F') sich in einem endlichen oder unendlich fernen Punkte schneiden, oder 3. die Lotlinien dualistisch den Sehnen einer allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung erster Species entsprechen und einen Teil einer Congruenz bilden, welche aus allen Geraden auf den Flächen der confocalen Schar $\omega + \lambda\Omega = 0$ besteht. Eine derartige Congruenz sei mit Γ bezeichnet. Im zweiten Falle kann ohne eine besondere Annahme nichts über die Beziehung von F' zu F ausgesagt werden; daher beschränkt sich Verf. im Folgenden auf die Untersuchung der ersten und dritten Möglichkeit. Kann man die Abbildung derartig einrichten, dass irgend eine Eigenschaft, welche aus der Zugehörigkeit des Lotliniensystems Σ zu einer Congruenz Γ folgen würde, bei der Abbildung nicht vorhanden ist, so muss F' ähnlich zu F sein. Wenn Σ einer Congruenz Γ angehört, so können nur zwei gewisse Ebenen mehr als zwei und dann unendlich viele reelle Lotlinien enthalten; kann man also z. B. die Abbildung auf eine Fläche ausführen, deren Lotlinien alle eine Gerade schneiden, so ist diese Abbildung notwendig ähnlich.

Um weitere Kriterien, die mit Hülfe astronomischer Messungen über die Aehnlichkeit bisweilen eine Entscheidung liefern, angeben zu können, ordnet Verf. der Fläche F einen unendlich fernen Punkt π zu und F' einen unendlich fernen Punkt π', die er Polpunkte nennt; die Ebene, gelegt durch π und die Lotlinie a, welche durch den Punkt A geht, heisse Meridianebene; wenn π auf a liegt, also die Meridianebene unbestimmt wird, so heisse der Fusspunkt A von a ein Pol von F. Der von a mit der Linie $A\pi$ gebildete Winkel heisse die Poldistanz von A, sein Complement die Breite. Wenn für zwei entsprechende Punkte A und A' die Poldistanzen gleich sind, so sage man, die geodätische Abbildung erfülle für A die Breitenbedingung. Bei zwei Lotlinien a und b sei unter der Längendifferenz der Winkel der zwei durch A und B gehenden Meridianebenen verstanden. Die Längenbedingung ist für A und B erfüllt, wenn für F und F' die beiden Längendifferenzen gleich sind. Im Falle 3) haben nur dann unendlich viele Lotlinien in F' und F gegen eine bestimmte Lotlinie a', bezw. a die nämliche Längendifferenz, wenn diese Differenz einen oder den anderen von drei Werten hat. Wenn zu vier Längendifferenzen jedesmal mehr als acht Lotlinien gehören, welche die Längenbedingung erfüllen, so muss F' ähnlich zu F sein. Um an die Beobachtungen der Praxis anzuknüpfen, sei in einem Punkte A' von F', der kein Pol ist und dem die Länge Null zugeschrieben wird, die Breite gemessen und das Azimut eines Punktes C', und es sei die Abbildung so eingerichtet, dass der entsprechende Punkt A die gleiche Breite wie A' und C in A das gleiche Azimut wie C' in A' hat. Soll es möglich sein, die Aehnlichkeit zwischen F und F' auszuschliessen, so dürfen im allgemeinen ausser der Lotlinie a nur noch drei andere Lotlinien, von denen zwei parallel sind,

existiren, welche die Längen- und Breitenbedingungen gleichzeitig erfüllen. Vier Längen- und Breitenbestimmungen reichen dann jedenfalls aus, um die Aehnlichkeit von F und F' zu constatiren. Solange ω von Ω verschieden ist, kann die Breitenbedingung nicht für alle Punkte von F erfüllt sein; ist dieselbe für alle Punkte von F erfüllt, so muss die geodätische Abbildung von F' auf F ähnlich sein. Es mag noch bemerkt werden, dass die Resultate teils synthetisch, meistens aber analytisch geometrisch hergeleitet werden und die Verwertbarkeit neuerer geometrischer Begriffe und Methoden auch bei einem praktischen Problem zeigen. Bei dem Beweise des letzten Satzes werden zum Nachweis, dass, wenn die Breitenbedingung für jede Lotlinie von F erfüllt ist, sie für jede Linie von Γ gilt, auch Potenzreihen und deren Fortsetzungen verwandt. Ly.

E. Soler. Sulla rappresentazione geodetica di talune superfici. Atti della R. Acc. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo (3) **5**, 15 S.

Ueber die geodätische Abbildung der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene. Vi.

R. P. v. Lerchenhorst. Kartenprojectionen im allgemeinen und perspectivische Kartenprojectionen im besonderen. Teil II. Elbogen. 31 S. 8°.

E. Hammer. Vergleichungen einiger Abbildungen eines kleinen Stückes der ellipsoidischen Erdoberfläche (Karte von S.W.-Deutschland). Halle Nova Acta Leop.

J. Goettler. Conforme Abbildung eines von confocalen, elliptischen und hyperelliptischen Curven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf der Halbebene. Pr. Passau: M. Waldbauer. 34 S. gr. 8°. Mit 3 Tafeln.

Zehnter Abschnitt.

M e c h a n i k.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

H. VON HELMHOLTZ. Vorlesungen über theoretische Physik. Herausgegeben von Arthur König, Otto Krigar-Menzel, Franz Richarz, Carl Runge. Band I. Abteilung 2. Die Dynamik discreter Massenpunkte, herausgegeben von Otto Krigar-Menzel. Leipzig: Johann Ambrosius Barth. X u. 380 S. gr. 8°.

„Der Inhalt des vorliegenden Buches umfasst den grössten Teil des Stoffes, welchen Helmholtz im ersten Semester seines Vorlesungscyklus über theoretische Physik behandelte: die Dynamik discreter Massenpunkte. Diesem Hauptgegenstande pflegte der Meister eine Reihe allgemeiner Auseinandersetzungen über die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Physik vorauszuschicken, welche als getrenntes Buch unter der Bezeichnung Band I, Abteilung 1 erscheinen sollen; aus diesem Grunde führt der vorliegende erste Band die Nebenbezeichnung: Abteilung 2. — Als Grundlage diente die im Auftrage des Verstorbenen hergestellte wortgetreue Nachschrift der vom 2. December 1893 bis zum 4. März 1894 an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen. Im Verzeichnis lautete die Ankündigung für das betreffende Semester: Elemente der Dynamik materieller Punkte und aus solchen zusammengesetzter Systeme. Das ausserordentlich knapp gehaltene Notizbuch, in welches Helmholtz während des Vortrages nur selten einen Blick warf, führt die kurze Bezeichnung: Ponderabilia; es weicht inhaltlich von der erwähnten Nachschrift in mancher Hinsicht ab. . . Die Gliederung des Stoffes liess sich der wohlgeordneten Reihenfolge, in welcher die einzelnen Gegenstände vorgetragen wurden, ohne Zwang anpassen; die Benennungen der einzelnen Teile, Abschnitte und Paragraphen rühren indessen meist nicht von Helmholtz her. — Das Hauptbestreben des Herausgebers ist stets gewesen, seine Verantwortlichkeit für Inhalt und Form zu vereinigen mit getreuester Wiedergabe des Helmholtz'schen Vortrags."

Diese dem Vorworte des Herausgebers entnommenen Sätze geben Kunde von der Entstehung und Abfassung des Buches. Zur genaueren Einsicht in das abgehandelte Gebiet fügen wir die Titel der einzelnen Teile und Abschnitte hinzu.

I. Kinematik eines materiellen Punktes.

II. Dynamik eines materiellen Punktes. 1. Allgemeine Principien. 2. Besondere Formen von Bewegungskräften. A. Die sogenannte Centrifugalkraft. B. Schwerkraft und Fallbewegung. C. Von den oscillatorischen Bewegungen.

III. Dynamik eines Massensystems. 1. Das Reactionsprincip. 2. Das Energieprincip. 3. Anwendung. Die Bewegung der Himmelskörper.

IV. Zusammenfassende Principien der Dynamik. 1. Principien der Statik. 2. Principien der Bewegung. 3. Anwendung. Rotationen starrer Körper. Theorie des Kreisels. 4. Ausdehnung des Geltungsbereiches der dynamischen Principien.

Schon aus diesem Gerippe des Buches ersieht man, dass dasselbe ein Lehrbuch der Dynamik bildet. Von den sonstigen Lehrbüchern dieser Wissenschaft ist es dadurch unterschieden, dass es viele Ausblicke nach der philosophischen Seite der Erkenntnis thut, und dass als Hauptzweck die physikalische Anwendung der vorgetragenen Lehren im Auge behalten ist. Als eine willkommene Einleitung und als Commentar zu den bezüglichen Abhandlungen von Helmholtz wird es denen dienen können, die nicht seine Vorlesungen besucht haben. Von hervorragendem Interesse ist der auch vom Herausgeber in dem Vorworte besonders hervorgehobene Paragraph über die universelle Gültigkeit des Princips von der Erhaltung der Energie, der nach den Bemerkungen von Helmholtz in seinen Experimentalvorlesungen ergänzt ist. Lp.

E. J. Routh. Die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisirte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. Felix Klein zu Göttingen. Erster Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 472 S. gr. 8°.

Während in Deutschland und Frankreich der einheitliche, systematische Aufbau eines Lehrbuches als erstes Erfordernis betrachtet wird, der Zusammenhang der vorgetragenen Theorien unter einander und mit allgemeineren Ideen in ihm darzulegen ist, spitzt sich die Darstellung der übersichtlich gegliederten englischen Lehrbücher auf die möglichst frühzeitige Lösung von Uebungsanfgaben zu, von denen eine ungewöhnlich grosse Anzahl jedem Abschnitte angehängt wird, falls der Verf. es nicht vorzieht, sie den einzelnen Sätzen gleich folgen zu lassen. Da beide Lehrmethoden ihre Berechtigung und ihre Vorzüge haben, so hat Felix Klein, der schon auf der Naturforscherversammlung in Halle 1891 einen Vortrag über neuere englische Arbeiten zur Mechanik hielt, den als Uebersetzer mathematischer Werke aus dem Italienischen vor-

teilhaft bekannten Adolf Schepp veranlasst, das englische Hauptlehrbuch der Dynamik, welches in dem britischen Inselreiche als das normale Werk für Mechanik angesehen wird, und aus welchem dort Formeln ohne weitere Erklärung entnommen zu werden pflegen, ins Deutsche zu übertragen. An der deutschen Uebersetzung eines Werkes, das seit nahezu 40 Jahren dem englischen Hochschulunterrichte zu Grunde gelegt ist, kann jetzt also auch der deutsche Student die Vorzüge jenes Verfahrens kennen lernen und sich dadurch mit der englischen Arbeitsmethode vertraut machen.

Von den beiden Teilen der „Rigid Dynamics“ ist der erste, die grundlegenden und elementaren Partien enthaltende, schon 1860 erschienen. Die engeren Beziehungen, welche in England zwischen dem Universitätsunterrichte und der Industrie bestehen, offenbaren sich darin, dass der ganze Band der Dynamik der starren Körper gewidmet ist, und dass in den Beispielen, wo es nur angeht, geeignete einfache Maschinen herangezogen werden. Deshalb beginnt der Vortrag sogleich mit der Lehre von den Trägheitsmomenten in einem reichhaltigen Kapitel und geht nach Erledigung des d'Alembert'schen Princips (Kap. II) sofort zur Bewegung eines starren Körpers um eine feste Axe über (Kap. III). In consequentem Aufbau folgt danach die ebene Bewegung (Kap. IV) und die Bewegung im Raume von drei Dimensionen (Kap. V). Hiernach erst geht der Verf. an die Erörterungen allgemeiner Art über die Bewegungsgrösse (Kap. VI), die lebendige Kraft (Kap. VII) und die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (Kap. VIII). Das in England besonders beliebte und daher viel behandelte Thema der kleinen Schwingungen beansprucht ein besonderes Kapitel (IX). Im Schlusskapitel (X) endlich werden einige specielle Probleme zusammengefasst. Litteraturnachweise sind überall an passender Stelle beigefügt; da dieselben aber vorzugsweise die englischen, in geringerem Grade die französischen Arbeiten berücksichtigen, die deutschen dagegen wenig beachten, so hat Liebmann im Verein mit F. Klein auf S. 465 bis 467 zur Vervollständigung ein kleines Verzeichnis nicht englischer Werke angehängt, das jedoch auf Vollständigkeit keinen Anspruch macht.

Die Uebersetzung eines solchen Werkes aus dem Englischen, wo vielfach eine eigentümliche Terminologie üblich ist, hat gewisse Schwierigkeiten. Dadurch dass F. Klein die zweite Correctur durchgesehen hat, ist die sachgemässe Verdeutschung derjenigen Termini gewährleistet, bei denen eine wörtliche Uebertragung nicht ausreichen würde. Lp.

E. J. Routh. Die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden, mit zahlreichen Beispielen. Autorisirte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit Anmerkungen von Prof. Dr. Felix Klein zu Göttingen. Zweiter Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. X + 544 S. gr. 8°.

Der Wert des vorliegenden zweiten Bandes der Routh'schen

Rigid Dynamics erhellt aus den folgenden Sätzen der von Klein beigegebenen Bemerkungen: „Der zweite Band übertrifft den ersten vielleicht noch an Reichhaltigkeit, jedenfalls aber an Originalität der Untersuchungen. Der Verf. wünscht in seiner Vorrede darauf aufmerksam zu machen, dass es sich nicht sowohl um eine systematische Entwickelung, als um eine Reihe neben einander stehender Monographien handelt. Inzwischen tritt eine wichtige Frage doch immer wieder in den Vordergrund des Interesses, das ist die nach den kleinen Schwingungen der Systeme. Wir haben in der gesamten deutschen oder französischen Litteratur kein Werk, welches diese unter praktischen Gesichtspunkten so bedeutsame Erscheinungsklasse gerade nach der praktischen Seite hin auch nur entfernt mit der Vollständigkeit behandelte, wie es hier bei Routh geschieht. ... Des ferneren möchte ich hier noch ganz besonders auf die Darstellung verweisen, welche in Kap. X die Variationsprincipe der Mechanik gefunden haben.“ —

Das erste der 14 Kapitel des Bandes handelt von beweglichen Axen und relativer Bewegung; hierbei werden die bekannten Probleme der relativen Bewegung in Bezug auf die rotirende Erde, obschon etwas kurz, erörtert. Die Schwingungen um die Gleichgewichtslage und um einen Bewegungszustand bilden den Gegenstand der beiden folgenden Kapitel; die verschiedenen Arbeiten zu diesem Thema aus den letzten Jahren sind noch nicht berücksichtigt worden. Bei der Behandlung der Bewegung der Körper, an denen keine Kräfte angreifen, und hierauf unter der Einwirkung beliebiger Kräfte in Kap. IV und V begegnet sich der Verf. öfter mit Klein-Sommerfeld's Veröffentlichung über die Theorie des Kreisels auf einem Gebiete, dem von Euler an eine grosse Anzahl scharfsinniger Arbeiten von den bedeutendsten Mathematikern gewidmet ist, und auf dem der Verf. sich mit anerkanntem, eigenartigem Geschicke bewegt. Will man jedoch die das englische Werk in hervorragender Weise charakterisirenden Eigenschaften kennen lernen, so muss man die vier folgenden Kapitel studiren, betitelt: die Beschaffenheit der durch lineare Gleichungen gegebenen Bewegung und die Stabilitätsbedingungen, freie und erzwungene Schwingungen von Systemen, Bestimmung der Integrationsconstanten durch die Anfangsbedingungen, Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen. Die Anwendung der Variationsrechnung im X. Kapitel führt zu den verschiedenen Principien der Mechanik, die auf dieser Methode beruhen, und bietet im Vergleich mit den in Deutschland üblichen Darstellungen manche Abweichungen, die zu einer Reihe von Bemerkungen von Klein Anlass gegeben haben. Sowohl hier wie auch an anderen Stellen erweist sich nämlich die Behandlung in functionentheoretischer Beziehung nicht als ausreichend gegenüber den Ansprüchen, welche auf dem Continente an solche fundamentalen Untersuchungen gestellt werden. Die Kapitel XI und XII, Präcession und Nutation, sowie die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt, machen sehr willkommene Anwendungen der gewonnenen allgemeinen Ergebnisse auf die Himmelsmechanik. Veränderliche Massensysteme endlich kommen in den beiden letzten Kapiteln auf die Tages-

ordnung: die Bewegung eines Fadens oder einer Kette und die Bewegung einer Membran.

Für die nach der fünften Auflage des Originals (1892) angefertigte Uebersetzung hat der Verf. zahlreiche Aenderungen und Zusätze geliefert. Ausser der Mitwirkung von F. Klein ist die von Sommerfeld, Liebmann und Routh selbst zu verzeichnen. Lp.

E. J. Routh. A treatise on dynamics of a particle: with numerous examples. Cambridge: at the University Press. XI + 417 S.

Jedes Werk aus der Feder des rühmlichst bekannten Verf. des überall studirten „Treatise on rigid dynamics" ist eines herzlichen Willkommengrusses bei allen Gelehrten sicher, welche das Vorrecht genossen haben, seinen Vorträgen beizuwohnen, und es ist wohl ausser allem Zweifel, dass dieser neue Band seinen Platz neben jenem anderen Werke als ein Lehrbuch für Studirende der Universitäten einnehmen wird. Auf jeder Seite zeigt sich das Geschick eines erfahrenen Lehrers in der Anordnung des Stoffes und in der Aufhellung der dem Gegenstande eigentümlichen Schwierigkeiten, während ausserdem zahlreiche Bemerkungen, die Muster ihrer Art sind, bezüglich der Geschichte der Methoden und Theoreme belehrend wirken und den Leser zu den ursprünglichen Quellen hinleiten. Der Standpunkt der Behandlung ist derjenige der Newton'schen Bewegungsgesetze; die neueren Erörterungen der grundlegenden Principien werden thatsächlich nicht berücksichtigt. Damit steht das Buch in bezeichnendem Gegensatz zu Love's Lehrbuch (vergl. F. d. M. **28**, 606, 1897) und muss sich die Vorwürfe gefallen lassen, die von verschiedenen Seiten her gegen die herkömmliche Newton'sche Grundlegung erhoben sind; so ist das einleitende Kapitel, welches von der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und den Bewegungsgesetzen handelt, kaum auf gleicher Höhe mit dem sonstigen Inhalte und müsste nach dem Gesichtspunkte der Relativität aller Bewegung überarbeitet werden. Jedenfalls ist es etwas seltsam, dass in einem so umfänglichen Werke fast gar nicht auf die gewichtigen Einwände Bezug genommen ist, die gegen die herkömmlichen Methoden zur Begründung der Wissenschaft vorgebracht sind, und es ist bedauerlich, dass, während so viele historische Angaben gemacht sind, nicht die geringste Erwähnung eines so ausgezeichneten Werkes gethan ist wie des Mach'schen, das jetzt allen englischen Lesern zugänglich ist.

Wie in des Verf. Werk über „Rigid dynamics" und über „Statics" sind die gelösten und nicht gelösten Aufgaben sehr zahlreich. Viele derselben sind von grossem Interesse und beleuchten wichtige Principien; manche haben die Natur von Rätselfragen, wie sie in den Vorlagen zu Prüfungszwecken gestellt werden, ohne dass ihnen eine bedeutende Tragweite vom dynamischen Standpunkte aus zugeschrieben werden könnte. Gbs. (Lp.)

Ch. Sturm. Lehrbuch der Mechanik (Cours de mécanique). Uebersetzt von Theodor Gross. Erster Band: IX + 258 S. Zweiter Band: XXIII + 403 S. 8°. Berlin: S. Calvary & Co.

Ch. Sturm ist am 18. December 1855 im Alter von 51 Jahren gestorben; sein Cours de mécanique, den er an der École Polytechnique und an der Sorbonne gehalten hatte, existirte bei seinem Tode nur in autographirten Bogen und in eigenhändigen Notizen aus Heften. Gerade wie der Cours d'analyse wurde dann der Cours de mécanique nach diesem Material von E. Prouhet bearbeitet und erschien in erster Auflage 1861, in fünfter (von A. de Saint-Germain besorgter) 1883. Diese Auflage ist die letzte; das Werk ist also nicht so beliebt wie der Cours d'analyse, der bis in die neueste Zeit (11. Aufl. 1897) immer wieder vergriffen gewesen ist.

Die Vorzüge des Sturm'schen Lehrbuchs der Mechanik sind dieselben wie die seines Werkes über Infinitesimalrechnung: klarer und durchsichtiger Vortrag, der, von geringen Vorkenntnissen ausgehend, schnell in das Innere des Gegenstandes einführt; genaue Abwägung des Stoffes, so dass alles geboten wird, was bei den zuerst sich darbietenden Aufgaben erforderlich ist. Mit diesen Eigenschaften hat das Lehrbuch der Mechanik sehr viel Gutes gewirkt, obgleich es nicht ganz so hoch geschätzt wurde wie dasjenige der Differential- und Integralrechnung. Das halbe Jahrhundert, das seit dem Entstehen nun bald vergangen ist, hat jedoch viele Neuerungen in dem Lehrgange der Mechanik gebracht, und obgleich Referent, der selbst in seinen Vorträgen über Mechanik zuerst sich vielfach nach Sturm's Cours de mécanique richtete, durchaus der Ansicht ist, dass auch der heutige Student noch viel aus dem Werke lernen kann, so würde er doch mit Nachdruck auf die Benutzung moderner Werke dringen, an denen ja kein Mangel ist. Ein Bedürfnis zu einer Verdeutschung war vielleicht vor vierzig Jahren vorhanden, jetzt aber kaum noch. Die Uebersetzung selbst ist im allgemeinen gut lesbar; auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden. Es fehlt die Angabe, welche Auflage der Uebersetzung zugrunde gelegt ist; jedenfalls ist es die fünfte. Lp.

J. Weisstein. Rationelle Mechanik. Erster Band. Statik — Dynamik des Punktes. XVIII + 350 S. Zweiter Band. Dynamik der Systeme — Statik und Dynamik flüssiger Körper. Wien und Leipzig: Wilhelm Braumüller. VIII + 256 S. gr. 8°.

Die Vorrede des ersten Bandes verspricht eine „rationelle Mechanik nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft und den neuesten Forschungen in klarer, fasslicher Form.“ Wenn weiter als Lehrbücher bloss Mach's bekanntes historisch kritisches Werk, ferner Poisson's Lehrbuch der Mechanik („annoch vor 80 Jahren erschienen“) und Kirchhoff's Mechanik genannt werden, so stimmt diese äusserst mangelhafte Anführung der Litteratur den Leser kritisch. Liest man dann endlich den Text, so wird man angesichts des wunderbar undeutschen

Ausdrucks ganz stutzig. Man höre: „Erteilen wir nun dem System eine virtuelle Deplacirung, welche mit den Liaisons compatibel ist, seien die Componenten der den Punkten erteilten Deplacements nach den Axen δx, δy, δz" . . . (**2**, 46). Hiernach ist es klar, dass man kein originales Werk vor sich hat, sondern eine Bearbeitung oder Uebersetzung aus dem Französischen; meint doch der Verf., den Sinn des deutschen Wortes Kreisel durch ein parenthetisches toupie klar machen zu müssen oder die Beschreibung des Bleilotes durch fil à plomb. Das Original, dem der Verf. sich angeschlossen hat, war denn auch bald gefunden: es ist Sturm's Cours de mécanique (erste Aufl. 1861), der zum grossen Teil übersetzt ist, zum Teil unter leichten Abänderungen und unter Einschiebungen aus anderen französischen Quellen nebst Umstellungen der Kapitel. Wir können das Werk also nicht als ein dem Verf. angehöriges bezeichnen; wenn sich der Ursprung nicht sofort verriete, so müsste das Verfahren als ein Plagiat gekennzeichnet werden. Die Form ist durchaus nicht „fasslich und klar". Man vergleiche die Uebersetzung der Guldin'schen Theoreme (**1**, 137 u. 138), wo beidemale die Bezeichnung des durch Rotation erzeugten Gebildes fortgelassen ist, so dass die Sätze unvollständig bleiben. „Die von einer ebenen Curve durch Rotirung um eine in ihrer Ebene liegende Axe" (ausgelassen: erzeugte Oberfläche) „ist gleich der Länge des Curvenbogens multiplicirt mit dem Umfange eines" (statt des) „vom Schwerpunkte dieses Bogens beschriebenen Kreises." Solche Flüchtigkeiten der Abfassung oder der Uebersetzung wiederholen sich. Als anderes Beispiel diene aus dem wörtlich übersetzten Kapitel über barometrische Höhenmessung der Anfang eines Paragraphen. Originaltext: Soient ϖ la force élastique de l'air et D sa densité à la température zéro. Uebersetzung: „Seien nun π die elastische Kraft und D seine Dichtigkeit bei der Temperatur Null." Die Fortlassung der Uebersetzung von de l'air macht das Possessivpronomen „seine" vor Dichtigkeit beziehungslos, und der deutsche Satz wird dadurch ganz unverständlich. Als Curiosum werde hier angeführt, dass in diesem selben Kapitel der Modul des gemeinen Logarithmensystems, wie in allen Auflagen des Sturm'schen Originals und in der Gross'-schen Uebersetzung derselben, als 0,4342946 angeführt ist, während derselbe doch 0,43429448 ist, gerade wie in dem Cours d'analyse von Sturm der reciproke Wert dieser Zahl durch alle Auflagen als 2,3025818 gegangen ist statt 2,30258509299. Lp.

Aug. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band: Einführung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. XV + 412 S. gr. 8°.

Wie bei der Anzeige des zuerst erschienenen dritten Bandes dieses Werks, der Festigkeitslehre, bemerkt wurde (F. d. M. **28**, 607, 1897), ist die Föppl'sche Bearbeitung der technischen Mechanik dadurch ausgezeichnet, dass die Darstellung von grosser Einfachheit und Klarheit ist, das Hauptgewicht in die Begriffsbildung gelegt wird; durch Vermeidung

verwickelter analytischer Betrachtungen wird der Raum gewonnen zur eingehenden Erörterung und Vertiefung der Grundanschauungen auf physikalischer Basis. Diese Eigenschaften fallen natürlich bei dem vorliegenden Bande am meisten in die Augen, da er ja den Stoff des ersten Semesters im Vortrage über Mechanik an der technischen Hochschule zu München umfasst. Nach der angedeuteten Richtung wird in ihm weit mehr gebracht als in den Lehrbüchern üblich ist, so dass manche Stellen weniger der Mechanik als der allgemeinen Physik angehören; dagegen ist nach der analytischen Seite manches zu vermissen, was sonst in einem einführenden Vortrage gegeben wird. Doch ist ein endgültiges Urteil über die Zweckmässigkeit der Stoffauswahl erst möglich, wenn das ganze Werk fertig sein wird. Gemäss den Neigungen mancher früheren und vieler jetzigen Mathematiker und Techniker hat der Verf. in seinen Lehrgang die ersten Elemente der Rechnung mit gerichteten Grössen aufgenommen, sich hierbei jedoch auf die geometrische Addition und die beiden Arten des geometrischen Productes, des inneren und des äusseren, beschränkt. So wird auch die Definition des Schwerpunktes mit Hülfe der geometrischen Addition zunächst aufgestellt. Zur Uebersicht über den Inhalt fügen wir die Titel der einzelnen Abschnitte hinzu. I. Mechanik des materiellen Punktes. II. Mechanik des starren Körpers. III. Die Lehre vom Schwerpunkte. IV. Energieumwandlungen. V. Die Reibung. VI. Elasticität und Festigkeit. VII. Der Stoss fester Körper. VIII. Die Mechanik flüssiger Körper. — Zusammenstellung der wichtigsten Formeln. Lp.

Ludwig Hofmann. Lösungen von Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Pr. Guericke-Schule Magdeburg. 26 S. 4°.

Ausführliche Behandlung von 28 Aufgaben aus dem Uebungsbuch von Fuhrmann: „Aufgaben aus der analytischen Mechanik“ (Leipzig: Teubner. 1882). Lp.

D. Seilinger. Abriss der Entwickelung der Mechanik im laufenden Jahrhundert. Kasan 1898, 1-18. (Russisch.)

Dieser Artikel enthält eine Rede des Autors, gehalten beim Jahresact der Kasaner Universität 1898. Jk.

L. Koenigsberger. Ueber die Principien der Mechanik. J. für Math. **119**, 25-49.

Die vorliegende Veröffentlichung enthält die Abschnitte XII, XIII, XIV der in Bd. **118**, 275-350 desselben Journals begonnenen Darstellung des Gegenstandes, worüber in F. d. M. **28**, 611, 1897 bereits referirt ist. Wie schon die Hauptergebnisse jenes ersten Teiles in mehreren Aufsätzen der Sitzungsberichte der Berliner Akademie veröffentlicht waren, so ist der Inhalt des Abschnittes XII in der Abhandlung „Ueber verborgene Bewegung und unvollständige Probleme“ enthalten (Berl.

Ber. 1897, 158-178; F. d. M. **28**, 638, 1897). Als Probe diene der damals schon veröffentlichte Satz (S. 178): „Wenn von drei Massenpunkten der eine der Bedingung unterliegt, dass seine Entfernung von zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen stets der Quadratwurzel aus der Entfernung der beiden anderen Massenpunkte von einander, mit demselben aber im Zeichen entgegengesetzten Factor, proportional bleibt, während sich die letzteren nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, vollzieht sich die Bewegung dieser nach dem Weber'schen Gesetze". Der dreizehnte Abschnitt beschäftigt sich mit der partiellen Differentialgleichung für die erweiterte charakteristische Function von Hamilton, und im vierzehnten Abschnitte wird die Transformation der erweiterten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in das erweiterte totale Differentialgleichungssystem von Hamilton bewirkt. Von den Ergebnissen, die sich meistens nicht kurz im Auszuge wiedergeben lassen, sei erwähnt, dass auch der Multiplicator des erweiterten Hamilton'schen Systems eine Constante ist, und daher der bekannte Jacobi'sche Satz vom letzten Multiplicator auch hier seine Gültigkeit behält.

Lp.

J. Classen. Die Principien der Mechanik bei Boltzmann und Hertz. Jahrb. d. Hamb. Wiss. Anst. **15**, 13 S. sep.

Das Charakteristische an der Hertz'schen Mechanik wird darin erblickt, dass ein allgemeines Grundgesetz an der Spitze steht, aus dem der gesamte Inhalt der physikalischen Erfahrung sich herleiten lassen soll, dass also die von Kirchhoff ausgegangene Aufgabestellung für die Physik, welche dieser nur die Möglichkeit einer Beschreibung einräumt, verlassen ist. Die Quelle jenes Grundgesetzes von der geradesten Bahn, das nichts weiter ist, als eine Wiedergabe der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, wird in der mathematischen Darstellung von Bewegungsmöglichkeiten gefunden; „kein anderer Begriff stellt sich in dieser charakteristischen Form dar". Als Zweck des Artikels wird der Hinweis bezeichnet, „dass in der Mechanik von Hertz mehr enthalten ist, als die bisherigen Erwähnungen derselben (bei Helm, Boltzmann, Mach) haben erkennen lassen, und dass diese Mechanik einen anderen Standpunkt in Bezug auf die Aufgabe der Physik vertritt, als gegenwärtig meist angenommen wird". Lp.

L. Boltzmann. Kleinigkeiten aus dem Gebiete der Mechanik. Verh. Naturf. Ges. Braunschw. **2**, 26-29. Deutsche Math. Ver. **6**, 138-142.

Die erste Bemerkung bezieht sich auf die Kriterien für die Stabilität der Bewegung, nämlich den Zusammenhang dieser Eigenschaft der Bewegung mit derjenigen des kinetischen Potentials, ein Maximum zu sein. Die zweite erörtert eine Frage der zusammengesetzten monocyklischen, resp. gefesselten polycyklischen Systeme bei Helmholtz. Endlich in der dritten bespricht Verf. eine exacte Fassung des d'Alembert'schen Princips. Lp.

Strohl. Sur le fondement expérimental de la mécanique rationnelle. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 64-67 (1897).

J. Hadamard. Sur les principes fondamentaux de la mécanique. Ibid. 67-70 (1897).

Strohl will die Newton'schen Bewegungsgesetze durch das einzige Gesetz darstellen: „Es ist möglich der Volumeneinheit der verschiedenen Körper Zahlen beizulegen, die für jeden einzelnen von ihnen unveränderlich und derartig sind, dass, wenn man übereinkommt, als Bewegungsgrösse eines unendlich kleinen Körperelementes das Product aus seiner Geschwindigkeit in sein Volumen und in die ihm zugehörige Zahl zu nehmen, die geometrische Summe der Bewegungsgrössen des Weltalls constant ist". Das Gesetz ist eine unmittelbare Anwendung des d'Alembert'schen Princips auf das Weltall und enthält, wie kurz gezeigt wird, die Newton'schen Bewegungsaxiome. — Hadamard dagegen sucht die aus der gleichzeitigen Einführung der Kräfte und Massen entstehenden logischen Schwierigkeiten durch die folgenden Fassungen zu beseitigen: 1. Jeder im Raume isolirte Massenpunkt bewegt sich mit gleichförmiger geradliniger Bewegung. 2. Wenn ein Massenpunkt mit mehreren Körpern S_1, S_2, ..., S_n zusammengebracht wird, ohne mit irgend einem von ihnen in Berührung zu sein, so ist die auf diesen Punkt wirkende gesamte Kraft die geometrische Summe von n anderen Kräften, von denen jede (ausser von dem Zustande des betrachteten Körpers) nur von dem Zustande jedes der Körper S_i abhängt. 3. Es besteht ein System von Coefficienten m (Massen), die den verschiedenen Massenpunkten bezüglich entsprechen, so dass in jedem Massensystem, das als isolirt vorgestellt werden kann, die inneren Kräfte ein der Null äquivalentes System von Strecken bilden. Der jedem Punkte zugeordnete Coefficient m variirt nicht, welches auch das System sei, in das er eingefügt wird, und welches auch die Zustandsänderungen sein mögen.

Lp.

P. Volkmann. Ueber Newton's „Philosophiae naturalis principia mathematica" und ihre Bedeutung für die Gegenwart. Vorträge in d. phys. ök. Ges. Königsberg i. Pr. 17 S. 4°.

Die hohe Stelle, welche Newton's bedeutendstes Werk in der Geschichte der exacten Wissenschaften einnimmt, macht es erklärlich, dass auch der heutige Forscher sich immer wieder in dasselbe versenkt und für seine Beobachtungen bei allen Gebildeten ein aufmerksames Ohr findet. Der philosophische Geist, welcher aus den beiden gedruckt vorliegenden Vorträgen spricht, macht die Lectüre derselben genussreich. Leider müssen wir es uns versagen, die neun Sätze, in denen am Schlusse die Ergebnisse der Untersuchung zusammengefasst werden, hier abdrucken zu lassen. Wir stimmen mit dem Verf. darin überein, dass die erkenntnistheoretischen Interessen des Werkes eine grössere Würdigung beanspruchen, als sie bisher gefunden haben. Lp.

P. VOLKMANN. Ueber das Princip von der Gleichheit der Actio und Reactio bei Newton. Wiedemann Ann. **66**, 781-784.

In den von Krigar-Menzel jüngst herausgegebenen Helmholtz'-schen „Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte" (**1**, Abt. 2) wird bei der Erörterung des Princips von der Actio und Reactio eine Darstellung gegeben, als ob Newton zur Erläuterung des dritten Bewegungsgesetzes von den Centralkräften ausgegangen wäre. Im Gegensatze hierzu führt der Verf. aus, „dass das Princip der Centralkräfte zwar als Resultat und auch als Hülfsmittel der Newton'schen Forschung eine Rolle spielt, keineswegs aber zur Formulirung der „Axiomata sive leges motus" herangezogen wird und auch im Sinne Newton's herangezogen werden darf." Lp.

E. PASQUIER. Sur la généralisation de certains principes de mécanique. Brux. S. sc. **22** A, 7-14.

Statt der Bewegungsgrösse eines Punktes M eines Systemes betrachtet der Verf. einen Vector MT und statt der mit der Masse multiplicirten Beschleunigung einen Vector MJ, der mit der Geschwindigkeit TI des Punktes T äquipollent wäre, falls M fest wäre. Durch ein solches auf alle Punkte des Systems erstrecktes Verfahren verallgemeinert der Verf. die Sätze über die Bewegungsgrössen, die Momente und die Flächen. Mn. (Lp.)

E. PASQUIER. Sur le principe de l'énergie et sur celui des vitesses virtuelles. Brux. S. sc. **22** A, 92-99.

1. Es giebt keinen Beweis für das allgemeine Princip von der Erhaltung der Energie in dem absoluten Sinne, in welchem man es oft ausspricht. 2. Bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sind für die Systempunkte nicht bloss die Coordinaten dieser Punkte vorauszusetzen, sondern auch ihre Ableitungen nach der Zeit. Folgerungen. Mn. (Lp.)

E. MERRITT. A simple mechanical illustration of apparent potential energy which is really kinetic. Physical Review **7**, 106-114.

Wenn man den Gedanken festhalten will, dass alle Energie kinetisch ist, und dass man von potentieller Energie nur dann redet, wenn man die in Wahrheit vorhandenen Bewegungen nur zum Teil kennt, so zeigt der Verf. zunächst, wie man sich die Sache durch Einführung „verborgener" Coordinaten in die Bewegungsgleichungen klar machen kann. Um dann aber diese abstracten Entwickelungen an einem concreten Beispiele zu erläutern, construirt er einen einfachen Apparat. Derselbe besteht der Hauptsache nach aus einer verticalen rotirenden Welle, die rechtwinklig in sie eingefügt eine Gabel mit zwei Zinken in horizontaler Ebene trägt. Innerhalb der Gabel, drehbar um eine horizontale Axe, ist ein dünner Stab mit zwei gleichen kleinen

Kugeln an jedem Ende äquilibrirt. Ein mit der Welle sich drehender Beobachter, der von dieser Drehung nichts weiss, nimmt nach Ablenkung des Stabes Schwingungen an demselben wahr, die ihn zur Annahme einer potentiellen Energie veranlassen würden, während in Wirklichkeit die Erscheinung auf die Gesetze der kinetischen Energie zurückkommt. Dies wird sehr genau erörtert. Lp.

Weitere Litteratur.

L. Arnal et G. Gauthier. Traité de mécanique (statique, cinématique, dynamique, hydraulique, résistance des matériaux, chaudières à vapeur, moteurs à vapeur et à gaz). Tomes III et IV. Paris: Fauchon et Artus. 487, 756 S. gr. 8°.

W. Briggs and G. H. Bryan. Advanced mechanics. Volume I: Tutorial dynamics, with the questions of the last 13 years set at the advanced examinations of the science and art department. (Organised science series.) London: Clive. 336 S. 8°.

T. Caronnet. Problèmes de mécanique, à l'usage des classes de mathématiques élémentaires et de première-science, et des candidats au baccalauréat et aux écoles du gouvernement. Cinématique et dynamique. 2e partie. Paris: Nonie. S. 185-401. 8°.

C. Delaunay. Practische en theoretische Mechanica. Geheel op nieuw bewerkt door C. Krediet. Deel I. Leiden. VIII + 329 S. 8°.

W. J. Dobbs. A chapter in elementary dynamics. Math. Gazette 1898, 201-205.

R. Geigenmüller. Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. II. Teil: Technische Mechanik. Mittweida: Polytechn. Buchhdlg. III + 202 + IV S. 8°.

O. Josephson. Elementär Mekanik i grunddrag. Stockholm. 69 S. 8°.

W. Keck. Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. Teil III: Allgemeine Mechanik. Hannover. VIII + 280 S. gr. 8°.

R. Lauenstein. Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 3. Aufl. Stuttgart: A. Bergsträsser. VII + 199 S. 8°.

P. Magnus. Lessons in elementary mechanics, introductory to the study of physical science, with numerous exercises. New edition. 40th thousand. London and New York: Longmans. 380 S. 16mo.

R. F. Muirhead. Notes on elementary dynamics. Math. Gazette 1898, 180-184.

F. Palagi. Nozioni elementari di meccanica, acustica e cosmografia. 2a edizione. Torino. 251 S. 8°.

L. Rameri. Elementi di statica. Torino. 104 S. 8°.

W. J. M. Rankine. Manual of applied mechanics. 15th edition, revised by W. J. Miller. London: Griffin. 696 S. 8°.

A. Ritter. Lehrbuch der höheren Mechanik. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Zwei Teile. I: Analytische Mechanik. II: Ingenieur-Mechanik. Leipzig. gr. 8°.

A. Rovida. Appunti critici sulla meccanica dei sistemi di forma invariabile nelle trattazioni di L. Poinsot e di H. R. Hertz. Firenze: Luigi Niccolai. 17 S. 8°.

Kapitel 2.

Kinematik.

K. Heun. Die Vectoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie. Pr. (Nr. 117) I. Realsch. zu Berlin: R. Gaertner's Verl. 28 S. 4°.

Die Schrift enthält eine kurze Darstellung der Kinematik des Punktes und der Geraden mit Hülfe der Vectorenrechnung in rein analytischer Behandlung. Der Inhalt wird durch die folgenden Kapitelüberschriften genügend gekennzeichnet. A. Grundregeln der Vectorenrechnung (4-9). B. Der Vector der Geschwindigkeit (9-11). C. Der Vector der Beschleunigung (11-12). D. Die Productensätze (12-13). E. Allgemeine Coordinaten (13-16). F. Die Gleichungen von Lagrange (16-17). G. Hamilton's Princip (17-18). H. Potentiale der Geschwindigkeit und der Beschleunigung (19-21). I. Die Variation der Constanten in einem Beschleunigungsfelde, dessen Zustand nur von der Lage des bewegten Punktes abhängt (21-23). K. Die unfreie Bewegung eines Punktes (23-25). L. Relative Bewegung des Punktes. Als Einführung in eine derartige Behandlung der Mechanik ist die Arbeit sehr nützlich. Die am Schlusse gegebene Litteratur ist vielfach zu ergänzen. Wir erwähnen nur den „Grundriss der Mechanik von Jacob Lüroth“ (München, Ackermann 1881); vergl. F. d. M. **13**, 663, 1881. Lp.

J. Lüroth. Die Bewegung eines starren Körpers. Eine Uebung in der Ausdehnungslehre. Schlömilch Z. **43**, 243-268.

Neuerdings ist besonders in den technischen Kreisen die Vectorenrechnung für Darstellungen aus der Mechanik und mathematischen Physik wiederholt empfohlen worden; so hat Föppl in dem ersten Bande seiner jüngst erschienenen Vorlesungen über technische Mechanik einige Hauptbegriffe aus der Grassmann'schen Ausdehnungslehre zur Rechnung mit gerichteten Grössen von vorn herein benutzt und sieht diese Einführung nur als einen ersten Schritt auf dem zu verfolgenden Wege an. Durch den kleinen „Grundriss der Mechanik“ (München: Ackermann, 1881) hat J. Lüroth schon vor siebzehn Jahren die Geschmeidig-

keit der Vorstellungen von Grassmann's Ausdehnungslehre für die Entwickelung der Sätze der Mechanik gezeigt. Während er aber damals von den Hamilton'schen Bezeichnungen in den Quaternionen Gebrauch machte, bringt die vorliegende Abhandlung in gleicher Richtung jetzt einen Abriss der Kinematik eines starren Körpers nach der Punktrechnung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre von 1862 unter Anwendung einiger kleinen Modificationen in der Bezeichnung. Lp.

R. Marcolongo. Formole per la composizione di più movimenti finiti. Annali di Mat. (2) **26,** 101-112.

Der Verf. behandelt die Zusammensetzung beliebig vieler Drehungen und Schraubungen in der Weise, dass er jede Bewegung durch die drei Cosinus und die drei Momente der bezüglichen Geraden, resp. durch die Höhe der Schraubung definirt und Formeln giebt, die diese Grössen für die resultirende Bewegung durch die übrigen ausdrücken. Sfs.

R. Marcolongo. Spostamento d'una figura di forma invariabile e composizione di moti finiti. Acc. Peloritana **13,** 441-474.

Der Verf. leitet ausführlich die hinlänglich bekannten metrischen Relationen ab, die die endliche Bewegung eines starren Körpers charakterisiren, und zwar indem er sich homogener Coordinaten bedient; ebenso die bekannten Beziehungen des aus den Mitten P_m der Strecken P_1P_2 bestimmten Systems Σ_m zu dem räumlichen System Σ und die mögliche Momentanbewegung von Σ_m, die durch denselben Complex charakterisirt wird, wie die endliche Bewegung von Σ. Sfs.

C. Pietrocola. Cinematica di un punto assoggettato a giacere sopra due curve piane rigide e mobili nel loro piano comune Napoli Rend. (3) **4,** 137-154.

P. del Pezzo. Rapporto. Ibid. 136-137.

Für den veränderlichen Schnittpunkt zweier starren Curven, die sich in derselben Ebene bewegen, giebt der Verf. die Bestimmung seiner Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie deren geometrische Gegenstücke, die Curventangente und ihre Krümmung. Die Bestimmung der Krümmung wird auf den einfachen Fall zurückgeführt, dass die beiden starren Curven um feste Punkte rotiren. Eine Reihe besonderer Fälle wird erörtert. Sfs.

É. Duporcq. Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. Journ. de Math. (5) **4,** 121-136.

Darboux und Mannheim haben zuerst diejenige Bewegung einer Geraden untersucht, bei der alle Punkte in der Weise sphärische Curven

beschreiben, dass die Centra dieser Kugeln in einer Ebene liegen und dort eine Gerade oder eine C_2 bilden. Der Verf. untersucht die allgemeinste derartige Bewegung einer Geraden, nämlich diejenige, bei der die Centra eine räumliche C_3 bilden. Er findet, dass diese Curven i. a. biquadratisch sind, und leitet den Satz ab, dass je zwei Punkte der Geraden ähnliche Curven beschreiben, und zwar bilden diese Punktepaare eine Involution. Man kann sogar die Bedingungen so wählen, dass je zwei Curven eines Paares gleich sind. Es folgt eine Untersuchung der besonderen Eigenschaften der Curven und einiger Specialfälle. Sfs.

R. Bricard. **Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques.** Journ. de Math. (5) **4,** 409-448.

Die Aufgabe, alle Bewegungen zu finden, bei denen jeder Punkt P' einer Ebene π' eine sphärische Curve so beschreibt, dass ihre Centra P eine Ebene π erfüllen, ist, wie der Verf. zeigt, lösbar und besitzt zwei verschiedene Lösungen, deren eine er schon früher (C. R. **125,** 1026; F. d. M. **28,** 617, 1897) angegeben hatte.

Falls man triviale Fälle ausschliesst, lässt sich zunächst zeigen, dass sich die Punkte P und P' von π resp. π' eindeutig entsprechen, und zwar ist diese Verwandtschaft eine quadratische. Ist nun A ein Hauptpunkt und a eine Hauptgerade der einen Ebene, A' und a' ein entsprechendes Paar der andern, sind ferner P und Q zwei Punkte in π, die auf a liegen, und P', Q' die entsprechenden Punkte von π' auf a', so haben die Dreiecke APQ, $AP'Q'$, $A'PQ$, $A'P'Q'$ einfache Eigenschaften, die der Verf. ableitet, und denen zu genügen ist, wenn die verlangte Bewegung möglich sein soll.

Die beiden Bewegungen, die sich auf diese Weise ergeben, sind folgendermassen bestimmt.

In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems liege ein Kreis, der die y-Axe in O berührt, und es sei l eine Gerade, die stets die z-Axe und diesen Kreis trifft und mit der z-Axe einen constanten Winkel bildet. Für jede Lage von l spiegele man das Coordinatentrieder gegen die Gerade, so dass daraus $Ox'y'z'$ entsteht. Alsdann ist $Ox'y'$ eine Ebene π', für die Oxy die Ebene π ist, und ebenso ist $Ox'z'$ eine Ebene π', deren Ebene π die Ebene Oxz ist. Die beiden zugehörigen Bewegungen sind aber insofern verschieden, als die oben erwähnte quadratische Verwandschaft für das zweite Ebenenpaar π, π' eine solche ist, dass einer Geraden eine gleichseitige Hyperbel entspricht, für das erste so, dass jeder Geraden ein Kreis entspricht. Diese Bewegung kann übrigens auch so definirt werden, dass A' eine zu π normale Gerade beschreibt, A' eine zu π normale Gerade und beide Ebenen einen constanten Winkel einschliessen.

Uebrigens hängen diese Aufgaben durch Auftreten der oben

erwähnten Dreiecke mit der Theorie des verbiegbaren Oktaeders zusammen.

Der Verf. giebt zum Schluss einige Sätze über die Bewegung der oben eingeführten Geraden l, die von Mannheim herrühren.

Sfs.

É. Delassus. Sur les mouvements relatifs de trois plans glissant les uns sur les autres. Darboux Bull. (2) **22,** 251-259.

Drei gegen einander bewegliche Ebenen α, β, γ bestimmen im allgemeinen drei Pole $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{P}_{\alpha\gamma}$ und $\mathfrak{P}_{\beta\gamma}$, die auf einer Geraden g liegen, und sechs Polcurven. Fallen insbesondere die drei Pole dauernd in einen Punkt zusammen, so giebt es nur drei Polcurven. Von den sechs Polcurven sind, wie der Verf. beweist, fünf beliebig; d. h. ist die Bewegung von β in α durch Abrollen der Polcurven $(\alpha\beta)$ und $(\beta\alpha)$ gegeben, so kann man noch die Curven $(\gamma\alpha)$ und $(\gamma\beta)$ in γ sowie $(\alpha\gamma)$ in α so annehmen, dass sie Polcurven einer möglichen Bewegung werden.

Ist nun P ein Punkt von γ, so kann man fragen, wann seine Bahncurven p_α in α, resp. p_β in β ein Paar zugehöriger Hüllcurven für die Bewegung von α gegen β sind.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für den Punkt P ist, dass er auf der Geraden $\mathfrak{P}_{\alpha\gamma}\mathfrak{P}_{\beta\gamma}$ liegt. Fallen diese Punkte zusammen, so ist jeder Punkt von γ geeignet, es sind also nur drei Polcurven vorhanden. Sind alle Punkte der Geraden $\mathfrak{P}_{\alpha\gamma}\mathfrak{P}_{\beta\gamma}$ tauglich, so ist diese Gerade sowohl Polcurve $(\gamma\alpha)$ wie auch Polcurve $(\gamma\beta)$. Es giebt aber noch einen dritten Fall, dass nur ein Punkt tauglich ist.

Das Vorstehende findet Anwendung auf die Theorie der Zahnräder. Im ersten Falle stellen die Polcurven selbst die Zahnräderprofile dar. Der zweite Fall entspricht der Evolventenverzahnung, der dritte liefert den allgemeineren Fall. Sfs.

E. Cavalli. Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella cinematica. Napoli Rend. (3) **4,** 411-412.

F. Siacci. Rapporto. Ibid. 411.

Vorläufiger Bericht. Die Arbeit erscheint in den Memorie.

Sfs.

R. F. Muirhead. On the transformation sequence. Edinb. M. S. Proc. **16,** 70-76.

Der Aufsatz bildet die Fortsetzung des Artikels: „On a method of studying displacement" (Edinb. M. S. Proc. **15,** 119-128; F. d. M. **28,** 618, 1897) und vervollständigt die Behandlung der von Verdrehung begleiteten Verrückung durch Hinzufügung einer Untersuchung der dreidimensionalen Verdrehungsfolge (perversion-sequence). Die Schrift zeigt auch, wie die Sequenzmethode auf andere Transformationen ausgedehnt

werden kann als diejenigen, welche den starren Verrückungen und Verdrehungen entsprechen. Gbs. (Lp.)

Reinh. Müller. Ueber die angenäherte Geradführung mit Hülfe eines ebenen Gelenkvierecks. Schlömilch Z. **43**, 36-40.

In den „Beiträgen zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks“ (Schlömilch Z. **42**, 247-271; F. d. M. **28**, 627, 1897) hat der Verf. die Construction der n-punktig ($n \gtreqless 6$) genauen Geradführung — insbesondere für $n = 6$ — eingehend behandelt. Gegenwärtig zeigt er, wie man von hier aus den Uebergang zur bloss angenäherten Geradführung findet, und wie man auf diese Weise zu Lösungen gelangt, die vor den früher erhaltenen vom praktischen Standpunkte aus den Vorzug verdienen. „Die angenäherte n-punktige Geradführung liefert im allgemeinen längere Anschlussstrecken als die entsprechende n-punktige genaue. Um aber zu einer solchen angenäherten Geradführung zu gelangen, ist der bequemste Weg immer der, dass man zunächst eine n-punktig genaue Geradführung construirt und diese in der angegebenen Weise nachträglich in eine angenäherte umwandelt.“ Lp.

Duverger. Sur le centre de courbure des roulettes. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 61-62 (1895).

Beweis, dass ein von Hadamard früher ausgesprochener Satz der einzige Fall ist, in dem die gefundenen Besonderheiten auftreten können. Lp.

M. Disteli. Ueber Rollcurven und Rollflächen. Schlömilch Z. **43**, 1-35.

Die in der Kinematik als Rollflächen bekannten Flächen bilden die Grundkörper der sogenannten unrunden Räder (Burmester, Lehrbuch der Kinematik, **1**, 370ff. 1886), die dazu dienen, eine gleichförmige Rotationsbewegung der einen Welle in eine ungleichförmige der andern Welle umzusetzen. Sie sind im allgemeinen Cylinder-, Kegel- oder windschiefe Regelflächen, je nachdem die Axen der Wellen zu einander parallel sind oder sich im Endlichen schneiden oder sich kreuzen. Die Uebertragung der Bewegung der einen Welle auf die andere geschieht dann in der Weise, dass die beiden Rollflächen sich um ihre Axen drehen und gleichzeitig auf einander rollen, wobei jedoch im Falle der gekreuzten Axen zu der rollenden noch eine gleitende Bewegung beider Flächen an einander hinzutreten wird, welcher Bewegungsvorgang als Schroten (Reuleaux, Theoretische Kinematik, S. 83ff.) der Flächen bezeichnet worden ist. Diese gleitende Bewegung kann dadurch beseitigt werden, dass man eine oder beide Flächen zugleich eine Translationsbewegung längs der Axen ausführen lässt; in diesem Falle gehen dann die eine oder beide Flächen in allgemeine Schraubenregelflächen über, wobei die Punkte kürzester Distanz der Erzeugenden von der Axe

Schraubenlinien von veränderlichem Radius und veränderlicher Steigung beschreiben und der Richtungskegel kein Umdrehungskegel mehr ist. Zwei so gestaltete Flächen sind dann wieder befähigt, ohne Gleiten zu rollen. Die Aufgabe, durch gleichförmige Rotationsbewegung einer Welle eine ungleichförmige an einer zweiten Welle hervorzubringen, wird durch die Aufsuchung der entsprechenden Rollflächen kinematisch vollständig gelöst. Zur Uebertragung einer bestimmten mechanischen Arbeit der einen Welle auf die andere sind dagegen beide Grundkörper mit Zähnen zu versehen, die so zu formen sind, dass beim Gleiten entsprechender Zahnflanken auf einander die Bewegung continuirlich und möglichst genau so vor sich geht, als ob eben die Rollflächen der Grundkörper auf einander rollen würden. Der Verf. behandelt die oben genannten drei Arten von Flächen nach einheitlichem Gesichtspunkte und legt besonders Nachdruck darauf, dass die Untersuchung zugleich auch die graphische Darstellung der Gebilde ergiebt. Scht.

M. H. Doolittle, A. Martin, W. Siverley. Solution of problem 162. Math. Magazine **2,** 241-251.

Das alte Problem der Verfolgungscurve wird hier in der Gestalt vorgeführt, dass die Verfolgung auf einem rechteckigen stromabwärtstreibenden Floss vor sich geht, und dass eine Spinne, die von einer Ecke des Rechtecks aufbricht, eine Wanze verfolgt, die von der in gleicher Stromhöhe liegenden anderen Ecke ihren Lauf längs der Seite macht, welche in der Stromrichtung liegt. Die Spinne erreicht die Wanze in der Gegenecke des Anfangspunktes ihrer Bewegung. Sowohl die Bewegung auf dem Floss als auch die absolute Bewegung im Raume werden bestimmt. Lp.

J. J. Taudin Chabot. A new combination of wheel-gearing I, II. Phil. Mag. (5) **46,** 428, 571-572.

Die ungemein kurz gefassten Mitteilungen ohne erläuternde Abbildungen geben kein klares Bild von den Ideen des Verf. Nach der zweiten Mitteilung bilden die Zähne des Modells Schraubenlinien; der Mechanismus soll zur Umwandlung einer Rotationsbewegung in eine Translationsbewegung dienen. Lp.

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

J. Farkas. Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des Fourier'schen Principes in der Mechanik. Ungar. Ber. **15,** 25-40.

Die Anwendung der Gleichung $\Sigma P\delta p \overline{\gtrless} 0$ in der Statik ist unter

dem Titel des Fourier'schen Princips vom Verf. in der Abhandlung erörtert: „Ueber die Anwendungen des mechanischen Princips von Fourier" (Ungar. Ber. **12**, 263-281; F. d. M. **25**, 1356, 1894). Die Brauchbarkeit der damals benutzten Methode der Lagrange'schen Multiplicatoren für die Behandlung linearer Ungleichheiten wurde zwar a. a. O. bewiesen; jener Beweis war jedoch etwas schwerfällig und mit einigen unbewiesenen Hülfssätzen bepackt. Gegenwärtig wird ein einfacher Beweis geführt, „und wenn er auch nicht kürzer ist als der frühere, so findet dies darin die Erklärung, dass ich dabei drei dazu gehörige Hülfssätze beweise." Lp.

G. Susloff. Ueber das Princip der virtuellen Verrückungen. Kiew Univ. Nachr. 1898, 11-12.

Der Autor erhält die Gleichgewichtsbedingungen des Systems in der Lagrange'schen Form aus den Gleichungen der Bewegung des Systems. Jk.

W. Stäckel. Zur graphischen Behandlung der Kräfte im Raume. Schlömilch Z. **43**, 62-64.

Einzelne Bemerkungen über die vorteilhafteste Art, bei der zeichnerischen Lösung der Grundaufgaben über die Zusammensetzung und die Zerlegung von Kräften, die einen starren Körper angreifen, zu verfahren. Lp.

W. J. Dobbs. Question 13454. Ed. Times **68**, 59-60.

Vier coplanare Kräfte, die im Gleichgewichte stehen, haben die Richtungslinien AB, BC, CD, DA, und ihre Intensitäten sind bezw. proportional zu CD, DA, AB, BC. Dann ist entweder $ABCD$ ein Kreisviereck, oder jeder der Punkte A, B, C, D ist der Höhenschnitt des durch die drei anderen gebildeten Dreiecks. Beweise von Lionel, E. Reay, J. Cullen. Lp.

G. E. Crawford. The centre of gravity of a circular arc. Edinb. M. S. Proc. **16**, 46.

J. Dougall. Note on the centre of gravity of a circular arc. Ibid. 49-50.

Elementare Beweise für die Formeln, welche die Lage des Schwerpunktes bestimmen. Gbs. (Lp.)

F. Caspary. Applications des méthodes de Grassmann. Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone. Nouv. Ann. (3) **17**, 389-411.

Der Aufsatz ist der erste aus einer Reihe von Artikeln, in denen der Verf. die Fruchtbarkeit der Grassmann'schen Methoden auf den

verschiedensten Gebieten der Mathematik erläutern und durch welche er Freunde für sie werben will. Gegenwärtig benutzt er die ersten Principien jener Methoden zur Ableitung einer Reihe von Constructionen für den Schwerpunkt der homogenen Flächen eines Vierecks und eines Fünfecks. Hierbei ergeben sich viele merkwürdige Relationen zwischen Punkten, die mit diesen Figuren in engem Zusammenhange stehen. Wenn beim Vierecke die genetisch erzeugten Constructionen schon bekannt waren, so sind dagegen beim Fünfecke durch die in consequenter Weise fortgeführten Betrachtungen ganz neue Zusammenhänge aufgedeckt worden, die aber zu mannigfach sind, um hier wiedergegeben zu werden. Lp.

J. Hadamard. Sur la généralisation du théorème de Guldin. S. M. F. Bull. **26**, 264-265.

Für die von G. Koenigs gegebene Verallgemeinerung des Guldin'schen Theoremes (vergl. F. d. M. **21**, 867, 1889) liefert der Verf. eine Herleitung, welche die Form des Resultates anschaulich macht. Lp.

Kuscow. Sur la généralisation des théorèmes de Guldin. Nouv. Ann. (3) **17**, 209-215.

Bemerkungen über Analogien mit den Guldin'schen Theoremen bei der allgemeinen Auswertung des Volumens oder der Oberfläche eines Körpers durch vielfache Integrale. Lp.

L. Lecornu. Sur la stabilité de l'équilibre. C. R. **126**, 1777-1778.

Die Untersuchungen des Verf. hängen eng mit dem Artikel von Andrade zusammen, über den man F. d. M. **28**, 631, 1897 vergleiche. Wir führen nur die Schlusssätze an: „Andrade hat schon die Bemerkung gemacht, es berechtige nichts zu dem Schlusse, dass bei Kräften, die kein Potential besitzen, die Einführung von Verbindungen die Stabilität nicht beeinträchtigt. Zur Rechtfertigung dieser Verwahrung hat er ein Beispiel angeführt, bei welchem zwei Kräfte, alle beide Punktfunctionen, einzeln ein stabiles Gleichgewicht geben, während ihre Resultante ein instabiles Gleichgewicht liefert. Interessant war nun die Bestätigung, dass dasselbe wirklich eintritt, wenn man Verbindungskräfte betrachtet, die nicht Punktfunctionen sind." Lp.

L. Lecornu. Sur la stabilité de l'équilibre. S. M. F. Bull. **26**, 163-176.

Während die im vorangehenden Referate angezeigte Note aus C. R. **126** nur die Resultate einer grösseren Untersuchung enthält, giebt der vorliegende Aufsatz die vollständige Darstellung des Gedankenganges, der zu dem Resultate führt: Wenn ein Punkt in statischem Gleichgewichte ist unter der Einwirkung von Kräften, die kein Potential zulassen, so

kann die Einführung neuer Verbindungen die Stabilität zerstören, statt sie zu verstärken. Zu diesem Zwecke betrachtet der Verf. einen Punkt von der Masse 1 und lässt auf ihn eine Kraft wirken, deren nach den rechtwinkligen Axen genommene Componenten die Ausdrücke haben:

$$X = mx + ny + pz,\quad Y = m'x + n'y + p'z,\quad Z = m''x + n''y + p''z,$$

wo die neun Coefficienten $m, n, p, \ldots$ gegebene Constanten sind. Die von der Bewegung des Punktes ausgehende elegante analytische Behandlung liefert eine Reihe von Sätzen, welche die Bedingungen des gewollten Zieles in anschaulicher Form enthalten. Lp.

J. Andrade. Sur la stabilité. C. R. **127**, 712-713.

Die Bedenken, welche Lecornu in den vorangehend besprochenen Artikeln gegen die Schlussweise der ersten Veröffentlichung des Verf. erhoben hat, werden als nicht begründet zurückgewiesen, und die damals gegebene Beweisführung wird ergänzt. Lp.

J. Andrade. Statique non-euclidienne. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1** (1897), 251-253.

Kurze Angabe verschiedener vom Verf. erreichten Resultate: Die Zusammensetzung der in einem Punkte zusammenlaufenden Kräfte und die sphärische Trigonometrie sind vom euklidischen Postulate unabhängig. Das Theorem von der virtuellen Arbeit bleibt bei einem starren Körper für das Gleichgewicht bestehen, u. s. w. Lp.

G. Kalkmann. Das Gesetz der collinearen und reciproken Aequivalenz. Monatsh. f. Math. **9**, 55-73.

Ein Kräftepaar ist in seiner Ebene beliebig verschiebbar, ein Drehungspaar (bei unendlich kleinen Drehungen) aber nur parallel zu seinem Arme. Ein ebenes Kräftesystem $\mathfrak{S}$ enthält daher ∞^3 Kräfte und ∞^1 Kräftepaare, ein ebenes Rotationssystem $\mathfrak{W}$ dagegen ∞^3 Rotationen und ∞^2 Drehungspaare. Will man analoge Betrachtungen zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}$ durchführen, so fragt es sich, was auf Grund der Analogien der Schar - Schar von Drehungspaaren in dem Kräftesystem entspricht. Bei dem Versuche, das Gesetz aufzufinden, dem die angezogenen Analogien gehorchen, ist der Verf. auf zwei Gesetze geführt, nämlich auf das Gesetz der collinearen Aequivalenz und das Gesetz der reciproken Aequivalenz. Die Aufgabe ist aber allgemeiner gefasst, nämlich rein geometrisch, indem die Verwandtschaftsgesetze zwischen der Theorie der Stäbe und derjenigen der Winkel aufgesucht werden. Diese Gesetze stehen im Zusammenhange mit der Einführung des Reciprocitätsgesetzes in die Mechanik, begonnen durch Chasles und Plücker, abgeschlossen durch Lindemann und F. Klein. Dieses Gesetz gelangt dadurch in unsere Mechanik, dass seine Einführung in der geometrischen Theorie der Stäbe und Winkel gelingt; indem es sich

durch Hineinziehung metrischer Relationen zum Gesetze der reciproken Aequivalenz erweitert, zeigt Letzteres in der besagten Theorie einen vollständigen Dualismus. Die angezogenen Analogien haben nur Gültigkeit für das Gesetz der affinen Aequivalenz, aber nicht für das der reciproken Aequivalenz oder eines Specialfalles des letzteren.

Lp.

E. Hammer. Zur Berechnung der Senkungen der Knotenpunkte eines Fachwerks. Schlömilch Z. **43,** 58-61.

Zur Berechnung der Winkeländerungen bei einem Dreiecke in einem Fachwerke zufolge der Belastung hat A. Francke in der Zeitschrift für Bauwesen **48,** 111 ff. (1898) Formeln gegeben, die sich zur numerischen Berechnung wenig eignen. Sind a, b, c die Seiten und A, B, C die Winkel eines Dreiecks, so findet der Verf. durch Differentiation der Cosinusformel leicht:

$$\varDelta A = \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta b}{b}\right)\operatorname{cotg} C + \left(\frac{\varDelta a}{a} - \frac{\varDelta c}{c}\right)\operatorname{cotg} B,$$

nebst den beiden entsprechenden für $\varDelta B$ und $\varDelta C$, wo $\varDelta$ die Aenderung der betreffenden Grösse bezeichnet. Diese Form, welche für die Auswertung mit dem Rechenschieber bequem ist und ein genaues Resultat liefert, hält der Verf. im vorliegenden Fall für die beste. Lp.

W. K. Palmer. A graphical method for constructing the catenary. Kansas Univ. Quart. **7,** 211-230.

Zuerst wiederholt der Verf. die analytische Ableitung der geometrischen und mechanischen Eigenschaften der gemeinen Kettenlinie; hierauf zeigt er, wie man die Grundaufgaben über die Kettenlinie graphisch lösen kann. Der Aufsatz soll dem zeichnenden Ingenieur die Mühe der Rechnung ersparen. Vergl. S. 512 dieses Bandes der F. d. M.

Lp.

M. Lagoutinsky. Sur une intégrale d'un problème sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Nouv. Ann. (3) **17,** 149-153.

In Bezug auf die bekannten Differentialgleichungen der Fadencurven:

$$(1) \qquad \frac{d}{ds}(Tx_i') + kX_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

löst der Verf. die Aufgabe: Drei in x_1', x_2', x_3' lineare Functionen U_i $(i = 1, 2, 3)$ der Variabeln $x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3', s$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$P = U_1 \frac{d}{ds}(Tx_1') + U_2 \frac{d}{ds}(Tx_2') + U_3 \frac{d}{ds}(Tx_3')$$

vermöge der Relation $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$ ein vollständiges Differential

werde; ferner, wenn nötig, die Bedingungen aufzustellen, damit

$$Q = kX_1 U_1 + kX_2 U_2 + kX_3 U_3,$$

mit ds multiplicirt, ein vollständiges Differential werde. Dann giebt nämlich $\int P ds + \int Q ds = C$ ein Integral der Differentialgleichungen (1). Viele bekannte Lösungen derselben lassen sich hierauf zurückführen, insbesondere auch die von N. Saltykoff in Nouv. Ann. (3) **16** (F. d. M. **28,** 631, 1897). Lp.

A. G. Greenhill. The catenary, and associated trajectory, on the paraboloid, the cone etc. Lond. M. S. Proc. **29,** 585-670.

Die vorliegende umfangreiche Arbeit, die eine erstaunliche Rechenarbeit bewältigt (die Anzahl der numerirten Gleichungen beträgt 923), bewegt sich in derselben Richtung wie die früheren Abhandlungen des Verf. aus der Dynamik, die in F. d. M. **26,** 846ff., 1895 und **27,** 590, 1896 besprochen sind. Der Verf. handhabt mit virtuoser Geschicklichkeit die Formeln der elliptischen Transcendenten und benutzt die letzteren, um gewisse Fälle bis zur numerischen Durchrechnung und graphischen Darstellung in hübsch gewählten Formen vollständig zu erledigen. In einem der früheren Artikel wurden die Eigenschaften der sphärischen Kettenlinie behandelt; zuletzt wurde die Gestalt der Curve betrachtet, wenn die Kugel sich um eine verticale Axe mit solcher Schnelligkeit dreht, dass der Einfluss der Schwere ausser Rechnung gelassen werden kann. Da die analytischen Resultate dieses letzten Problems wesentlich die nämlichen sind wie bei der Kettenlinie auf einem verticalen Rotationsparaboloid, so wird jetzt die Untersuchung hierbei wieder aufgenommen, und die verwandten Aufgaben werden auf die Kettenlinie auf dem Kegel u. a. m. ausgedehnt; zugleich werden die mit jenen Aufgaben zusammenhängenden Probleme der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Umdrehungsfläche behandelt. Die Erläuterung der Theorie erfolgt an den einfachsten „pseudoelliptischen" Fällen; bei ihnen wird daher die Construction einer Kettenlinie oder Bahncurve auf die Benutzung der bekannten Tafeln für die elliptischen Transcendenten zurückgeführt. Als Schriften, die denselben Gegenstand behandeln, citirt der gelehrte Verf.: Bertram, Diss. Marburg 1876; J. Osswald, Diss. Freiburg 1876; L. Neumann, Diss. Freiburg 1878; L. Schönlicht, Diss. Freiburg 1884; Sonntag, Diss. Marburg 1886, wohl nach dem Verzeichnis der Doctordissertationen aus der Mathematik (München 1893); sonst hätten auch noch andere Abhandlungen angeführt werden können. In allen diesen dynamischen Anwendungen, wo elliptische Integrale dritter Gattung auftreten, ist der Jacobi'sche Parameter ein Bruchteil der imaginären Periode, so dass die Integrale nach der Legendre'schen Terminologie von der circularen Form sind. Daher lassen sich die vom Verf. in Lond. Math. Soc. Proc. **25** behandelten pseudoelliptischen Fälle hierfür benutzen, falls diese Formeln durch

gewisse Tafeln für praktische Fälle ergänzt werden (vergl. F. d. M. **25,** 772, 1894). Lp.

É. Collignon. Sur la détermination des moments d'inertie de points matériels situés dans un plan. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26,** 1-6.

Verf. wendet auf die Bestimmung der Trägheitsmomente isolirter Punkte die aus der Betrachtung eines zusammengesetzten, von diesen Punkten gebildeten Pendels sich ergebende Methode an. Das durch aufsteigende Erörterung zweier, dreier, . . . Punkte gewonnene Resultat lautet: Ist der Schwerpunkt G_0 von n Massenpunkten gegeben, die eine Gesamtmasse μ besitzen, und ausserdem der Trägheitsradius K_0 dieser n Punkte in Bezug auf den Punkt G_0, so findet man das Quadrat des Trägheitsradius K des durch Hinzunahme eines $(n+1)^{\text{ten}}$ Punktes von der Masse m entstehenden Systems von $n+1$ Punkten, indem man zunächst den Schwerpunkt G dieser $n+1$ Punkte bestimmt und dann einen Kreis durch die drei Punkte A, B, m legt, wo A und B zwei Punkte einer durch G_0 gezogenen Geraden sind, für welche die Beziehung $G_0A.G_0B = K_0^2$ gilt. Dieser Kreis trifft die Gerade mG in einem Punkte H, und man hat endlich $K^2 = Gm.GH$. Lp.

E. Rehfeld. Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern. Hoppe Arch. (2) **16,** 36-67.

Die Methode, welche der Verf. zur Berechnung einer Reihe von Trägheitsmomenten anwendet, ist diejenige, welche unter anderem in der ersten Auflage von Schell's „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ (1870), S. 743-746 angegeben und zum Teil an denselben Beispielen erläutert ist, was dem Verf. unbekannt geblieben zu sein scheint. Der bezügliche zugrunde liegende Satz lautet bei Schell: „Ist ε das Aehnlichkeitsverhältnis zweier ähnlichen homogenen Systeme, so ist das Verhältnis ihrer Trägheitsmomente H, H' in Bezug auf zwei ähnlich liegende Axen h, h' gleich ε^n, wo $n = 3, 4, 5$, je nachdem die Systeme eine, zwei oder drei Dimensionen besitzen, d. h. $H' = \varepsilon^n H$.“ Lp.

V. Baggi. Esame del compenso fra lo scavo ed il riporto nei progetti stradali. Torino Atti **33,** 701-728.

B. Hydrostatik.

G. van der Mensbrugghe. Sur l'interprétation du principe d'Archimède fondée sur la parfaite élasticité des liquides. Belg. Bull. (3) **35,** 181-188.

G. van der Mensbrugghe. Le principe d'Archimède et l'égalité de l'action et de la réaction. Brux. S. sc. **34,** 5 S.

Wenn man die Flüssigkeit nicht als incompressibel, sondern als vollkommen elastisch, also compressibel ansieht, so kann man zur Erklärung des Archimedischen Princips das Spiel der inneren (molecularen) Kräfte heranziehen. Dies sieht der Verf., indem er sich auf seine früheren Arbeiten über die Elasticität der Flüssigkeiten bezieht, als etwas Neues an, ohne anzudeuten, in wie fern seine Anschauungsweise von derjenigen abweicht, nach welcher man das Archimedische Princip in elastischen Gasen schon immer angewandt hat. Die von ihm gegebenen Versuche, welche die Notwendigkeit und Nützlichkeit seiner Betrachtungsweise darthun sollen, zeigen nur, dass das Archimedische Princip nicht anwendbar ist, wenn die in ihm enthaltene Bedingung nicht erfüllt ist, dass der Körper allseitig von der Flüssigkeit umgeben sein muss.

Lp.

P. Duhem. Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 21-25 (1897).

Für die Stabilität des Gleichgewichtes ist es notwendig und hinreichend, dass eine gewisse quadratische Form der in Betracht kommenden Variationen eine definite positive Form ist. Die Untersuchungsmethode umfasst auch, nach Angabe des Verf., zwei verwickeltere Fälle.

Lp.

Mathy. De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène. Journ. de Math. (5) **4**, 231-237.

Verf. geht aus von der Darstellung der Attractionscomponenten eines Ellipsoids durch elliptische Functionen. Der Grenzübergang zu den beiden Rotationsellipsoiden wird gemacht. Im zweiten Abschnitte wird dann mit Hülfe des Satzes, dass die freie Oberfläche eine Fläche constanten Potentials sein müsse, die transcendente Gleichung zwischen den drei Axen und der Ausdruck für die Geschwindigkeit des frei rotirenden Ellipsoids aufgestellt. Auch hier wird der Uebergang zu dem Rotationsellipsoid gemacht.

F. K.

S. Krüger. Sur l'ellipsoïde de Jacobi. C. R. **126**, 1126.

Die Notiz bezieht sich auf einen früheren Artikel des Verf. über denselben Gegenstand vom 7. März 1898. Es wird im Gegensatz zu der früheren Abhandlung hervorgehoben, dass Schwarzschild die Formel von Roche: $2{,}44 R\sqrt[3]{\delta/\varrho}$ für das Minimum eines elliptischen Satelliten der Dichtigkeit ϱ von einem kugelförmigen Planeten mit dem Radius R und der Dichtigkeit δ gekannt habe, und dass derselbe das Resultat dahin erweitert habe, dass diese Formel für jede Gleichgewichtsfigur gelte.

F. K.

G. Tolomei. Sopra la forma di equilibrio di una massa fluida animata di un movimento di rotazione. Firenze: Fiorentino. 59 S. 8°.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

L. Koenigsberger. Ueber das erweiterte Princip der Erhaltung der Flächen und dessen Anwendung auf kinetische Potentiale erster Ordnung. Berl. Ber. 1898, 148-158.

In dem Aufsatze „Ueber die Principien der Mechanik“ in Berl. Ber. 1896 (F. d. M. **27**, 572-574, 1896) hatte der Verf. das Princip der Erhaltung der Flächen auf allgemeine kinetische Potentiale unter der Voraussetzung ausgedehnt, dass unter Benutzung der Bezeichnungen der Mechanik wägbarer Materie eine Trennung des kinetischen Potentials in die beiden Teile stattfindet, welche die actuelle und die potentielle Energie darstellen. Wegen der Anwendungen wird jetzt die Verallgemeinerung des bezeichneten Satzes für eine beliebige Zusammensetzung des kinetischen Potentials aufgestellt. Hierauf wird specieller auf den Fall eingegangen, dass ein Punkt einem kinetischen Potential erster Ordnung von einer gewissen Form unterworfen ist, für welchen Fall das Theorem hergeleitet wird: Die Integration aller Bewegungsgleichungen, welchen ein kinetisches Potential erster Ordnung zu Grunde liegt, das nur von der Entfernung des beweglichen Punktes von einem festen Punkte, deren nach der Zeit genommenen Ableitung und der Geschwindigkeit desselben abhängt, ist stets auf einfache aus dem kinetischen Potential zusammengesetzte Quadraturen zurückführbar. Mit Hülfe dieses Satzes wird endlich die Bewegung eines Punktes untersucht, der von den Massenelementen eines in concentrischen Schichten homogenen Kugelringes nach dem Weber'schen Gesetze angezogen wird und sich ausserhalb des Ringes oder innerhalb des Hohlraumes befindet. Es ergiebt sich unter anderem, dass der Punkt innerhalb des Kugelringes sich in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit bewegt. Lp.

L. Koenigsberger. Ueber die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrange'scher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials. Math. Ann. **51**, 584-607; Berl. Ber. 1898, 491-496.

Der Verf. wirft die Frage auf, in welchen Fällen die Lagrange'schen Gleichungen für kinetische Potentiale k^{ter} Ordnung sich durch Elimination von Parametern auf Lagrange'sche Gleichungen von weniger Parametern, aber mit einem kinetischen Potentiale von höherer als der k^{ten} Ordnung zurückführen lassen, im einfachsten Falle, wann Bewegungsgleichungen mit einem kinetischen Potentiale, welches von μ Parametern und deren ersten Ableitungen abhängt, sich reduciren lassen auf Lagrange'sche Gleichungen von weniger Parametern mit einem kine-

tischen Potentiale, welches eben diese mit ihren ersten und zweiten Ableitungen enthält. Das Problem, in der Sprache der Mechanik ausgedrückt, fordert also die Angabe der Fälle, in denen für die Bewegung eines Systems, dessen unabhängige Parameter von Kräften angegriffen werden, welche von diesen und deren ersten Ableitungen abhängen, die Veränderungen einer geringeren Anzahl von Parametern als durch solche Kräfte hervorgebracht dargestellt werden können, welche von den Coordinaten und deren höheren Ableitungen abhängen. Als Frage rein analytischer Natur aufgefasst, handelt es sich um die Discussion der Form des Eliminationsresultates, welches durch die Elimination von Variabeln aus den Lagrange'schen Gleichungen entsteht, die zu einem kinetischen Potential irgend welcher Ordnung gehören, und um die Feststellung, wann dasselbe wieder die Lagrange'sche Form annimmt, und zwar für ein kinetisches Potential höherer Ordnung. Die gefundenen Resultate werden in Gestalt längerer Sätze von analytischer Fassung ausgesprochen, müssen daher im Original nachgelesen werden. Der Aufsatz in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie ist ein Auszug aus der Abhandlung der Math. Ann. Lp.

A. Hirsch. Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. Math. Ann. **50**, 429-441.

Der Verf. erledigt die Frage, unter welchen Bedingungen ein System von Kräften ein kinetisches Potential im erweiterten Sinne von Koenigsberger besitzt, in völlig allgemeiner Weise und fasst gleichzeitig die bezüglichen, vom physikalischen Gesichtspunkte so bedeutungsvollen Resultate von Helmholtz in einer Formulirung zusammen, welche geeignet erscheint, die Wechselbeziehungen und Reciprocitätsverhältnisse in einem von einem kinetischen Potential abhängigen Kraftsysteme besonders klar hervortreten zu lassen. Ihrem mathematischen Gehalte nach deckt sich die Frage im wesentlichen mit der Aufgabe, die Structurverhältnisse der Differentialgleichungen zu untersuchen, welche bei einer Klasse von Problemen der Variationsrechnung auftreten. Im § 1 werden einige Bemerkungen über Systeme linearer Differentialgleichungen vorausgeschickt. Im § 2 wird eine gewisse Eigenschaft der Potentialkräfte abgeleitet, die sich im § 3 als charakteristisch für dieselben erweist. Schliesslich bringt § 4 den Nachweis, dass die in Rede stehende Eigenschaft eines Functionensystems sich bei allgemeiner Punkttransformation im wesentlichen invariant überträgt. Von den abgeleiteten Sätzen möge der am Schlusse von § 3 befindliche (No. III) hier Platz finden: „Die Kräfte, welche ein kinetisches Potential besitzen, sind vollständig durch die Eigenschaft charakterisirt, dass die Variationen, welche sie bei virtueller Verschiebung des materiellen Systems erfahren, ein zu sich selbst adjungirtes System linearer Differentialausdrücke bilden“. Lp.

Ad. Mayer. Ueber die lebendige Kraft der durch plötzliche Stösse in einem System materieller Punkte erzeugten Geschwindigkeitsänderungen. Leipz. Ber. **50,** 1898, 246-253.

Nach einem Hinweise auf einen bezüglichen Satz in Routh's Dynamik der Systeme von starren Körpern formulirt der Verf. eine Minimalaufgabe, die sich in ähnlicher Weise wie bei anderen Autoren so aussprechen lässt: „Wenn ein System materieller Punkte plötzlich von Stössen ergriffen wird, die im Verein mit den bereits erlangten Geschwindigkeiten den einzelnen Punkten gegebene Geschwindigkeiten mitzuteilen streben, so reguliren sich diese Geschwindigkeiten in der Weise, dass die lebendige Kraft der in Folge der Verbindungen und Beschränkungen des Systems verlorenen Geschwindigkeiten ein Minimum wird". Danach werden die folgenden beiden Sätze hergeleitet: 1. „Jede plötzliche Herstellung von festen Verbindungen in einem bewegten System materieller Punkte verändert die Geschwindigkeiten der Punkte in der Weise, dass die lebendige Kraft der eintretenden Geschwindigkeitsänderungen ein Minimum wird". 2. „Bewegen sich zwei Systeme materieller Punkte anfangs gemeinsam so, dass gewisse Punkte des einen mit gewissen Punkten des andern zusammenfallen und zusammenbleiben, und setzen sich dann von diesen Punkten die des einen Systems plötzlich selbständig und auf gegebene Weise relativ zu ihren Trägern in Bewegung, so ändern sich auch hierdurch wieder die Geschwindigkeiten des ganzen Systems in der Weise, dass die lebendige Kraft der wirklich resultirenden Geschwindigkeitsänderungen aller Punkte beider Systeme ein Minimum wird". Lp.

D. de Francesco. Sull'urto di due corpi solidi. Napoli Rend. (3) **4,** 352-354.

Beweis des folgenden Satzes: Bei dem Stosse zweier festen, völlig zerpulverten Körper ist die von den verlorenen Geschwindigkeiten herrührende verlorene lebendige Kraft ein Minimum, im Vergleich (compatibilmente) mit dem Endwerte der Differenz zwischen den Geschwindigkeiten der Treffpunkte, geschätzt nach der gemeinschaftlichen Normale. Lp.

V. Volterra. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Torino Atti **33,** 451-475.

V. Volterra. Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche. Torino Atti **33,** 542-558.

V. Volterra. Sopra una classe di moti permanenti stabili. Torino Atti **34,** 247-255 (1899).

Bei der Darstellung der Gedanken dieser drei unter einander eng zusammenhängenden Abhandlungen folgen wir den Ausführungen des Verf. in der Einleitung zur ersten.

In der Dynamik der freien, starren, Kräften nicht unterworfenen Systeme genügen die drei Componenten der Translationsgeschwindigkeit

und diejenigen der Rotationsgeschwindigkeit einem Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchem diese sechs Elemente für sich allein auftreten. Eine ähnliche Aufgabe hat man, wenn die Bewegung eines starren, in eine unbegrenzte Flüssigkeit eintauchenden Körpers erforscht wird. In einer Untersuchung über die spontane Rotation der Körper, in denen cyklische Bewegungen bestehen (F. d. M. **26**, 859, 1895 u. **27**, 627, 1896), hat der Verf. gezeigt, wie die drei Componenten der Rotation des Körpers und alle cyklischen Geschwindigkeiten bestimmt werden können, wenn man von einem Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung ausgeht, in dem diese Grössen allein auftreten.

Es sind nun unendlich viele andere Fälle denkbar, in denen bei der Beschreibung der augenblicklichen Bewegung des Systems mit Hülfe unabhängiger Parameter, wenn das System seiner eigenen Trägheit überlassen wird, die Bewegungsgleichungen in zwei Gruppen zerlegbar sind, von denen die erste ein auf die besagten Parameter bezogenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung ist, welche Parameter allein in ihnen als variable Elemente vorkommen. Das Problem der Bestimmung dieser Parameter selbst als Functionen der Zeit bildet somit eine Aufgabe für sich, die unabhängig von der vollständigen dynamischen Frage erörtert werden kann. Die vorliegenden Untersuchungen sollen nun in eine systematische Erforschung aller dieser Fälle und der zugehörigen Differentialgleichungen einführen. Ihr Typus erhellt aus dem der Euler'schen Differentialgleichungen der starren Systeme und aus dem der Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Diese Forschung beschränkt sich nicht auf die holonomen Systeme, sondern umfasst den allgemeinen Fall aller derjenigen dem Lagrange'schen Fundamentalprincipe der Dynamik unterworfenen Systeme, deren Fesseln durch Gleichungen zwischen den Coordinaten und ihrer Differentiale darstellbar sind. Durch das Hineinziehen der nicht holonomen Systeme wird das Gebiet dieser Untersuchungen bedeutend ausgedehnt. Die unabhängigen Parameter $p_1, p_2, \cdots, p_r$, welche die augenblickliche Bewegung eines Systems kennzeichnen, werden vom Verf. die „Charakteristiken“ der Bewegung genannt, und daher wird der Name „spontane Bewegungen mit unabhängigen Charakteristiken“ denjenigen erteilt, welche den Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen bilden.

Die einzelnen Paragraphen der ersten Arbeit sind betitelt: § 1. Charakteristiken der Bewegung und Berechnung ihrer Variationen. § 2. Eigenschaften der Coefficienten $a_{sr}^{(u)}$, $b_{sr}^{(u)}$. § 3. Die Differentialgleichungen der Bewegung. § 4. Das Integral der lebendigen Kraft. §. 5. Fall, in dem die Gleichungen (C) die Lagrange'schen Gleichungen werden. § 6. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen. § 7. Spontane Bewegungen mit unabhängigen Charakteristiken. § 8. Integrale ersten Grades der Gleichungen der spontanen Bewegungen mit unabhängigen Charakteristiken. § 9. Integrale zweiten Grades. § 10. Integrale ersten und zweiten Grades. — Nennt man die Anzahl r der Para-

meter p_i eines Systems mit unabhängigen Parametern seine „Ordnung“, so gilt u. a. der Satz: „Wenn man ausser dem Integrale der lebendigen Kraft $\nu - 3$ von der Zeit unabhängige Integrale der Gleichungen einer spontanen Bewegung mit unabhängigen Charakteristiken von der Ordnung ν kennt und eins derselben ein Integral zweiten Grades ist (dessen determinirende Gleichung ungleiche Wurzeln habe), so ist die Bestimmung der Charakteristiken auf Quadraturen zurückführbar“.

In der zweiten Arbeit wird zunächst der Fall der Bewegungen zweiter Ordnung untersucht, d. h. also derjenigen, welche nur von zwei Parametern abhängen; diese letzteren werden als Functionen der Zeit mit Hülfe der Exponentialfunctionen erhalten. Dann wird ein nicht-holonomes System behandelt, das als typisches System zweiter Ordnung genommen werden kann. An diesem System wird der Gang der Bewegung vollständig verfolgt, und zugleich werden die Besonderheiten hervorgehoben, die man in dem Falle permanenter Bewegungen beobachtet; ferner wird der Fall der stabilen Bewegung von dem der instabilen unterschieden. In den beiden folgenden Paragraphen werden Bewegungen der Ordnung ν erledigt, wenn $\nu - 2$ lineare Integrale oder $\nu - 3$ lineare und ein quadratisches vorhanden sind. Wenn die determinirende Gleichung ungleiche Wurzeln besitzt, so sind gemäss einem vom Verf. schon 1895 gefundenen Resultate die Charakteristiken elliptische Functionen der Zeit. In dem letzten Paragraphen wendet Volterra eine „geniale Bemerkung von Poincaré, die schon von Picard und Painlevé in einigen Fragen der Mechanik mit Erfolg benutzt ist“, auf den allgemeinsten Fall an und erhält dadurch die Charakteristiken als Functionen der Zeit mit Hülfe von Reihen ausgedrückt, die für alle Werte der Zeit gültig sind, und deren Coefficienten durch rationale Operationen aus den bekannten Constanten der Differentialgleichungen und aus den Anfangswerten der Charakteristiken gewonnen werden. Damit ist das Problem der analytischen Bestimmung der Charakteristiken als Functionen der Zeit vollständig gelöst.

In der letzten Abhandlung werden einige Eigenschaften, die der Verf. hinsichtlich der Stabilität der Rotationen von Systemen früher bewiesen hat (vergl. die oben citirten Arbeiten aus 1895), jetzt auf einen allgemeinen Fall der Bewegungen mit unabhängigen Charakteristiken ausgedehnt. Es sei $F = \text{const.}$ das eine Integral zweiter Ordnung für die Differentialgleichungen der unabhängigen Charakteristiken p_i:

$$(A)\quad p_s' = \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T,\, F)}{d(p_k,\, p_r)},$$

so heisst die Bewegung permanent, sobald die Charakteristiken p_1, $p_2, \ldots, p_\nu$ constant sind. Man erhält unendlich viele permanente Bewegungen, wenn man die p_i so bestimmt, dass die Gleichungen befriedigt werden:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial T}{\partial p_1}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial T}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_\nu}}{\dfrac{\partial T}{\partial p_\nu}}.$$

Den effectiven Maximis und Minimis von F entsprechen, mit der Zusatz-Bedingung $T =$ const., permanente stabile Bewegungen des Systems; mit Umkehrung von F und T: Den effectiven Maximis und Minimis der lebendigen Kraft entsprechen, mit der Zusatz-Bedingung $F =$ const., permanente stabile Bedingungen des Systems. — Die dem Verschwinden aller Charakteristiken mit Ausnahme von p_i oder p_s entsprechenden Bewegungen des Systems sind permanente stabile Bewegungen. Zuletzt werden die kleinen Störungen der Bewegungen als periodisch nachgewiesen. Lp.

É. Picard. Sur la résolution de certains problèmes de mécanique par des approximations successives. Torino Atti **34**, 6-10.

In der Vorrede zum dritten Bande des Traité d'analyse (1896) sagt Picard: „Die glänzende Entwickelung der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen hatte etwas zu sehr die Prüfung des Falles ausser Acht gelassen, bei welchem alle in den Differentialgleichungen auftretenden Elemente reell sind. Unter dem Einflusse der Arbeiten von Poincaré über die durch Differentialgleichungen definirten Curven sind diese Fragen seit einigen Jahren wieder aufgenommen worden.“ Picard selbst hat durch seine Methode der successiven Approximationen die Theorie der Differentialgleichungen nach dieser Richtung hin mächtig gefördert und in einem Artikel „Sur l'intégration de certaines équations différentielles par des séries“ (C. R. **124**, 214-217; F. d. M. **28**, 294, 1897) die Ergebnisse seiner Untersuchungen auf die dynamischen Differentialgleichungen angewandt. Durch einige Aufsätze von Volterra über eine Klasse von Differentialgleichungen der Dynamik in Torino Atti angeregt, fasst der französische Gelehrte die Hauptpunkte seiner bezüglichen Betrachtungen in der vorliegenden Note zusammen und zeigt, wie aus denselben zunächst folgt, dass man in dem Probleme der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt die Grössen $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ (in bekannter Bezeichnung) in der Gestalt convergenter Reihen für jeden reellen Wert einer Hülfsgrösse τ erhalten kann, wo $\tau = \alpha t + \beta$ (α und β Constanten); somit ergeben sich alle Integrale in der Gestalt convergenter Reihen für jeden reellen Wert von t. Diese Ueberlegungen werden dann auf die allgemeineren, oft in der Dynamik vorkommenden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ausgedehnt. Zuletzt giebt der Verf. bezüglich eines Artikels über Differentialgleichungen von Niccoletti in Torino Atti einige Hinweise auf frühere einschlägige Arbeiten. Lp.

P. Appell. Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton. S. M. F. Bull. **26**, 265-267.

Der Umstand, dass die Rollbewegungen sich mit Hülfe der Lagrange'schen Gleichungen nicht ansetzen lassen, veranlasst den Verf., zu untersuchen, an welcher Stelle der Herleitung der Lagrange'schen Gleichungen aus dem Hamilton'schen Principe man die den Ausnahmefall bedingenden Verbindungen wegschafft. Lp.

Eug. Ferron. Sur quelques points de doctrine nouveaux de la théorie générale du mouvement d'un système de corps. 40 S. sep. aus Publications de l'Institut grand-ducal de Luxembourg (1896).

Die Ausführungen des Verf. beziehen sich darauf, dass man aus den Differentialgleichungen der Bewegung von Lagrange nicht immer die Lösung mancher Aufgaben direct herleiten kann. Hierüber hat sich P. Appell in einer seiner neuesten Arbeiten mit voller Klarheit so ausgesprochen: „Die Lagrange'schen Gleichungen sind nicht anwendbar, wenn gewisse Verbindungen durch nicht integrable Differentialrelationen ausgedrückt werden, oder wenn man Parameter einführt, die mit den Coordinaten durch nicht integrable Differentialrelationen verknüpft sind." Die Untersuchungen des Verf., der die hieher gehörige neuere Litteratur, mit Carl Neumann 1887 beginnend, nicht zu kennen scheint, sind daher durch die allgemeinen Resultate dieser Forschungen überholt. — In einer Schlussnote „Application du principe des vitesses virtuelles à l'étude d'une question fondamentale de la théorie mathématique de la lumière" soll eine Beweisführung von H. Poincaré (im § 10 des einleitenden Kapitels zur mathematischen Lichttheorie) vereinfacht und der bezügliche Satz verallgemeinert werden. Lp.

Lord Rayleigh. On iso-periodic systems. Phil. Mag. (5) **46**, 567-569.

Im allgemeinen hat ein System mit m Freiheitsgraden, das um eine Gleichgewichts-Configuration schwingt, m verschiedene Perioden oder „Frequenzen" (frequencies) der Vibration; in besonderen Fällen können jedoch zwei oder mehrere dieser Frequenzen gleich sein. Das einfache spärische Pendel ist ein naheliegendes Beispiel einer Bewegung von zwei Freiheitsgraden, deren Frequenzen gleich sind. Der Verf. stellt die Aufgabe, die Eigenschaften derartig schwingender Systeme zu ermitteln, bei denen alle Frequenzen gleich sind. In dieser Allgemeinheit ist die Aufgabe nicht in Angriff genommen; wohl aber sind mehrere, an sich weit gehende Fälle kurz discutirt, indem zugleich auf frühere Schriften des Verf. Bezug genommen wird. Lp.

G. Susloff. Ueber die Gleichungen der unfreien Bewegung. Kiew Univ. Nachr. 1898, 6-11.

Der Autor erhält die Gleichungen der Bewegung des Systems,

indem er die Kräfte der Reactionen bestimmt, welche durch die Verbindungen des Systems hervorgerufen werden. Jk.

P. Woronetz. Zur Theorie des letzten Multiplicators von Jacobi. Kiew. Univ. Nachr. 1898, 1-5. (Russisch.)

Nach dem bekannten Satze von Jacobi wird das n^{te} Integral des Systems der Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \cdots = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx}{X},$$

nachdem $n-1$ Integrale

$$(2) \qquad F_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_n, \quad F_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, F_2 = a_2$$

gefunden sind, mit Hülfe des integrirenden Factors:

$$E = \frac{A}{B}$$

gewonnen, wo B die Functionaldeterminante der Functionen (2) ist, A ein partielles Integral der Gleichung

$$(3) \qquad \frac{d\lg A}{dx} + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial x}\right) = 0.$$

Wenn $x, x_1, \ldots$ unabhängige Coordinaten sind, welche die Bewegung des Systems bestimmen, so wird die Klammer in der Formel (3) Null sein, und man kann $A = 1$ setzen. Der Autor betrachtet den Fall, bei dem die Bewegung des Systems durch die Coordinaten $q_1, \ldots, q_j, \ldots$ bestimmt wird, welche durch k Gleichungen

$$(4) \qquad f_\gamma(t, q, \ldots, q_j, \ldots) = 0$$

verbunden sind. Er setzt in Formel (3) $x = t$ und zeigt, dass in diesem Falle das zweite Glied der Formel (3) ein totaler Differentialquotient nach der Zeit

$$-\frac{d\lg R}{dt}$$

ist, wo R die Determinante: $R = \Sigma \pm a_{1.1} a_{2.2} \ldots a_{3.3}$ bezeichnet, deren Elemente nach der Formel (4) und der lebendigen Kraft T sich so bestimmen:

$$a_{\nu\mu} = \Sigma_{ij} \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial f_\mu}{\partial q_j} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Auf diese Weise kommt der Autor auf Grund der Formel (3) zu dem Schlusse, dass in dem Falle, wenn die Parameter des Systems mit den Gleichungen (4) verbunden sind, der Factor A in dem Ausdrucke des letzten Multiplicators E bestimmt werden kann als $A = R$. Jk.

J. Perchot et W. Ebert. Sur certaines intégrales premières des équations de la dynamique à deux variables; application à un cas particulier du problème des trois corps. C. R. **126**, 725-728.

Zuerst betrachten die Verf. die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x, y),$$

wo X und Y homogene Functionen vom Grade -2 in x, y sind, und stellen gewisse Eigenschaften der Integrale derselben fest. Danach wenden sie ihre Ergebnisse auf den Fall des Dreikörperproblems an, wo die drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 sich auf einer Geraden bewegen. Setzt man die Entfernung $m_1 m_2$ gleich x und $m_1 m_3$ gleich y, so lauten ja die Differentialgleichungen dieses Problems:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m_1+m_2}{x^2} - \frac{m_3}{y^2} + \frac{m_3}{(y-x)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m_2}{x^2} - \frac{m_1+m_3}{y^2} - \frac{m_2}{(y-x)^2}.$$

Aus den vorangegangenen Ueberlegungen folgt der Schluss: „Man sieht an einem besonderen Falle des Dreikörperproblems gewisse Ursachen des Nichtbestehens der in Bezug auf die Geschwindigkeiten oder die Coordinaten eindeutigen Integrale“. Lp.

W. Ebert et J. Perchot. Sur une transformation de l'équation d'Hamilton. C. R. **126**, 1017-1019.

Die von Jacobi zur Integration der Hamilton'schen Differentialgleichung angewandte Methode beruht auf der Einführung solcher Variabeln, welche die beiden Seiten der Gleichung auf mehrere Ausdrücke bringen, die nur je eine einzige Unbekannte enthalten. Stäckel hat bewiesen, dass diese Methode nur dann anwendbar ist, wenn ein ganzes Integral zweiten Grades in Bezug auf die Geschwindigkeit vorhanden ist. Die Verf. der vorliegenden Note zeigen, dass man in manchen Fällen die Hamilton'sche Gleichung durch eine andere von derselben Form ersetzen kann, in welcher an der Stelle der einen der ursprünglichen Variabeln einer der Parameter des Problems vorkommt. Hiervon wird eine Anwendung auf die ebene Bewegung eines von einem festen Centrum angezogenen Punktes gemacht. Lp.

W. Ebert et J. Perchot. Une propriété d'une intégrale première des équations de la dynamique à deux variables et à potentiel homogène. C. R. **127**, 657-659.

Es sei:

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x^p}\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^p}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

und es existire ein erstmaliges Integral $f(x, x', y, y') = 0$, wo die Accente Ableitungen nach t bedeuten. Setzt man $y = kx$, also $y' = kx'$, so ist $\varphi(k)/\psi(k) = 1/k$, und $f(x, x', y, y')$ verwandelt sich in eine Function $g(x, x')$; für dieselbe ergiebt sich

$$(6) \qquad g(x, x') = \chi\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{\varphi(k)}{(1-p)x^{p-1}}\right),$$

wo χ eine willkürliche Function des Argumentes mit Einschluss der Null und einer Constante bedeutet. Ist $U(x, y)$ das Potential vom Grade $-p+1$, so ist, wenn $U(x, y) = V(k)/x^{p-1}$ ist, die Gleichung in k die folgende: $(1+k^2)V'(k)+(p-1)k\,V(k) = 0$. Diese Formeln werden für Polarcoordinaten r, w discutirt. Lp.

J. Hadamard. Sur le tautochronisme. Bordeaux Procès-verbaux 1894/95, 16-17 (1895).

Bekanntlich haben beim Kraftgesetze $\varphi(x) = -k^2 x$ alle Schwingungen dieselbe Dauer, wie gross auch die Amplitude einer Schwingung ist. In der vorliegenden Note wird gezeigt, wie man aus dem Tautochronismus der Schwingungen das Kraftgesetz auf einfache Weise erschliessen kann. Lp.

R. Lehmann-Filhés. Ueber Centralbewegungen. Astr. Nachr. **145**, 353-370.

Die Abhandlung entwickelt zunächst eine Reihe von Eigenschaften der Centralbewegung, indem statt des Radiusvectors r überall der reciproke Wert $u = 1/r$ eingeführt wird. So z. B.: Die Bahn kehrt dem Kraftcentrum die concave oder die convexe Seite zu, je nachdem die Kraft $f(r)$ eine Anziehung oder eine Abstossung ist. Ein Maximum und ein Minimum von u kann nur stattfinden, wenn die Kraft eine Anziehung ist. Die hierzu notwendige Bedingung ist (7) $3+rf'(r)/f(r)>0$; ist $f(r) = ar^n$, so muss daher $n > -3$ sein. Ist $n > -1$, so müssen zwei derartige Extreme von r immer existiren. In allen Fällen eines solchen Minimums u_0 und Maximums u_1 von u besteht die Bahn aus symmetrischen Stücken, und die Bewegung kann als eine periodische bezeichnet werden, indem u oder r als eine periodische Function von t darstellbar ist.

Der folgende Abschnitt handelt von der Stabilität der Kreisbahnen, eine Untersuchung, die mit Hülfe einer genaueren Erörterung der oben angeführten Bedingung (7) durchgeführt wird. Ist $f(r) = ar^n$, so ergiebt sich für $n > -r$ jede Kreisbahn als stabil, für $n \leqq -r$ als instabil.

An die vorige Betrachtung schliesst sich sofort die Erforschung nahezu kreisförmiger periodischer Bewegungen an. Man erhält $f(r) = ar^n$ als einziges Anziehungsgesetz, für welches unter Annahme einer unendlich wenig vom Kreise abweichenden periodischen Bewegung die Aenderung Θ des Polarwinkels, entsprechend einem Fortschreiten vom

Maximum zum Minimum, vom Radius des Kreises unabhängig wird, nämlich $\Theta = \pi/\sqrt{n+3}$, eine schon von Newton aufgestellte Formel. Ebenso wird der Bertrand'sche Satz bewiesen, dass nur unter Annahme der beiden Anziehungsgesetze $f(r) = a/r^2$ und $f(r) = ar$, unabhängig von den Anfangsbedingungen, solange diese an gewisse Grenzen gebunden sind, die Bahnen geschlossen sind.

Der letzte Abschnitt betrifft die Anziehung einer mit der Zeit veränderlichen Masse. Von den Ergebnissen sei hier nur das letzte erwähnt, dass, wenn die anziehende Masse (beim Newton'schen Gravitationsgesetze) der Zeit proportional langsam wächst, die Bahn ein sich langsam verengender, hierbei aber stets sich ähnlich bleibender Kegelschnitt ist.

Die Berührungspunkte der Arbeit mit den bezüglichen Untersuchungen von Korteweg (F. d. M. **16**, 802-804, 1884) sind nicht vom Verf. erwähnt worden; ebenso fehlt auch bei der zuletzt behandelten Frage die Bezugnahme auf die umfassende Arbeit von Meschtschersky: „Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse“ (F. d. M. **28**, 645, 1897), wo im Kap. VII genau die vom Verf. gestellte Aufgabe offenbar in grösserem Umfange behandelt ist. Lp.

U. Bigler. Die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft. Hoppe Arch. (2) **16**, 358-446.

Die Teile der Arbeit sind: Allgemeine Betrachtungen. I. Die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes: 1) (Kraft) $K = nMmr$, 2) $K = -nMmr$, 3) $K = -nMm/r^2$. II. Die kreisförmige Bewegung eines materiellen Punktes: 1) $K = -nMmr$, 2) $K = -nMmr^2$, 3) $K = -nMmr^3$, 4) $K = -nMmr^\mu$ (μ eine ganze Zahl), 5) $K = -nMm/r$, 6) $K = -nMm/r^2$, 7) $K = -nMm/r^3$, 8) $K = -nMm/r^\mu$. III. Allgemeine Fälle der Centralbewegung: 1) $K = -nMmr$, 2) $K = -nMm/r^2$, 3) $K = nMm/r^3$. Hierin bedeutet immer K die zwischen dem festen Massenpunkt M und dem beweglichen m wirkende Kraft, r die Entfernung beider Massenpunkte, n einen Proportionalitätsfactor.

Der Verf. gesteht in den einleitenden Bemerkungen, er wisse nicht, wie viele der behandelten Fälle schon untersucht seien. Dies ist zu bedauern; denn schon aus den Behandlungen in den grösseren Lehrbüchern der Mechanik und in den Aufgabensammlungen ist zu ersehen, dass man zu erheblich allgemeineren Resultaten über die Centralbewegungen gekommen ist. Von den neueren Untersuchungen über die Gestaltungen der Bahncurven und von anderen allgemeinen Ergebnissen findet man ebenfalls nichts in der ungemein umfangreichen Arbeit. Die englischen Lehrbücher der Mechanik mit ihren sehr reichhaltigen Aufgabensammlungen erledigen viel mehr Fragen als die oben kurz angegebenen. Zur Kürzung würde die Unterordnung der Untersuchungen I und II unter III erheblich beigetragen haben. Lp.

P. Stäckel. Ueber Transformationen von Bewegungen. Gött. Nachr. 1898, 157-165.

Die Abhandlung erörtert eine in Boltzmann's Vorlesungen über die Principe der Mechanik auf S. 73 ff. gegebene Transformation der Centralbewegungen. Nach dieser Transformation kann man, sobald die Bahnen für ein Kraftgesetz bekannt sind, die Bahnen für unzählige andere, mit dem ursprünglichen in einfacher Beziehung stehende Kraftgesetze verzeichnen. Es handelt sich für Stäckel darum, die physikalische Bedeutung jener Transformation anzugeben. Dies gelingt durch Betrachtung der Relativbewegung des Punktes auf dem Radiusvector; durch Hinzunahme der Centrifugalbeschleunigung zu der Centralbeschleunigung $f(r)$ kommt man leicht auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f(r) + \frac{k^2}{r^3}.$$

Da Boltzmann a. a. O. zu $f(r)$ die Kraft ma/r^3 hinzugenommen hat, so ist nun die Möglichkeit gegeben, einen Teil der Centrifugalkraft mit der Centralkraft zu vereinigen, und man gewinnt somit die Boltzmann'sche Transformation. In dem zweiten Paragraphen der Arbeit wird gezeigt, dass diese Transformation als ein besonderer Fall gewisser Transformationen bei solchen Bewegungen auf einer Rotationsfläche angesehen werden kann, wo die Kräftefunction in den Parallelkreisen constant bleibt. Der letzte Paragraph endlich ist der Frage gewidmet, welche Stelle die behandelten Transformationen in der allgemeinen Lehre von der Transformation der Bewegungen einnehmen. Es stellt sich heraus, dass ihre Eingliederung nur dann möglich ist, wenn man dem Probleme der Transformation eine allgemeinere Fassung giebt, als das bisher geschehen ist. Lp.

F. Lindemann. Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale. Münch. Ber. **28**, 1898, 37-54.

Bericht auf S. 390 dieses Bandes.

W. Scheibner. Ueber den Einfluss des Neumann'schen Exponentialgesetzes auf die elliptische Bewegung. Leipz. Ber. **50**, 21-30.

Bei der Untersuchung, welcher Wert der Constante α in dem eingliedrigen Neumann'schen Potentialgesetze $\varphi(r) = A \,.\, e^{-\alpha r}/r$ beizulegen sei (vergl. F. d. M. **25**, 1532, 1894 und **26**, 893, 1895), um die Vorwärtsbewegung des Mercurperihels zu erklären, zeigt der Verf. durch Einsetzung von $\varphi(r)$ in die Bewegungsgleichungen, dass man mit Vernachlässigung von α^3 die störende Kraft in der Form $\delta R = \frac{1}{2}\mu\alpha^2$, also constant erhält. Setzt man $\alpha = 1/1000 E$, wo E die astronomische Längeneinheit, d. h. den mittleren Abstand der Erde von der Sonne, bezeichnet, so folgt das Säcularglied der Perihelstörung $\delta\tilde{\omega}$ in der Form $\delta\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\varDelta\alpha^2 t$ oder, in Zahlen ausgerechnet, $\delta\tilde{\omega} = 39'',455t$, welcher Betrag mit der bekannten Leverrier'schen Differenz genau überein-

stimmt; allerdings enthält der Ausdruck nicht, wie bei Leverrier, wo $\delta\tilde{\omega} = 39'',2t - 2,72\delta e$, Glieder, die mit der Zeit proportional sind. Die Constante $1/a = 1000\,E$ stellt die Strecke dar, welche das Licht in 5,7621 Tagen durchläuft. Bei den übrigen Planeten nehmen die Säcularstörungen $\delta\tilde{\omega}$ des Perihels etwa im Verhältnisse der Quadratwurzel des Abstandes von der Sonne zu und betragen für die Venus 55″, für die Erde 65″ u. s. w. im Jahrhundert. Solche Werte dürften daher nicht leicht mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen sein. Da es aber von theoretischem Interesse ist, die vollständigen Bewegungsgleichungen zu kennen, die sich bei Einführung des Neumann'schen eingliedrigen Potentialgesetzes ergeben, so entwickelt der Verf. dieselben dennoch, indem er sich dabei der nämlichen Methode bedient, welche er im vorigen Jahre auf die Untersuchung der aus dem Weber'schen Gesetze folgenden Störungen angewandt hat (vergl. F. d. M. **28**, 846, 1897). Aus den Resultaten schliesst er zuletzt, dass je nach der Beschaffenheit der störenden Kräfte verschiedene Wege zur Berechnung der Störungen eingeschlagen werden müssen, um zu brauchbaren Resultaten zu gelangen.

Lp.

C. A. Laisant. Sur la loi de l'hodographe circulaire dans les mouvements dus à une force centrale. S. M. F. Bull. **26**, 82.

Beweis von wenigen Zeilen, dass beim Newton'schen Anziehungsgesetz der Hodograph ein Kreis ist, und umgekehrt.

Lp.

O. Dziobek. Ueber die Differentialgleichungen der Relativbewegungen. Astr. Nachr. **147**, 161-174.

Es handelt sich um die Differentialgleichungen der Bewegung im Problem der n Körper. „Man stelle sich einen starren und irgend wie bewegten Körper vor, wobei es ganz gleichgültig ist, ob er einer der Massenpunkte selbst ist oder nicht, und nehme an, dass die Bewegungen auf ihn bezogen werden. Wie sehen dann die Differentialgleichungen der Bewegung aus? Welches sind z. B. diese Gleichungen für die Bewegungen von Sonne und Planeten, so wie sie uns, von der Erde aus gesehen, erscheinen?“ Sind x', y', z' die Coordinaten in Bezug auf ein mit dem bewegten Körper fest verbundenes Axensystem, ferner in bekannter Bezeichnung $H = V - T$, endlich u'_i, v'_i, w'_i die Componenten der Bewegungsgrösse in Bezug auf das System (x', y', z'), jedoch nicht etwa der Relativbewegung, so ist das eine System der Differentialgleichungen, in denen p, q, r die Euler'schen Drehungscomponenten bezeichnen:

$$\text{(VIII)}\quad \begin{cases} \dfrac{du'_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x'_i} + v'_i r - w'_i q, \\[2mm] \dfrac{dv'_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y'_i} + w'_i p - u'_i r, \\[2mm] \dfrac{dw'_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial z'_i} + u'_i q - v'_i p, \end{cases}$$

ein System, das sich in der Hamilton'schen Form schreiben lässt. In eine andere Form umgerechnet, ergeben die Gleichungen (VIII):

$$(1') \quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i'}{dt^2} = \dfrac{\partial V}{\partial x_i'} + m_i' \Big[y_i' \dfrac{dr}{dt} - z_i' \dfrac{dq}{dt} + 2\left(r \dfrac{dy_i'}{dt} - q \dfrac{dz_i'}{dt}\right) \\ \qquad + x_i'(p^2+q^2+r^2) - p(x_i'p + y_i'q + z_i'r) + f_1 \Big], \end{cases}$$

wo f_1 eine Abkürzung für einen Ausdruck in q und r ist; ebenso noch zwei Gleichungen für die zweiten Ableitungen von y_i' und z_i'.

Nach Erledigung dieser allgemeinen Frage werden mehrere specielle Fälle als Anwendungen behandelt. Wir erwähnen folgendes Resultat: Problem der zwei Körper. Behält man bei der unter dem Einfluss der allgemeinen Schwere (μ/R^2) erfolgenden elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bewegung den Radiusvector R bei, führt aber statt der Länge v in der Bahn eine andere Länge durch die Gleichung ein: $v' = \beta v + \gamma$, wo β und γ zwei Constanten sind, so erhält man eine Bewegung für eine Centralkraft von der Form $\mu/R^2 + \alpha/R^3$; bei einer beliebigen Centralkraft $\varphi(R)$ lautet die entsprechende Formel $\varphi(R) + \alpha/R^3$. Eine längere Rechnung bezieht sich auf das „reducirte Problem" nach einer von Hesse eingeführten Bezeichnung, d. h. das Problem der Entfernungen. Endlich wird diejenige Relativbewegung betrachtet, welche die geringste lebendige Kraft besitzt. Für dieselbe sind die Flächenintegrale Null. Da nun bei der absoluten Bewegung die Flächenintegrale constant sind und diese drei Constanten die Laplace'sche unveränderliche Ebene definiren, so folgt, dass die absolute Bewegung nur dann zugleich mit der geringsten lebendigen Kraft ausgestattet ist, wenn jene Constanten verschwinden, die unveränderliche Ebene daher illusorisch wird. Lp.

S. Oppenheim. Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Dziobek in A. N. 3514. Astron. Nachr. **148**, No. 3541, 199-202.

Der von Dziobek über Relativbewegungen zweier sich gegenseitig anziehenden Massenpunkte ausgesprochene Satz, dass dann „die Relativbewegung so vor sich geht, als ob die einwirkende Centralkraft nicht μ/R^2, sondern $\mu/R^2 + a/R^3$ wäre", befindet sich schon in Newton's Principia, Buch I, Abschnitt IX, § 84. Ein ähnlicher Satz steht bei Otto Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, S. 532 der Ausgabe von 1876. Referent möchte hinzufügen: Appell, Traité de Mécanique rationnelle, Tome I, p. 356, und ausserdem vergleiche man Stäckel, Gött. Nachr. 1898, 157 ff., Bericht oben S. 613.

Lp.

A. Niemann. Der Ring des Saturn. Eine mathematische Abhandlung. Hoppe Arch. (2) **16**, 241-256.

Der Verf. rechnet im ersten Abschnitte für einen rotirenden Weltkörper den Ort des Punktes aus, in welchem die Centrifugalbeschleunigung

durch die zur Rotationsaxe senkrechte Componente der vom Körper auf den Punkt ausgeübten Attractionsbeschleunigung gerade vernichtet wird, wobei diese Attraction umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte des anziehenden Körpers angenommen ist. Weil dieser Ort eine Kugel ist, so wird geschlossen, diese Kugel sei auch die Grenze der Atmosphäre: „Das Gestirn bildet mit seiner Atmosphäre trotz der Abplattung des festen Teils eine genaue Kugel.“ Wenn nun schon hieraus erhellt, dass die Gesetze der Hydromechanik völlig vernachlässigt und die Ergebnisse der bezüglichen mathematischen Untersuchungen unberücksichtigt gelassen sind, so wird in dem dritten Abschnitte die bei dem Ausspruche des citirten Satzes bei Seite geschobene Componente der Attraction parallel zur Rotationsaxe dazu benutzt, um die Luftmolekeln an der Grenze der Atmosphäre in wunderbaren Sprüngen zum Aequator der Atmosphäre zu befördern, „wie der Stein, der über eine glatte Wasserfläche geschleudert wird“; die von den beiden Polen eintreffenden Ströme müssen jetzt, „da die Centrifugalkraft ihnen den Wiedereintritt in die Atmosphäre verwehrt“, vor die Atmosphäre treten und einen Luftring bilden. Auch die Erde muss einen solchen Ring besitzen; das Zodiakallicht sei sein Verräter. Hiermit kann das Referat wohl abbrechen. Was aus diesen naiven Betrachtungen als dunkle Ahnung annehmbar erscheint, steht klar und deutlich in der Exposition du système du monde von Laplace. Dort ist zu lesen (T. **6**, 294 der Oeuvres): „Die Atmosphäre kann sich am Aequator nur bis zu dem Punkte erstrecken, wo die Centrifugalkraft der Schwere gerade das Gleichgewicht hält. Die Atmosphäre ist nach den Polen hin abgeplattet und um den Aequator aufgebläht; aber diese Abplattung hat Grenzen; in dem Falle, wo sie am grössten ist, verhält sich die Polaraxe zum Aequatordurchmesser wie 2 : 3.... Es ist wahrscheinlich, dass die Saturnringe derartige Zonen sind, die von seiner Atmosphäre zurückgelassen wurden“. Lp.

H. v. Zeipel. Sur la forme générale des éléments elliptiques dans le problème des trois corps. Stockh. Handl. Bihang. **24**$_1$, No. 8, 51 S.

Der Verf. fasst am Schlusse der nicht wiederzugebenden Rechnungen das Ergebnis derselben so zusammen: Um zu resümiren, kann man es aussprechen, dass es gelungen ist, die elliptischen Elemente unter der folgenden Form darzustellen:

$$a_\nu = \Sigma A_\nu(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, C)\,\mu^l \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \cos A,$$
$$e_\nu \cos g_\nu = \Sigma E_\nu(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, C)\,\mu^l \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \cos A,$$
$$e_\nu \sin g_\nu = \Sigma E'_\nu(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, C)\,\mu^l \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \sin A,$$
$$\eta^2 = \Sigma K(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, C)\,\mu^l \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \cos A,$$
$$\lambda_\nu = n_\nu t + c^{(\nu)} + \Sigma G_\nu(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, C)\,\mu^l \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \sin A.$$

Der Ausdruck von θ_1 und θ_2 ist durch Integration einer der

Gleichungen

$$\frac{d\theta_\nu}{dt} = -\frac{1}{\beta_\nu}\frac{\partial F}{\partial \Theta_\nu}$$

in dem Systeme (1) gefunden worden. σ wird in eine nach den positiven Potenzen von μ, ε_1^2 und ε_2^2 geordnete Reihe entwickelt, die den Factor μ enthält, k ist eine willkürliche Constante.

Das Gleiche ist früher auf andere Arten bewiesen worden. Tisserand hat die Delaunay'sche Methode für den Mond durch Ausführung einer Reihe von Transformationen verallgemeinert, deren jede einen Teil der Störungsfunction eliminirt. Poincaré hat bei diesen Beweismethoden immer die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung gebraucht. Lp.

L. W. Austin. Note on Mr. Wood's method of illustrating planetary orbits. Nature **57**, 536-537.

Zu dem Vorlesungsversuche von Wood (F. d. M. **28**, 651, 1897) bemerkt der Verf., dass die harten Stahlkugeln der Zweiräder, welche zu verwenden sind, permanente Magnete werden, und dass nach Versuchen, die er mit solchen Kugeln hat messend verfolgen lassen, die mittlere, in Betracht kommende Componente der $(2,1)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung umgekehrt proportional gefunden sei. Lp.

M. Puglisi. Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di rivoluzione. Palermo Rend. **12**, 312-321.

Beweis eines Satzes aus der Staude'schen Abhandlung „Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche" (Acta Math. **11**; diese Ber. **44** [1], 187, 1888) auf einem etwas vereinfachten Wege. Der betreffende Satz lautet: „Die Bahncurve des betrachteten Punktes berührt abwechselnd und periodisch die Parallelkreise, die die Zone begrenzen, auf der die Bewegung vor sich geht, welche Kreise daher Wendekreise der Bewegung heissen." Dass derselbe Satz in allgemeinerer Beziehung auch in Stäckel's Dissertation vorkommt (vergl. F. d. M. **17**, 881ff., 1885), möge zur Vervollständigung der Litteraturnachweise hier erwähnt werden. Lp.

M. Puglisi. Sulla riduzione di un problema di dinamica ad integrali ellittici. Messina: Tip. dell'Avvenire. 16 S. 8°.

Beweis des folgenden Satzes, welcher von Kobb („Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution", Acta Math. **10**, 89-108; F. d. M. **19**, 1887, 949) ausgesprochen und von Stäckel (Ueber die Reduction eines Problems der Dynamik auf hyperelliptische Integrale, Math. Ann. **41**, 571-580; F. d. M. **25**, 1893-94, 1418) vervollständigt worden ist: Es giebt nur acht Typen von Umdrehungs-

flächen, welche die Eigenschaft besitzen, dass das Problem der Bewegung eines schweren Punktes auf denselben auf elliptische Integrale zurückführbar ist. Vi.

J. Hadamard. Une propriété des mouvements sur une surface. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 47-48 (1896).

Vergl. F. d. M. **27**, 615, 1896.

J. Hadamard. Sur l'instabilité de l'équilibre. Bordeaux Procès-verbaux 1895/96, 48-50 (1896).

Bei den Schlüssen der Note, deren Titel vorstehend wiedergegeben ist, war angenommen worden, dass die Kräftefunction U ein Minimum hat; dies braucht nicht stattzufinden, sondern U kann von einem gewissen Augenblicke an immer in demselben Sinne sich ändern. Die gegenwärtige Note zeigt, wie diesem Einwande zu begegnen ist. Lp.

A. de Saint-Germain. Note sur le pendule sphérique. Darboux Bull. (2) **22**, 95-96.

Ergänzung zu der Note in derselben Zeitschrift (2) **20**, 114-116 (F. d. M. **27**, 618, 1896). Während dort mit Hülfe eines Satzes von Cauchy die obere Grenze der Azimutänderung Ψ von einem Maximum bis zu einem Minimum der Höhe leicht gefolgert werden konnte, wird jetzt auf ähnlichem Wege die untere Grenze bestimmt. Lp.

A. de Saint-Germain. Sur le mouvement d'une barre qui s'appuie sur deux droites dépolies. Nouv. Ann. (3) **17**, 307-312.

„Die vollständige Discussion der Bewegung eines schweren Stabes AB, dessen Enden genötigt werden, auf je einer von zwei festen Geraden OX, OY zu gleiten, ist äusserst verwickelt; allein wenn man den Stab homogen, schwerefrei und die Reibungscoefficienten f auf OX und OY gleich gross annimmt, so wird die Discussion leicht, und die Einfachheit ihrer Ergebnisse verleiht ihr einiges Interesse." Diese einleitenden Worte bezeichnen die Tendenz des Aufsatzes. Lp.

G. Floquet. Sur le mouvement d'un point ou d'un fil glissant sur un plan horizontal fixe lorsqu'on tient compte de la rotation de la terre et du frottement. Nancy Bull. (2) **15**, 146-161.

Die behandelte Aufgabe lautet: Man betrachte einen festen Punkt O an der Oberfläche der Erde und die Horizontalebene π, die durch O geht, also ebenfalls fest ist. In der Ebene π, und zwar in der Umgebung von O, die Bewegung eines Massenpunktes zu untersuchen; ferner die eines homogenen, biegsamen und unausdehnbaren Fadens, welcher jedoch eine nach Gestalt und Lage permanente Figur behalten

soll. Als einwirkende Kräfte werden die Schwere, die Reibung und die zusammengesetzte Centrifugalkraft (die Coriolis'sche Kraft) der Erdrotation berücksichtigt. Hinsichtlich der Bewegung des Fadens wird nur die Figur der scheinbaren Ruhe erhalten, indem die genauere Forschung der Bewegung einer späteren Veröffentlichung vorbehalten wird. Auf frühere Behandlungen des Gegenstandes ist nicht Bezug genommen; überhaupt ist gar keine Litteratur citirt, weder die sehr reichhaltige über die reibungslose Bewegung, noch die spärlichere über die Bewegung unter Berücksichtigung der Reibung, deren Differentialgleichungen H. Bruns aufgestellt hat in der Abhandlung: „Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche," Math. Ann. **22,** 296-298 (vergl. F. d. M. **15,** 817, 1883). Die Bewegung des Massenpunktes wird zuerst behandelt, wenn O auf dem Aequator liegt, dann für den Pol, endlich für eine beliebige Lage. Die Resultate lassen sich nicht kurz mitteilen.

Lp.

F. R. Helmert. Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Potsdam. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 92 S. 4°. Mit einer Tafel.

Die Schrift zerfällt in drei selbständige Abschnitte. Von denselben behandelt der erste den Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schweremessungen; hierüber hat der Verf. schon in Astron. Nachr. **143,** 345-354 (F. d. M. **28,** 656, 1897) einen Artikel veröffentlicht, der die Hauptergebnisse enthält. Die Notwendigkeit der Berücksichtigung der elastischen Biegsamkeit der Pendelkörper ist 1884 von Peirce ausgesprochen, 1895 von Kühnen auf Grund von Versuchen abermals erkannt worden. Eine strenge Theorie des Einflusses der Biegsamkeit ist nun zwar nicht durchführbar; wohl aber zeigt der Verf., wie unter Annahme einer neutralen Faserschicht, zu welcher der Querschnitt des Pendelkörpers bei der Biegung überall normal bleibe, ohne seine Form zu ändern, befriedigende Formeln entwickelt werden können. Bei der Berechnung der Formänderungen, welche die verlorenen Kräfte nach dem d'Alembert'schen Principe hervorrufen, wird ferner diejenige Gestalt des Pendels zu Grunde gelegt, die den am starren Pendel sich zeigenden verlorenen Kräften entspricht. In der Anwendung der erhaltenen Formeln auf verschiedene Reversionspendel, insbesondere auf das neue, stark biegsame Meterpendel des Geodätischen Instituts, erweist sich die vom Verf. entwickelte Theorie als völlig ausreichend, um die beobachteten Unregelmässigkeiten zu erklären. So wurde z. B. aus dem neuen biegsamen Meterpendel die Länge des Secundenpendels zu 994,626 mm ohne Berücksichtigung der elastischen Durchbiegung abgeleitet; dieser Wert ist nach dem Vorhergehenden um den Betrag —0,366 mm zu verbessern, wodurch 994,260 mm gefunden wird. Nach anderen Beobachtungen ergeben sich die Zahlen 994,253 (Halbsecundenpendel), 994,262 (Methode von Defforges), 994,254 (v. Sterneck),

994,251 (Kühnen), 994,264 (Paris-Wien-Potsdam). Demnach entspricht also die Correction wegen der Elasticität der Pendel den Erfahrungen.

Der zweite Abschnitt handelt von Vorversuchen für die Bestimmung der Länge des mathematischen Secundenpendels. Weil jedoch der benutzte Massstab sich nicht bewährt hat, wohl infolge von Klemmungen, die das nicht beseitigte Metallthermometer herbeiführte, so ist in das Endergebnis der Versuche eine Unsicherheit gekommen, die nur dadurch an Bedeutung zurücktritt, dass die durch die elastische Biegung des langen Pendels hervorgebrachte Unsicherheit von gleicher Ordnung ist. Sonst jedoch geben die Erörterungen der bei den Beobachtungen innegehaltenen Regeln, sowie die Methoden der Berechnung aus den Beobachtungsprotokollen wertvolle Beiträge zu den Präcisionsmessungen.

Der dritte Abschnitt der Arbeit ist betitelt: „Verschiedene Beiträge zur Theorie“ und bringt unter diesem bescheidenen Titel eine reichhaltige und zuverlässige Discussion aller bei Versuchen mit dem Reversionspendel zu beachtenden Umstände, zum Teil mit Benutzung früherer Arbeiten, immer aber unter selbständiger Durcharbeitung der einzelnen Fragen. Der Verf. selbst sagt hierüber: „Im Folgenden kam es mir darauf an, die Formeln für den Gebrauch zusammenzustellen und die Theorie in einigen Punkten zu erörtern, u. a. hinsichtlich der Lage der Schneiden gegen die drei Hauptträgheitsaxen des Pendels und gegen die Verticale, in welcher Beziehung (wie mir scheint) wenigstens in deutscher Sprache eine Lücke in den bekannten Veröffentlichungen besteht. Ausserdem habe ich das Wippen behandelt und die Ansichten über das Gleiten der Schneide auf der Unterlage beleuchtet und in möglichst vollständiger Weise bei der Aufstellung der Endformeln berücksichtigt. Endlich habe ich mehrere kleine Correctionen abgeleitet, und ich glaube in Bezug auf die Längenmessungen an Achatschneiden eine Aufklärung erzielt zu haben.“ Wegen der Unmöglichkeit einer Berichterstattung über die einzelnen Untersuchungen möge der Abdruck der Titel der Paragraphen genügen: § 2. Der Einfluss der umgebenden Luft. § 3. Parallelismus der Schneiden. § 4. Symmetrie der äusseren Form. § 5. Abrollen der Schneide auf dem Lager. § 6. Verschiebungen der Schneide und des Lagers: Vorbemerkungen. § 7. Mitschwingen des Stativs und des Untergrundes. § 8. Das Wippen mit der Federwage. § 9. Das Gleiten der Schneide auf dem Lager. § 10. Einfluss des Schwingungsbogens auf die Schwingungsdauer. § 11. Das Glissement. § 12. Verschiedenartige kleine Bewegungen der Schneide. § 13. Zusammenstellung der Grundformeln. § 14. Reduction der Schwingungsdauer auf gleiche Luftdichte. § 15. Verkürzung des Massstabes durch sein Gewicht. § 16. Einfluss der Dehnung des Pendels. § 17. Einfluss eines Höhengradienten der Temperatur. Lp.

P. Pizzetti. Della influenza delle deformazioni elastiche sulla durata di oscillazione di un pendolo, secondo Helmert. Nuovo Cim. (4) 8, 215-220.

Bericht über den ersten Teil der Helmert'schen „Beiträge zur Theorie des Reversionspendels“, der sich auf den Einfluss der elastischen Durchbiegung der Pendelstange bezieht. Vergl. F. d. M. **28**, 655, 1897 und das vorangehende Referat. Lp.

G. Lorenzoni. L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 61-68.

Bericht in F. d. M. **28**, 656, 1897. Lp.

G. Lippmann. Sur l'entretien du mouvement pendulaire sans perturbation. Entretien du pendule géodésique. C. R. **127**, 15-18.

A. Guillet. Sur un mode d'entretien du pendule. C. R. **127**, 94-97.

Wie Lippmann in einer Note C. R. **122**, 104-108 (F. d. M. **27**, 616, 1896) ausgeführt hat, wird die Schwingungsdauer eines Pendels durch einen während der Bewegung erteilten Impuls geändert. Wenn jedoch das Pendel an einer und derselben Stelle seiner Bahn zwei gleiche, aber entgegengesetzte Impulse erhält, den einen beim Aufstieg, den anderen beim Abstieg, so sind die erzeugten Störungen gleich und von entgegengesetzter Richtung, vernichten sich also. Bringt man die Impulse in dem Augenblicke an, wo das Pendel durch die Verticale geht, so sind sogar die Störungen einzeln Null oder unendlich klein. Ist der Moment, wo der Impuls erfolgt, nicht genau derjenige, wo das Pendel durch die Ruhelage geht, so lässt sich die Störung mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung leicht berechnen, wie Lippmann des näheren zeigt. Er schlägt die Verwirklichung dieses Gedankens beim geodätischen Pendel durch Anbringung eines Elektromagneten vor, dessen Strom durch einen sich selbst regulirenden Balancier, regelmässig unterbrochen wird. Die hierfür angegebene Berechnung giebt so günstige Resultate, dass Lippmann das Princip zur Bestimmung der Masse der Erde für geeignet hält.

Guillet beschreibt und erläutert an einer Abbildung ein von ihm ersonnenes und auf demselben Princip beruhendes Instrument, bei welchem die Impulse des Magneten durch Inductionsströme erzeugt werden. Das Pendel öffnet und schliesst selbst den inducirenden Strom, wenn es in der einen oder anderen Richtung durch die Verticale geht; hierzu genügt der schwache Strom eines einzigen Callaud'schen Elementes. Die durch messende Versuche gewonnenen Zahlen zeigen die Gleichheit der Perioden und die Stabilität beim Functioniren des Pendels ohne oder mit Anwendung einer Kraftergänzung. Die genauere, nur mit Hülfe einer Abbildung zu beschreibende Einrichtung ist im Original nachzulesen. Lp.

L. Lecornu. Sur l'isochronisme pratique des régulateurs. C. R. **127**, 1007-1009.

Der Verf. erörtert die Bedingungen, unter denen man einen für

praktische Zwecke genügenden Isochronismus bei Maschinen erzielen kann, und stellt zu diesem Behufe die folgenden beiden Sätze auf: Damit der Unterschied zwischen den vom Regulator gestatteten äussersten Geschwindigkeiten so klein wie möglich sei, muss, wenn die Muffe bis an das Ende ihres Ganges gebracht ist, ohne Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit der auf sie von den direct wirkenden Kräften (Schwere, Federspannung u. s. w.) ausgeübte Druck, zusammengesetzt mit der Centrifugalkraft, dem Widerstand der Klappe das Gleichgewicht halten. — Wenn der praktische Isochronismus so vollkommen wie möglich gemacht ist, so ist das Quadrat des halben Ganges der Muffe gleich der zur halben Verstellung der Klappe nötigen Arbeit, dividirt durch den Stabilitätscoefficienten. Lp.

Sir Robert S. Ball. The twelfth and concluding memoir on the theory of screws. With a summary. Dublin Trans. **31** [5], 145-196.

Mit dieser Abhandlung erklärt der berühmte Verf. die Reihe der Abhandlungen für abgeschlossen, deren erste 1872 erschienen ist, und von denen Schell in seiner Theorie der Bewegung und der Kräfte schon 1880 sagte, dass sie von tiefgreifender Einwirkung auf die Gestaltung der gesamten Mechanik geworden seien. Was zur Vollendung des Werkes noch fehlte, das war eine geometrische Methode zur Bestimmung der instantanen Schrauben aus den impulsiven Schrauben. „Als dieses im Hochsommer 1897 gelang, lag die geometrische Theorie in der Dynamik, um die ich ein Vierteljahrhundert lang mich abgemüht habe, klar zu Tage. Es bestehen zweifelsohne noch viele andere Fragen, die fast auf jeder Stufe des Gegenstandes zur lohnenden Forschung einladen. Aber da das Problem, welches ich mir vor so vielen Jahren gestellt habe, und welches ich seitdem stets unverwandt im Auge behalten habe, endlich gelöst ist, so fühle ich, dass ich diese Folge von Abhandlungen schliessen muss." Zu diesen Schlussworten der Inhaltsangabe aller zwölf Abhandlungen fügen wir nur hinzu, dass das folgende Theorem den Schlüssel zur Lösung der bezeichneten letzten Aufgabe enthält: Wenn zwei Cylindroide gegeben sind, so besteht im allgemeinen eine, und nur eine, mögliche Correlation der Schrauben auf den beiden Oberflächen, so dass ein starrer Körper construirt werden könnte, für den die Schrauben auf dem einen Cylindroid impulsive Schrauben sein würden und ihre correspondirenden auf dem anderen Cylindroid die Momentanschrauben. Ferner: wenn drei Paare correspondirender, impulsiver Schrauben bekannt sind, so sind alle anderen derartigen Paare im allgemeinen bestimmt. Die vollständige Entwickelung dieses fundamentalen Kapitels der Mechanik mit Hülfe jener schon in der elften Abhandlung bewiesenen Sätze wird in der zwölften gegeben, und damit gelangt man zur Lösung des „fundamentalen Problems", um das es sich in der Dynamik handelt (Abschn. VI, S. 163): Ein vollkommen freier ruhender Körper wird durch einen impulsiven Winder auf einer gegebenen

Schraube getroffen. Man verlangt die Bestimmung der Momentanschraube, um welche der Körper sich zu winden beginnen wird. Lp.

P. Woronetz. Geometrische Untersuchungen des Euler'schen Falles der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Kiew. 112 S. (Russisch.)

Diese Arbeit bietet einen vollen Cursus der geometrischen Untersuchungen über den Euler'schen Fall der Bewegung eines starren Körpers.

Verf. hat das Material gesammelt, welches in verschiedenen Aufsätzen und Lehrbüchern zerstreut war. Die Arbeit zerfällt in acht Kapitel. Kap. I enthält die Grundsätze der Bewegung eines starren Körpers und die Interpretationen von Poinsot und Mac-Cullagh. Kap. II enthält die Theorie der sphärokonischen Curven. Kap. III beschreibt die Bewegung der unveränderlichen Geraden, der excentrischen Geraden und der Rotationsaxe.

Kap. IV giebt Untersuchungen über die Bewegung der Rotationsaxe und der Hauptträgheitsaxen des Körpers im Raume und auch die zweite Poinsot'sche Interpretation der Bewegung des starren Körpers. Kap. V bietet specielle Fälle der Bewegung eines starren Körpers. Kap. VI handelt von den Polhodien, Kap. VII von den Herpolhodien und Kap. VIII von den Polhodien als Schnittcurven zweier concentrischen Flächen zweiter Ordnung. Alle neueren Untersuchungen von Darboux, Routh, Sylvester, Greenhill, de la Gournerie u. a. zieht Verf. in seinen systematisch geordneten Cursus hinein. Jk.

F. Klein und A. Sommerfeld. Ueber die Theorie des Kreisels. Heft II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Leipzig: B. G. Teubner. S. 197-512.

In Bezug auf das erste Heft vergleiche man F. d. M. **28**, 658-661, 1897. Während jenes erste Heft die erforderlichen Vorbegriffe aus der allgemeinen Mechanik zu bringen hatte, ist das zweite Heft im wesentlichen auf das im Titel angedeutete specielle Problem beschränkt: die Bewegung eines symmetrisch um eine Axe gestalteten, in einem Punkte der Axe unterstützten, der Schwere unterworfenen starren Körpers sowohl nach der geometrischen, wie auch nach der analytischen Seite hin möglichst erschöpfend zu behandeln.

Der geometrische Charakter der Bewegung wird am besten durch die Bahncurve charakterisirt, welche ein Punkt der Figurenaxe bei der Bewegung beschreibt. Diese Bahncurve wird zuerst rein anschaulich und aus der Pendelbewegung mit Zuhülfenahme weniger früher entwickelten allgemeinen Principien abgeleitet. Man gewinnt dabei einen guten Einblick in den qualitativen Verlauf der Bahncurve und in den continuirlichen Zusammenhang, welcher zwischen den Bahncurven bei verschiedenen Anfangsbedingungen besteht.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verständnis zweier speciellen Bewegungsformen, welche als pseudoreguläre Präcession und als aufrechte Kreiselbewegung bezeichnet werden. Die Erscheinungen, um die es sich hierbei handelt, sind allgemein bekannt. Wenn man den Kreisel mit hinreichend starker Eigenrotation begabt, also ihn beispielsweise durch eine Schnur in gewöhnlicher Weise abzieht und ihn dann der Wirkung der Schwere überlässt, wobei die Figurenaxe eine beliebige Neigung gegen die Verticale besitzen möge, so weicht diese Axe unter dem Einflusse der Schwere — scheinbar — seitlich aus und bewegt sich auf einem Kreiskegel um die Verticale. Stellt man ferner die Figurenaxe gerade in die Verticale ein, so verharrt dieselbe so lange in dieser Lage, bis durch secundäre Einflüsse (Reibung etc.) die Rotationsgeschwindigkeit zu gering geworden ist. Die erstgenannte Erscheinung müsste im höchsten Grade paradox erscheinen, wenn sie richtig wäre, wenn nämlich die Figurenaxe einen genauen Kreiskegel um die Verticale beschreiben würde. In diesem Falle würde die Bewegung als reguläre Präcession zu bezeichnen sein. Thatsächlich lehrt aber schon eine etwas verschärfte Beobachtung und in noch deutlicherem Masse die absolut scharfe Theorie, dass es sich um keinen genauen Kreiskegel handelt, dass dieser vielmehr mit ungemein vielen, periodisch wiederkehrenden Abweichungen von der reinen Kegelgestalt behaftet ist. Die reguläre Präcession ist nämlich von einer „Nutation", einem periodischen Zittern der Axe, begleitet, welche bei sonst gleichen Umständen in um so kürzerer Periode und mit um so kleinerer Amplitude erfolgt, je grösser die dem Kreisel ursprünglich erteilte Rotationsgeschwindigkeit war. In einem bestimmten numerischen Falle ergiebt sich z. B., dass die Periode der Nutation kleiner als 0,04 Secunden und ihre Amplitude kleiner als 10′ wird. Es ist klar, dass sich diese kleinen Grössen der Beobachtung so gut wie vollständig entziehen, und dass das Auge nur ein unbestimmtes Mittel wahrnimmt, welches eben in einer scheinbar regulären Präcession besteht. Andererseits sind aber für die mechanische Erklärung gerade diese geringfügigen Nutationen der ausschlaggebende Bestandteil der Bewegung. Wollte man sie bei der Erklärung ausschalten, so würde der Vorgang nicht nur paradox, sondern (ausser beim Vorhandensein ganz specieller Anfangsbedingungen) mechanisch unmöglich sein. Leider geschieht dieses in manchen weit verbreiteten populären Erklärungen. Ihrer Kritik ist ein eigener bemerkenswerter Paragraph gewidmet.

Die andere oben genannte Bewegungsform, die Drehung des Kreisels um die aufrecht gestellte Figurenaxe, lehrt, dass eine Gleichgewichtslage, welche instabil wäre, wenn dem Kreisel keine Rotation erteilt ist, durch eine hinreichend starke Rotation stabil wird. In der That fällt der nicht aufgezogene Kreisel natürlich um, wenn er aufrecht gestellt wird, während der in Rotation begriffene dem Einfluss der Schwere widerstehen kann. Interessant sind daher diejenigen Bewegungen, welche der in aufrechter Lage instabile, d. h. mit nicht hinlänglich grosser Umdrehungsgeschwindigkeit versehene Kreisel ausführt, wenn er durch einen Anstoss in seiner

instabilen Gleichgewichtslage gestört wird. Es sind dieses, wie klein auch der Anstoss gewählt sein möge, Bewegungen von endlicher Elongation. Insbesondere ergiebt sich bei dem Anstosse Null eine bisher nicht bemerkte sogenannte asymptotische Bewegung, bei welcher die Figurenaxe die aufrechte Lage mit der Geschwindigkeit Null verlässt und erst nach unendlich langer Zeit (d. h. im Grunde niemals) in dieselbe zurückkehrt, wobei sie spiralig in immer kleiner werdenden Windungen ihre Grenzlage umkreist.

Die hiermit angeregten Stabilitätsfragen geben zu einem ausführlichen Excurse über die Stabilität mechanischer Systeme überhaupt Veranlassung. Während die klassische Mechanik nur die Stabilität des Gleichgewichtes untersuchte, ist namentlich durch englische Autoren (vergl. Thomson und Tait, „Einleitung in die theoretische Physik", und Routh, „Rigid Dynamics", deutsch 1898 bei Teubner in Leipzig) die Frage nach der Stabilität der Bewegungen aufgeworfen. Das Interesse, welches speciell Lord Kelvin an diesen Fragen genommen hat, liegt in letzter Linie darin, dass man bestrebt ist, alle möglichen physikalischen Phänomene, vielleicht sogar die Materie selbst als eine verborgene Bewegung des einheitlichen Trägers aller Erscheinungen, des Lichtäthers, aufzufassen. Bei diesem kühnen Zukunftsplane muss natürlich die Stabilität der Bewegungen, d. h. ihre Widerstandsfähigkeit gegenüber äusseren Störungen, wesentlich in Betracht kommen. Diese allgemeinen Stabilitätsfragen, bei denen übrigens der Grundbegriff der Stabilität selbst anders und strenger gefasst wird als bei den englischen Autoren, werden ausführlich erörtert, und dabei wird die gewöhnliche Untersuchungsmethode, die sogenannte Methode der kleinen Schwingungen, einer sorgfältigen Kritik unterzogen. Diese Methode operirt bekanntlich mit der Vernachlässigung aller höheren Potenzen der bei der Bewegung als klein vorausgesetzten Grössen und ist mit der Forderung moderner mathematischer Strenge nicht ohne weiteres verträglich. Insbesondere zeigt sich, dass sie bei der instabilen aufrechten Kreiselbewegung eine falsche Vorstellung des Vorganges erwecken kann.

Die analytische Darstellung des Bewegungsvorganges, welche neben dem geometrischen Verständnis der Bewegung und gerade als wirksamstes Hülfsmittel für dieses in dem vorliegenden Buche ihren Platz findet, kann an dieser Stelle nur ganz kurz angedeutet werden. Die elementaren Functionen der Analysis genügen, wie seit lange bekannt ist, zur genauen Darstellung des Bewegungsvorganges nicht; vielmehr treten hier die elliptischen Functionen in ihr Recht. Es ist aber bemerkenswert, dass auch die elementaren trigonometrischen Functionen eine analytische Behandlung gestatten, falls man auf eine absolute Genauigkeit verzichtet und sich mit einer in jedem Falle angebbaren Annäherung begnügt. Gerade in den interessanten Fällen (z. B. bei der pseudoregulären Präcession) wird der Genauigkeitsgrad dieser Annäherung übrigens so gut, dass sie ohne weiteres die exacten Formeln ersetzen kann.

Bei der Darstellung durch elliptische Functionen treten die eigen-

artigen Vorzüge gewisser schon im ersten Hefte eingeführten Drehungsparameter, welche complexe Verbindungen der sogenannten Quaternionengrössen vorstellen, in ein helles Licht. Der analytische Ausdruck dieser Grössen, aus denen sich alle übrigen Elemente der Bewegung bequem zusammensetzen lassen, wird so einfach, wie es im Gebiete der elliptischen Functionen nur überhaupt denkbar ist. Im Gegensatz zu den früher fast ausschliesslich benutzten sogenannten Euler'schen Winkeln müssen also die hier eingeführten Drehungsparameter als die geeignetsten Mittel zum Studium der Rotationsprobleme angesehen werden. Wie die Verf. in einem Nachwort bemerken, sind übrigens die Vorzüge dieser Drehungsparameter schon früher von Weierstrass erkannt worden, der in einer nicht publicirten und den Autoren erst während des Druckes bekannt gewordenen Vorlesung über elliptische Functionen eben diese Grössen zur Darstellung der Kreiselbewegung verwendet hat, ohne aber alle daraus fliessenden Consequenzen zu erschöpfen.

Für den mit den höheren Partien der Analysis nicht vertrauten Leser sei bemerkt, dass die Theorie der elliptischen Functionen nicht vorausgesetzt, sondern an dem Beispiele des Kreisels selbst entwickelt wird. Die Möglichkeit hierzu bietet der Umstand, dass die Interessen der rein mathematischen Forschung und die Bedürfnisse der Anwendung vielfach und ganz besonders bei dem vorliegenden Probleme Hand in Hand gehen, dass sich Theorie und Anwendung gegenseitig durchdringen und die eine durch die andere erläutert und gefördert werden kann. Die Verf. sprechen daher von einer „prästabilirten Harmonie zwischen reiner und angewandter Mathematik".

Fraglos ist bei einem mechanischen Problem die analytische Arbeit mit der Aufstellung der allgemeinen Formeln nicht beendet; vielmehr muss man fordern, bis zur wirklichen numerischen Berechnung der Bewegung vordringen zu können. Dieser Forderung tragen die Verf. Rechnung; der Weg, den sie empfehlen, ist folgender: die elliptischen Integrale aus den alten, von Legendre hergestellten Tafeln zu entnehmen, zum Schluss aber die durch ihre rapide Convergenz berühmten Thetareihen zu benutzen, von denen hier noch ausdrücklich bewiesen wird, dass es für eine Genauigkeit von $^1/_{10}$ Procent allemal genügt, zwei Glieder der Reihe zu nehmen, so dass also in diesem Sinne jede Formel mit elliptischen Functionen als ein Aggregat von wenigen trigonometrischen Termen aufgefasst werden kann.

Ueber den besonderen Gegenstand des vorliegenden Heftes, die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels, geht die Darstellung nur bei der Besprechung der Stabilitätsfragen, bei der Behandlung der sogenannten Poinsot-Bewegung und bei einem Referat über diejenigen Resultate hinaus, welche Frau Kowalevski, W. Hess u. a. über die Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels gewonnen haben. (Mit Benutzung brieflicher Mitteilungen von A. Sommerfeld.)

Lp.

F. Lindemann. Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt. Münch. Ber. **28**, 1898, 181-202.

Der Verf. macht in der Einleitung selbst folgende Inhaltsangabe: „Die Lösung des Problems der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt geschieht bekanntlich mittels elliptischer Functionen; die Einführung derselben erfordert zwei Schritte: zuerst die Integration der Euler'schen Differentialgleichungen, die keinerlei Schwierigkeiten bietet, dann die Berechnung der neun Cosinus der Neigungen der im Körper festen Coordinatenaxen gegen die im Raume fest gedachten Axen. Letztere Berechnung erscheint trotz der von Hermite und anderen angebrachten Vereinfachungen noch immer sehr umständlich. Indem ich umgekehrt den Körper fest, den ganzen Raum aber bewegt denke, führe ich im folgenden das Problem auf eine von W. Voigt behandelte Aufgabe der Hydrodynamik zurück, für welche die Lösung von Venske in sehr eleganter Form auf Quadraturen reducirt ist. Unter den Integralzeichen erscheinen dabei elliptische Functionen, und man braucht daher die verlangten Integrationen nur nach bekannten Regeln auszuführen, um die fertigen Formeln zu erhalten. Ich habe die Rechnungen so weit durchgeführt, dass die Resultate in der von Hermite gegebenen Gestalt erscheinen, mich deshalb auch ausschliesslich der Jacobi'schen Bezeichnungsweise für die elliptischen Functionen bedient. Zum Schlusse zeige ich, dass durch eine analoge Ueberlegung auch ein gewisses anderes Rotationsproblem, das ebenfalls von W. Voigt besprochen ist, auf eine durch Clebsch, H. Weber und F. Kötter erledigte Aufgabe der Hydrodynamik zurückgeführt werden kann.“ § 1. Die Euler'schen Differentialgleichungen. § 2. Relative Bewegung des Raumes gegen das feste Centralellipsoid. § 3. Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen des Problems. § 4. Ausführung der Quadraturen. § 5. Lage eines festen Axenkreuzes gegen ein bewegliches. § 6. Die Herpolhodie. § 7. Drehung des starren Körpers unter Wirkung gewisser äusserer Kräfte. Lp.

E. Jahnke. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe. C. R. **126**, 1126-1129.

Mit Bezug auf die Arbeit von Caspary in Darboux's Bull. (2) **13**, 89-111 (vergl. F. d. M. **21**, 934, 1889), wo die Lösung der Aufgabe auf Identitäten zwischen Thetafunctionen zurückgeführt ist, bemerkt der Verf., dass die Caspary'schen Ausdrücke der neun Richtungscosinus und der Componenten der Rotation mit Hülfe der Thetafunctionen die Aufstellung der Differentialgleichungen nicht erfordern, deren Integrale sie bilden. Die neue, von F. Caspary stammende Methode führe jedoch mit Leichtigkeit auch zu diesen Differentialgleichungen. Dieses wird in der Note gezeigt, indem der Verf. sich auf einen Satz stützt, welcher die Differentialgleichungen des zusammengesetzten Systems mit denen der beiden componirenden orthogonalen Systeme verknüpft. „Die Probleme, welche zu den Differentialgleichungen führen, die ich eben aufgestellt

habe, erhalten ihre vollständigen Lösungen durch die besagten Caspary'schen Ausdrücke. Ganz besonders findet man so die Resultate wieder, welche bei dem Problem der Rotation eines schweren Umdrehungskörpers, der in einem Punkte seiner Axe aufgehängt ist, von Jacobi, Lottner, Hermite, Hess, Halphen und Darboux herrühren."

Lp.

E. Jahnke. Ueber ein allgemeines, aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. J. für Math. **119**, 234-252.

E. Jahnke. Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions thêta de deux arguments et leur application à la dynamique. C. R. **126**, 1013-1016.

Bericht auf S. 393 dieses Bandes.

P. Appell. Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot. S. M. F. Bull. **26**, 98-112.

Bericht auf S. 390 dieses Bandes.

S. Tschaplygin. Lineare partielle Integrale des Problems über die Bewegung eines starren Körpers, welcher in einem Punkte unterstützt ist. Moskau Phys. Sect. **9**, Lieferung 2, 15-21. (Russisch.)

Indem der Autor mit x, x', x'' die Projectionen des Moments des impulsiven Paares auf die mit dem Körper verbundenen rechtwinkligen Axen bezeichnet, untersucht er, in welchen Fällen die Differentialgleichungen der Bewegung

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx' - qx'' + l'\gamma'' - l''\gamma', \\ \dfrac{dx'}{dt} = px'' - rx + l''\gamma - l\gamma'', \\ \dfrac{dx''}{dt} = qx - px' + l\gamma' - l'\gamma, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma' \end{cases}$$

ein partielles Integral von der Form

$$(3)\quad Ax + Bx' + Cx'' = \text{const.}$$

zulassen.

Der Autor bemerkt, dass bei richtiger Auswahl der Coordinatenaxen das Integral (3) auf die Form

$$(4) \quad x'' = n$$

und die lebendige Kraft T auf die Form

$$T = \tfrac{1}{2}(ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bxx'' + 2b'x'x'')$$

gebracht werden können, und betrachtet eingehend die Folgerungen, welche aus der gleichzeitigen Existenz der Gleichungen (1), (2), (4) sich ergeben.

Er findet, dass das Gesagte nur in folgenden Fällen geschehen kann:

1) $a = a'$, $l = l' = 0$ (der Fall von Hess),
2) $l = 0$, $2a' - a = 0$ oder $l' = 0$, $2a - a' = 0$ (der Fall von Stekloff),
3) $l = l' = l''$ (der Fall von Poinsot),
4) $x' = 0$, $\gamma = 0$ (das physische Pendel),
5) $b = b' = 0$, $l = l' = 0$, $a = a'$ (der Fall von Lagrange).

Hiernach giebt es keine anderen Fälle, in welchen ein partielles Integral der Form (3) existirt, als die jetzt bekannten. Jk.

E. Mathy. Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Cas où il n'y a pas de forces motrices ou qu'elles se font équilibre autour du point fixe. Gand: Hoste. 18 S. 8°.

1. Integration mit Hülfe der Functionen *sn*, *cn*, *dn*, welche sich in einem bestimmten Falle auf Hyperbelfunctionen reduciren. 2. Polhodie und Winkelgeschwindigkeit. 3. Uebergang zu den Weierstrass'schen Bezeichnungen. 4. Bestimmung der Euler'schen Winkel in dem allgemeinen Falle und in dem besonderen. 5. Herpolhodie; in dem besonderen Falle ist es eine Spirale, die den Pol zum asymptotischen Punkte hat. Ma. (Lp.)

G. Urzì. Un caso particolare del problema della rotazione di un corpo solido di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria. Batt. G. **36**, 185-207.

In der Note „Sur le mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe" (C. R. **101**; F. d. M. **17**, 890, 1885) hat Darboux den Satz ausgesprochen, die Methode von Lagrange sei anwendbar und führe auf die drei Integrale des Problems, falls der Umdrehungskörper solchen äusseren Kräften unterworfen ist, deren Potential einzig vom Winkel θ abhängt, den die Umdrehungsaxe des Körpers mit einer durch den festen Punkt gehenden festen Geraden bildet, ein Satz, der übrigens gleichzeitig von J. M. Rodrigues in der Schrift behandelt ist: „Movimento do solido livre" (F. d. M. **17**, 887, 1885). Das vom Verf. behandelte Problem fällt unter diese Kategorie von Aufgaben. Der Verf. hat gefunden, dass, wenn die Lösung auf elementare Quadraturen

führen soll, die Kräftefunction U proportional sein muss mit

$$\frac{m\cos^2\theta+n\cos\theta+l}{1-\cos^2\theta},$$

wo l, m, n beliebige Constanten sind, und hat den Fall $l=0$, $n=0$, $m=1$ oder $U=\operatorname{cotg}^2\theta$ vollständig durchgeführt. In den ersten sechs Paragraphen werden die Richtungscosinus der mit dem Körper beweglichen Coordinatenaxen gegen die im Raume festen Axen analytisch bestimmt. In den übrigen wird die kinematische Erforschung der Bewegung erledigt; die letztere besteht darin, dass der Kegel der Herpolhodie sich auf einer Umdrehungsfläche vierter Ordnung abwälzt. Lp.

W. de Tannenberg. Sur l'interprétation géométrique de quelques formules relatives au mouvement d'un corps solide. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 80-83.

Sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ($n \gtreqless 6$) die Parameter, von denen die Lage des starren Körpers abhängt, so zeigt der Verf., wie man bei zwei verschiedenen Bewegungen für die zugehörigen Variationen du_i und δu_i der u_i bilineare Formen herstellen kann, deren Identification zu je zweien die verlangten Relationen liefert. Lp.

W. de Tannenberg. Sur la forme donnée par Kirchhoff aux équations différentielles du mouvement d'un corps solide. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 226-228.

Die Kirchhoff'sche Ableitung der „besonders eleganten Form der Differentialgleichungen für die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers" aus dem Hamilton'schen Principe wird durch eine andere aus dem d'Alembert'schen Principe ersetzt. Lp.

W. de Tannenberg. Sur l'équation d'Euler. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 143.

K. Th. Vahlen. Ueber das Foucault'sche Pendel. Schlömilch Z. **43,** 166-167.

Modification der elementaren Herleitung des Foucault'schen Drehungsgesetzes mit Berücksichtigung des Umstandes, dass die „Schwingungsebenen in auf einander folgenden Zeitmomenten sich im Erdmittelpunkte schneiden". Lp.

H. Leutz. Geschichte, Theorie und Anwendungen des Horizontalpendels. I. Teil. Geschichte und elementare Theorie des Instrumentes. Pr. Realgymn. Karlsruhe. 20 S. 4°.

Die Schrift ist dadurch von Interesse, dass am Anfange einige Personalnotizen über den ersten Erfinder des Instrumentes, Lorenz

Hengler, gegeben werden und dann der Wortlaut des Hengler'schen Artikels in Dingler's polytechnischem Journal vom Jahre 1832 abgedruckt ist (S. 3-9). Ebenso ist die Mitteilung von Perrot aus C. R. **54** (1862) im Urtexte wiedergegeben (S. 10). Dann folgt die Beschreibung des Zöllner'schen Apparates und desjenigen von E. von Rebeur-Paschwitz nebst kurzer Angabe einiger hiermit erreichten Ergebnisse. Lp.

G. Kolossoff. Ueber einen Fall der Bewegung eines starren schweren Körpers, welcher sich mit einer Spitze auf eine glatte Ebene stützt. Moskau Phys. Sect. **9**, Lieferung 2, 11-12. (Russisch.)

Verf. betrachtet die Bewegung eines starren schweren Körpers, welcher sich mit einer Spitze auf eine glatte Ebene stützt. Er nimmt an, dass die Linie L, welche den Schwerpunkt mit dem Ende der Spitze verbindet, perpendiculär zu der Ebene ist, welche das Ellipsoid von MacCullagh kreisförmig schneidet.

Verf. zeigt, dass in diesem Falle, ebenso wie im Falle von Hess, das Moment des impulsiven Paares in Bezug auf den Schwerpunkt, wenn es im Anfangsmoment in dem erwähnten Kreisschnitte liegt, die ganze Zeit hindurch in diesem Kreisschnitte bleibt.

Er nennt ζ den Cosinus des Winkels, welchen die Linie L mit der Verticallinie bildet, und findet dabei folgende Gleichungen:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\zeta^2)\left(l_2 - 2\frac{MgL}{B}\zeta\right) - l_1^2}}{\sqrt{1+\frac{ML^2}{B}(1-\zeta^2)}},$$

$$\psi' = \frac{l_1}{1-\zeta^2},$$

wo M die Masse des Körpers, B dessen mittleres Trägheitsmoment, l_1 und l_2 constante Grössen und ψ' die Präcession der Linie L um die Verticale sind. Diese Formeln führen zu dem Schlusse, dass die Linie L sich wie ein dünnes Stäbchen bewegt (welches sich auf horizontale Ebenen stützt), dessen Masse M ist, dessen Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, und dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe, welche perpendiculär zu L durch den Schwerpunkt gezogen ist, gleich B ist.

Die Resultate der besprochenen Arbeit könnten, wie Sommerfeld gezeigt hat, auch auf rein geometrischem Wege gefunden werden (vergl. die folgenden Referate). Jk.

G. Kolossoff. Ueber einen Fall der Bewegung eines allgemeinen Kreisels, dessen Unterstützungspunkt sich in der horizontalen Ebene frei bewegen kann. Gött. Nachr. 1898, 80-83.

Das particulare Integral $Aap + C\gamma r = 0$, in welcher Formel die

Poisson schen bekannten Bezeichnungen benutzt sind, folgt aus den Differentialgleichungen der Kreiselbewegung, wenn $A > B > C$, $\beta = 0$ und $A(B-C)\alpha^2 = C(A-B)\gamma^2$ ist. Diese Bedingungen bedeuten, dass der Unterstützungspunkt O des Kreisels auf einer der beiden zu den Kreisschnitten des Gyrationsellipsoids im Schwerpunkte G senkrechten geraden Linien liegt. Der Fall ist der von W. Hess entdeckten und von P. Nekrassoff neuerdings durchgeführten particularen Lösung des Problems der Bewegung eines allgemeinen Kreisels mit festem Unterstützungspunkte ganz analog. Die Zeit t ergiebt sich dabei als ultraelliptisches Integral in c''. Der Schwerpunkt des Kreisels bewegt sich wie der Schwerpunkt eines schweren, unendlich dünnen Stabes, dessen Masse gleich M ist, welcher sich ferner mit einem Ende O auf die Ebene stützt und sich auf ihr frei bewegen kann, und dessen Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt gleich B ist. Die speciellen Fälle des Hess'schen Problems sind auch specielle Fälle des vorliegenden (vergl. das vorangehende und das nachfolgende Referat).

Lp.

A. Sommerfeld. Bemerkungen zum Hess'schen Falle der Kreiselbewegung. Gött. Nachr. 1898, 83-86.

Der Verf. geht von der Frage aus, unter welchen Umständen es eintreten kann, dass bei der Bewegung eines allgemeinen Kreisels mit festem Unterstützungspunkte O der Impuls (im Sinne der in der „Theorie des Kreisels“ von F. Klein und A. Sommerfeld) dauernd in einer durch O gehenden, im Körper festen Ebene enthalten sei. Durch Erörterung dieser Frage kommt er zu dem Ergebnisse: Für das Zustandekommen des Hess'schen Bewegungsfalles ist erforderlich, dass die Normalebene der Schwerpunktsaxe das reciproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneidet, oder dass der Schwerpunkt auf dem in O zu einer der Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides errichteten Lote liegt. Diese Form der Bedingung ist von Joukowsky gegeben (Deutsche Math. Ver. **3**, 62; vergl. F. d. M. **25**, 1440, 1894). Die Note von Kolossoff in Gött. Nachr. 1898 findet von diesem Standpunkte aus ihre Bestätigung (vergl. die vorangehenden Referate).

Lp.

N. Joukowsky. Ein neuer gyroskopischer Apparat. Verh. d. intern. Math.-Congr. **1**, 272-273.

Das vom Verf. construirte neue Gyroskop beruht auf demselben Princip wie das perimetrische Gyroskop von Sire. Am angeführten Orte befindet sich eine Skizze nebst kurzer Beschreibung und theoretischer Erörterung über die Bewegung. Lp.

F. J. Whipple. The stability of the motion of a bicycle. Quart. J. **30**, 312-348.

Von den Schriftstellern über den Gegenstand werden nur citirt Bourlet (Traité des bicycles et bicyclettes. Paris, 1895), dessen Bedingungen der Verf. für zu künstlich und daher des Interesses bar erachtet, und McGaw mit einem Artikel im Engineer, Dezember 1898, der die Aufgabe für einen vertical stehenden Hinterrahmen gelöst hat. Die in der vorliegenden Abhandlung enthaltene Lösung macht ebenfalls complicirte Rechnungen mit langen Formeln nötig, die häufig quer gestellt werden mussten, um im Drucke herstellbar zu sein, und sich wiederholt in dieser Querstellung über mehrere Seiten erstrecken. Zur Erörterung gelangen der Reihe nach: die allgemeinste Bewegung eines Zweirades (§§ 5-9); die Bewegung, bei welcher die Neigung der Räder gegen die Verticale klein ist (§ 10); die gleichmässige Bewegung in einem Kreise von grossem Radius (§ 11); die Oscillationen um die gleichmässige Bewegung, wenn der Fahrer seine feste Stellung auf der Maschine beibehält und nicht die Lenkstange benutzt (§§ 12-16); der Gebrauch der Lenkstange in einer beschränkten „elastischen“ Art, die automatisch sein kann (§ 17); die Bewegung des Körpers in einer ähnlichen automatischen Art ohne Gebrauch der Hände (§ 18); Noten über die Wirkung der rollenden und gleitenden Reibung (§§ 20-22). Die allgemeinen Ergebnisse werden im § 19 angegeben. Wir führen aus denselben Folgendes an: Die Untersuchung zeigt, dass für ein Zweirad vier kritische Geschwindigkeiten bestehen. Bei Geschwindigkeiten über V_1 ist die Bewegung instabil, kann aber durch einen Fahrer stabil gemacht werden, der das Vorderrad nach der Seite dreht, nach welcher er zu fallen beginnt, oder der seinen Körper von jener Seite weg bewegt. Die bei der ersteren Operation aufzuwendende Anstrengung ist verhältnismässig gross, wogegen die Strecke, um welche er seinen Körper in dem letzteren Falle zu bewegen hat, klein ist. Bei Geschwindigkeiten zwischen V_1 und V_2 ist die Bewegung stabil, selbst wenn der Radler seinen Körper nicht bewegt und von der Lenkstange keinen Gebrauch macht. Bei Geschwindigkeiten unter V_2 ist die Bewegung ohne die Hände instabil; allein zwischen V_2 und V_3 ist sie stabil für einen Fahrer, der seinen Körper durch eine sehr kleine Strecke in derselben Richtung bewegt, nach welcher der Fall neigt. Diese Strecke ist etwa ein Zwanzigstel derjenigen, um welche er zufolge des Ganges der Maschine befördert wird. Bei Geschwindigkeiten zwischen V_3 und V_4 ist die Bewegung stabil für einen Radler, der die Bewegung der Lenkstange so klein wie nur möglich hält. Bei Geschwindigkeiten unter V_4 kann ein Fahrer, der die beiden Methoden vereinigt, sowohl sein Gewicht wie auch seine Hände benutzt, Erfolg haben. Das Balanciren bei so geringen Geschwindigkeiten ist nicht mehr automatisch, sondern ist ein Kunststück, das stetige Aufmerksamkeit erfordert. Zahlenbeispiele dienen zur Erläuterung der entwickelten Sätze; z. B. in Bezug auf eine bestimmte Maschine wird gefunden $V_1 = 5{,}45$ m, $V_2 = 4{,}62$ m, $V_3 = 3{,}79$ m, $V_4 = 3{,}29$ m in der Secunde. Lp.

J. Boussinesq. Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison. C. R. **127**, 843-848.

Der Verf. leitet folgende Differentialgleichung ab:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b}{h}\frac{d\frac{V}{R}}{dt}=\frac{g}{h}\theta-\frac{V^2}{hR}.$$

Hierin bezeichnen: t die Zeit, V die Geschwindigkeit, mit welcher der Berührungspunkt des hinteren (Trieb-)Rades die von ihm auf dem Boden beschriebene Curve durchläuft; θ den Winkel der Mittelebene des Triebrades mit der Verticale; R den Krümmungsradius jener Curve; h und b zwei von dem Zweirade abhängige Constanten. Ueber diese Gleichung, die auch noch in eine andere Gestalt gebracht wird, stellt der Verf. einige Betrachtungen an. Lp.

J. Boussinesq. Aperçu sur la théorie de la bicyclette; équilibre du cavalier. C. R. **127**, 895-899.

Dieser Aufsatz schliesst sich unmittelbar dem im vorigen Referat besprochenen an. Durch Annahme einer mittleren, constanten Geschwindigkeit V vereinfacht der Verf. die obige Differentialgleichung zu der folgenden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{b'V}{ah'}\frac{da}{dt}-\frac{g}{h'}\left(\frac{V^2}{ga}a-\theta\right)$$

und zieht daraus Folgerungen für das Verhalten des Radlers bei eintretenden Störungen, z. B. bei Begegnung mit einem Steine auf dem Wege, bei seitlichem Winde oder bei einer Eigenbewegung. Lp.

H. Schubert. Zur Theorie des Schlick'schen Problems. Hamb. Mitt. **3**, 354-367.

Die Arbeit betrifft das in dem Referate über Lorenz (F. d. M. **28**, 668, 1897) erwähnte Problem, in dem Falle einer an beliebiger Stelle des Schiffes aufgebauten viercylindrigen Maschine die Vibrationen dadurch zum Verschwinden zu bringen, dass bei jeder Stellung der vier Kurbeln die vier Druckkräfte sich dauernd aufheben. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben acht Gleichungen, von denen Lorenz, der sie ebenfalls aufgestellt hat, meinte, dass sich aus ihnen die acht Unbekannten der Aufgabe stets berechnen liessen. Dem gegenüber zeigt Schubert in § 4, dass, wenn die Schubstange im Vergleich zum Kurbelradius nicht als unendlich lang angesehen wird, die acht Gleichungen praktisch unverträglich sind. Für das dauernde Gleichgewicht bei vier Cylindern, falls alle $m_i = S_i : R_i$ (Schubstange : Kurbelradius) unendlich gross sind, ist eine aus jenen Gleichungen zu ziehende Folgerung die, dass die von einem und demselben Punkte ausgehend gedachten vier Kurbelrichtungen in perspectivische Lage zu vier Punkten

gebracht werden können, die in gerader Linie so zu einander liegen, wie die vier Cylinder der Maschine zu einander liegen. Wenn nun bloss die Anforderung gestellt wird, dass für jeden Winkel x die algebraische Summe der vier Druckkräfte Null wird, so hat man weiter keinen Vorteil, als dass dauernd weder in der einen, noch in der entgegengesetzten Richtung sich eine von Null verschiedene Druckresultante entwickelt; diese von den Ingenieuren als „Aufhebung der verticalen Kräfte" bezeichnete Aufgabe wird in § 5 gelöst, und dabei ergiebt sich unter anderem auch die Lösung eines von Schlick vorher gefundenen Falles. Der sechste Paragraph behandelt das dauernde Verschwinden der Verticalkräfte bei endlicher Schubstange und zugleich die Herstellung von dauerndem Gleichgewicht bei unendlich langer Schubstange, und im letzten Paragraphen wird die dauernde Aufhebung der Vibrationen bei einer fünfcylindrigen Maschine besprochen. In diesem Falle lassen sich die acht fundamentalen Gleichungen erfüllen, wenn zweimal zwei Kurbelrichtungen parallel sind und mit der fünften Kurbelrichtung Winkel von 120 Grad bilden, und dieses ist, wie der Verf. später zu zeigen verspricht, die einzige Lösung. Lp.

W. Lewis. An instructive mechanical failure. J. Franklin Inst. **146**, 105-126.

Philipp Z. Davis hat 1897 in den Vereinigten Staaten von Nordamerika drei Patente genommen auf vermeintliche Verbesserungen des Ausbalancirens von Locomotivtreibrädern durch Hinzufügung von gleichen Gewichten, die in gleichen Winkelabständen concentrisch am Rade zu verteilen sind. Die Nützlichkeit dieser Einrichtung sollte durch ein Modell versinnlicht werden, bei welchem auf einer horizontalen Kreisbahn zwei Räder, die durch eine horizontale Axe verbunden waren, mittels einer im Centrum der letzteren befestigten verticalen Triebstange in Umlauf gesetzt wurden. Die nach den Patenten ausbalancirten Räder zeigten im Modell einen ruhigen Gang, während bei den nicht so ausbalancirten Rädern durch eine Registrirvorrichtung veränderlicher Druck verzeichnet wurde. Zur theoretischen Begründung wurde angeführt, dass man bei einem rollenden Rade, das also eine Rotations- und eine Translationsbewegung besitzt, die Berechnungen der Wirkungen mitgeführter Gewichte in Bezug auf die durch den Berührungspunkt der Bahn gehende momentane Rotationsaxe ausführen müsse. Zum Berichte über diese Idee aufgefordert, hat das Franklin Institute die Irrtümer sowohl dieser theoretischen Begründung als auch der scheinbaren Unterstützung durch das Modell nachgewiesen, und auf Wunsch des Patentinhabers veröffentlicht der Berichterstatter des Instituts zu Nutz und Frommen anderer Erfinder eine Beschreibung der vermeintlichen Erfindung und die daran geknüpfte Kritik, sowie die Erklärung der Erscheinungen des Modells. Lp.

Ed. Guillaume et J. Pettavel. Sur la détermination des courbes terminales des spiraux. C. R. **126**, 1492-1494.

Phillips hat (Ann. des Mines **19**, 1861) in seiner Abhandlung „Sur le spiral réglant" die Bedingungen abgeleitet, unter denen der Balancier einer Uhr isochrone Schwingungen ausführt. Die von ihm als notwendig erkannten Eigenschaften der Spiralen sind seitdem praktisch durch ein tastendes Verfahren allmählich erreicht worden. Jetzt haben die Verf. einen Apparat construirt, durch den die Anfertigung solcher Spiralen in kürzester Zeit gelingt. „Unser Apparat ermöglicht in wenigen Minuten die Verwirklichung einer (Phillips'schen) Curve von einem neuen Typus." Lp.

C. Cranz. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegungen der rotirenden Langgeschosse während ihres Fluges. Schlömilch Z. **43**, 133-162, 169-215.

Diese umfangreiche Abhandlung umfasst folgende Teile: A. Einleitung (131-138). B. Versuche (138-144). C. Theorie (144-162). D. Vergleichung der vorstehenden Resultate mit denen der Kreiseltheorie (169-183). E. Tabelle für die Componenten W_p und W_s der Luftwiderstandsresultanten parallel, resp. senkrecht zur Axe des Langgeschosses, sowie für die Lage des Angriffspunkts der Resultanten auf der Axe (184-192). F. Zusammenstellung der Resultate (193-202). G. Folgerungen (202-209). H. Zahlenbeispiele (209-215). Für das Jahrbuch kommen offenbar hauptsächlich die Abschnitte C. und D. in Betracht.

Eine analytische Theorie der Kreiselbewegungen rotirender Langgeschosse hat der Verf. früher (Compendium der theoretischen äusseren Ballistik, § 28) unter Voraussetzung des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes gegeben. Dieselbe ist in der vorliegenden Arbeit unter weniger beschränkenden Annahmen von neuem durchgeführt worden: erstens gilt die Theorie für jedes beliebige Luftwiderstandsgesetz; zweitens ist angenommen, dass die Geschossaxe im Anfang der Flugbahn einen seitlichen Stoss erleidet, der speciell auch Null sein kann; ferner, dass anfangs die Bahntangente und die Geschossaxe nicht zusammenfallen.

Das angewandte Verfahren besteht darin, dass die Gleichungen der Translationsbewegung zunächst ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung näherungsweise gelöst, sodann die betreffenden Ausdrücke in die Gleichungen der Rotationsbewegung eingesetzt und diese integrirt werden. Die so gewonnenen Integrale werden dann, falls dazu fortgeschritten werden soll, die Geschossabweichungen infolge der Rotationsbewegungen zu berechnen, rückwärts wieder dazu verwendet, die Gleichungen der Translationsbewegung nachträglich mit gewissen Correctionsgliedern zu versehen.

Da der Verf. zur Zusammenstellung der Resultate in *F* neun und eine halbe Seite braucht, so kann hier nur einiges hervorgehoben werden. In Beziehung auf den Schwerpunkt beschreibt die Geschoss-

spitze im Verlauf der Flugbahn eine doppelte Bewegung: erstens eine langsame Präcessionsbewegung und zweitens eine schnellere Nutationsbewegung, welche ihren Ursprung meistens in einem kleineren oder grösseren seitlichen Anfangsstoss auf das Geschoss hat. Die Bahn kann angesehen werden als bestehend aus einem beweglichen Kreise, dessen Radius sich fortwährend vergrössert, und dessen Nutationswindungen sich bei dem Fortschreiten des Mittelpunkts an die Präcessionsspirale (ausgezogen) anlehnen. Durch die Präcessionsbewegung wird vor allem die Rechts - (Links-) Abweichung des Geschosses aus der anfänglichen Schussebene bedingt, weil die Präcessionscurve unsymmetrisch bezüglich der Verticalebene durch die Flugbahntangente ist. Die Nutationsbewegung, welche ihre Entstehung meist einem kleinen seitlichen Stosse auf das Geschoss an der Mündung verdankt, beginnt stets in der Richtung des Stosses und erfolgt in demselben Sinn, wie die Drehung des Geschosses um seine Längsaxe, also bei Rechtsdrall rechtsläufig, bei Linksdrall linksläufig, mag hierbei die Präcessionsbewegung rechts- oder linksläufig vor sich gehen, mag also Rechts- oder Linksabweichung des Schwerpunkts eintreten. Sie bleibt bestehen, wenn die Bewegung des Geschossschwerpunkts als geradlinig betrachtet werden kann oder muss, und folgt auch sonst wesentlich anderen Gesetzen als die Präcessionsbewegung. Diese Nutationsbogen sind es meistens, nicht die Windungen der Präcessionsspiralen, welche mitunter bei Geschossen mit dem blossen Auge beobachtet werden, und welche bei den Neesen'schen photographischen Aufnahmen sich zeigten. Mit der Amplitude dieser Nutationswindungen und deren secundlicher Zahl ändert sich insbesondere die Schussweite und die Trefffähigkeit. Die mathematischen Ausdrücke der Gesetze, welchen die beiden Arten von Geschosspendelungen unterliegen, müssen wir hier übergehen; sowohl in betreff ihrer als auch der vielen interessanten Thatsachen, die sich aus Versuchen ergeben haben, ist das Original nachzulesen. Lp.

Freiherr v. Zedlitz und Neukirch. Beziehungen zwischen den modificirenden Factoren der ballistischen Gleichungen und ihre praktische Verwendung. Mitt. üb. Art. u. Genie **29**, 881-894.

Fortsetzung der Arbeit, über die in F. d. M. **27**, 639, 1896 berichtet ist. Von den im früheren Referate abgedruckten Formeln sind, wie Verf. erst später erfahren hat, einige von Ronca und Bassani aus anderen Voraussetzungen her abgeleitet worden in der Rivista marittima von 1895.

Im Verfolg seiner Untersuchungen ist der Verf. dazu gelangt, „ähnliche, auf den Beziehungen der modificirenden Factoren zu einander beruhende, noch schärfere und in noch weiterem Umfange gültige Formeln aus den Flugbahngleichungen allgemeinster Form unmittelbar abzuleiten“. Die Einzelheiten der Rechnungen und der erzielten Formeln sind im Originale nachzulesen. „Die Methode der modificirenden Factoren hat Ergebnisse geliefert, welche in Anbetracht der überaus ein-

fachen zur Anwendung gekommenen Hülfsmittel als überraschend gute bezeichnet werden können.“ Lp.

A. Indra. Zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeiten aus den vor der Mündung gemessenen Geschossgeschwindigkeiten. Mitt. üb. Art. u. Gen. **29**, 1-30.

„Die bisherige Reduction der Geschwindigkeit auf die Mündung setzt voraus, dass die Geschwindigkeit an der Mündung ihr Maximum erreicht hat; sie zieht daher die Nachwirkung der Pulvergase an der Mündung gar nicht mehr in Betracht.“ Der Ort, in welchem das Maximum der Geschwindigkeit eintritt, liegt ausserhalb der Mündung in demjenigen Punkte, wo sich die beschleunigende Wirkung der Pulvergase mit der verzögernden Entgegenwirkung des Luftwiderstandes das Gleichgewicht hält. Der Verf. stellt eine empirische Formel auf, die dieser Thatsache Rechnung trägt und die beobachteten Geschwindigkeiten hinreichend genau darstellt: $v = v_0 . e^{(px_0-k)x-\frac{1}{2}px^2}$, wo p, entsprechend dem quadratischen Luftwiderstandsgesetze, den Wert 0,0003698 hat, v_0 die Mündungsgeschwindigkeit, x die Entfernung von der Mündung ist, wo die Geschwindigkeit den Wert v hat; k ist die Constante des Luftwiderstandes, x_0 die Entfernung, bis zu welcher die Beschleunigung nachwirkt. Lp.

J. Stauber. Berechnung des ballistischen Coefficienten steiler Flugbahnen. Mitt. üb. Art. u. Genie **29**, 99-109.

„Indem man für den Krümmungshalbmesser einen constanten Mittelwert einführt, lässt sich das Integrationsgebiet der Differentialgleichungen für die Bewegung des Geschossschwerpunktes viel einfacher und ebenso genau erweitern, als mit Hülfe des Didion'schen Mittelwertes für den Cosinus des Tangentenwinkels. In dem Aufsatze „Berechnung starkgekrümmter Flugbahnen“ (F. d. M. **28**, 672, 1897) wurde gezeigt, wie aus drei gegebenen Flugbahnelementen, mit Ausnahme des ballistischen Coefficienten, alle übrigen Daten auf einfache Art berechnet werden können. Der Zweck der nachfolgenden Zeilen ist, diese Lücke auszufüllen und zu zeigen, wie es möglich ist, geschlossene Ausdrücke für die Berechnung des ballistischen Coefficienten zu erhalten.“ Die Berechnung geschieht nach drei Methoden: a) mit Hülfe der modificirenden Function $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeit, b) mit Hülfe der Constante k, c) mit Hülfe der Verzögerung $\mathfrak{V} = dv/dt$. Zu den gewonnenen Formeln werden jedesmal Zahlenbeispiele berechnet. Lp.

Journée. Note concernant la résistance de l'air. Revue d'Art. **51**, 546-550.

Zur Vervollständigung der Arbeit, über welche in F. d. M. **27**, 637, 1896 berichtet ist, hat der Verf. Versuche mit Bleischrot angestellt. Als Hauptergebnis ist ermittelt, dass der Luftwiderstand gegen die

Körner des Bleischrotes, die kugelförmig gestaltet waren, innerhalb der Grenzen $V = 0$ und $V = 180$m dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Für höhere Geschwindigkeiten ist das Gesetz nicht mehr anwendbar. Die im vorigen Aufsatze definirte Function $F(V)$ verhält sich im vorliegenden Falle merklich wie die $F(V)$ der cylindrischen Geschosse, wenn V von 100 bis 350m fortschreitet. Bei noch höherer Geschwindigkeit ist dagegen eine augenscheinliche Abweichung vorhanden. Lp.

A. Edler v. Obermayer. Die explosionsartige Wirkung der mit grossen Anfangsgeschwindigkeiten geschossenen Gewehrprojectile. Mitt. üb. Art. u. Genie **29**, 361-397.

Der Aufsatz, eine Fortsetzung des in F. d. M. **28**, 677, 1897 mit dem Titel angezeigten Artikels, enthält neben den durch Beobachtung ermittelten Thatsachen an den geeigneten Stellen auch theoretische Erörterungen über Stosswirkungen unter Hervorhebung der hierzu zu machenden wichtigen Unterscheidung von kinetischer Energie $\frac{1}{2}mv^2$ und Bewegungsgrösse mv. Lp.

Heydenreich. Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln. Zwei Bände. Auf dienstliche Veranlassung bearbeitet. Berlin: E. S. Mittler und Sohn. VIII + 67 u. IV + 109 + 79 S. 8°.

B. Hydrodynamik.

P. Duhem. Sur l'équation des petits mouvements dans un milieu fluide. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 180-184.

Um die Gleichung für die kleinen Bewegungen in einer Flüssigkeitsmasse aufzustellen, nimmt man gewöhnlich die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials an, welche Existenz man durch das Lagrange'sche Theorem begründet. Der Verf. schlägt statt dieses Ganges einen anderen vor, dem er den Vorzug giebt, und bei welchem aus der Hydrodynamik nur die Continuitätsgleichung und die Euler'schen Gleichungen vorausgesetzt werden. Lp.

H. S. Carslaw. Note on the transformations of the equations of hydrodynamics. Edinb. M. S. Proc. **16**, 36-38.

Die Gleichungen sind diejenigen der Bewegung in einer zähen Flüssigkeit. Der Verf. schickt die Bemerkung vorauf, dass die Methode zur Ausführung der Transformationen wesentlich übereinstimmt mit derjenigen, welche Jaerisch in der Abhandlung benutzt hat: „Transformationen der hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung“ (Mitt. Math. Ges. Hamburg **3**, 273-390, 1897), dass er selbst sie jedoch schon 1894 gefunden und in seinen damaligen Aufzeichnungen

gebraucht habe. Er teilt jetzt die Durchführung mit, da englische Leser aus ihr Nutzen ziehen dürften. Ist das System definirt durch $ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2 + h_3^2 d\gamma^2$, so mögen für den Punkt (α, β, γ) die Axen der x, y, z mit denen von α, β, γ zusammenfallen. In der üblichen Bezeichnung ist $d\theta_3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} d\beta - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} d\alpha$, etc. Für jeden Vector mit den Componenten U, V, W nach den Axen hat man $\delta U = dU - Vd\theta_3 + Wd\theta_2$, woraus

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{W}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}, \text{ etc.}$$

Die Anwendungen dieser Formeln geben die verlangten Transformationen. Gbs. (Lp.)

J. Brill. Note on the motion of an incompressible viscous fluid. Messenger (2) **27**, 147-152.

Der Verf. wirft die Frage nach der allgemeinsten Hypothese auf, welche es gestattet, dass in dem Falle der Bewegung einer nicht zusammendrückbaren, viscosen Flüssigkeit unter einem conservativen System von Kräften die Wirbellinien sich mit der Flüssigkeit bewegen. Nach Aufstellung der analytischen Bedingungen werden dann zwei Familien von Oberflächen ermittelt, die sich mit der Flüssigkeit bewegen und Träger der Wirbellinien sind. „Die Geschichte ihrer Schnittlinie ist die Geschichte einer einzelnen Wirbellinie.“ Endlich wird auch die Dämpfung der Wirbelbewegung erörtert. Lp.

E. Fontaneau. Sur un cas particulier du mouvement des liquides. C. R. **126**, 630-631.

Der Verf. teilt in dieser kurzen Notiz mit, dass er den besonderen Fall der Flüssigkeitsbewegung, bei welchem überall die Richtung der fortschreitenden Bewegung auf der Axe der Wirbelbewegung senkrecht stehe, durch ein besonderes System krummliniger Coordinaten behandelt habe. F. K.

E. Fontaneau. Sur l'intégration dans un cas particulier des équations différentielles de l'hydrodynamique. Assoc. Franç. St. Étienne (1897), **26**, 60-86.

Man kann durch verschiedene Methoden zur Bestimmung der Bewegungen von Flüssigkeiten kommen, abgesehen von denen, die durch das Bestehen eines Geschwindigkeitspotentials gekennzeichnet sind. Verf. bringt diese Untersuchung mit der Integration einer gewissen partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung in Verbindung, indem er die Componenten der Rotation, mit der im allgemeinen ein beliebiges Teilchen der in Bewegung befindlichen Flüssigkeit behaftet ist, als bekannt annimmt. Diese Methode wird auf den Fall angewandt, bei

welchem die Axe der Elementarrotation in jedem Punkte der Flüssigkeit mit der Tangente des Flüssigkeitsfadens zusammenfällt, und noch allgemeiner auf den Fall, bei welchem jede der Componenten dieser Rotation der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Fortpflanzung der Wärme in den homogenen Körpern genügt. Endlich wird ein Mittel zur Integration der partiellen Hauptgleichung erster Ordnung angegeben, wenn man annimmt, dass die Elementarrotationen in jedem Augenblicke zu einer und derselben Oberfläche normal sind, deren Gleichung bekannt ist und mit der Zeit variirt, ohne dass dabei sich andere Rechnungsschwierigkeiten einstellen als Eliminationen von Variabeln und Quadraturen. Lp.

M. P. Rudzki. Ueber eine Klasse hydrodynamischer Probleme mit besonderen Grenzbedingungen. Math. Ann. **50**, 269-281.

A. E. Love. Note on a problem in hydrodynamics. Math. Ann. **51**, 158.

Ist φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Stromfunction, ϱ die Dichtigkeit, so muss für die erste Flüssigkeit an der Grenze, d. h. für $\psi = \psi_1$,

$$(C-\varrho g y)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\varrho$$

werden. Setzt man $\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{\lambda+i\mu}$, so erhält man $\frac{1}{2}\varrho e^{2\lambda} = C-\varrho g y$. Diese Gleichung wird nach φ differentiirt, und dann wird für $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ der Wert $-e^{-\lambda}\sin\mu$ eingesetzt, so dass sich ergiebt (für $\psi=\psi_1$):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}-g e^{-3\lambda}\sin\mu = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man ϑ durch die Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}-3g e^{-3\lambda}\cos\mu$$

definirt, die weitere Formel:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(3\lambda+i\mu)-3ig e^{-(3\lambda+i\mu)}-i\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0;$$

das Integral derselben lautet:

$$e^{3\lambda+i\mu} = e^{i\vartheta}\left\{A+iB+3ig\int e^{-i\vartheta}\,d\varphi\right\}.$$

Man erhält also (für $\psi=\psi_1$):

$$e^{\lambda+i\mu} = e^{i\vartheta}\frac{\left\{A+iB+3ig\int e^{-i\vartheta}\,d\varphi\right\}^{\frac{2}{3}}}{\left\{A-iB-3ig\int e^{i\vartheta}\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{3}}}.$$

Nun kann man aber, wenn $z = x+iy$, $\omega = \varphi + i(\psi - \psi_1)$ ist, setzen:

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = e^{-i\vartheta} \frac{\left\{A - iB - 3ig\int e^{i\Theta}\, d\omega\right\}^{\frac{1}{3}}}{\left\{A + iB + 3ig\int e^{-i\Theta} d\omega\right\}^{\frac{2}{3}}},$$

so dass ϑ der Wert von Θ für $\psi = \psi_1$ ist. Indem der Verf. $\Theta = \omega = \varphi + i(\psi - \psi_1)$ setzt, kommt er zu einem streng durchgeführten Falle für das Fliessen über einem gewellten Grunde. Ein kleiner, von Love in der „Note on a problem in hydrodynamics" hervorgehobener Irrtum hat auf die Beispiele selbst keinen Einfluss. F. K.

D. Gorjatschoff. Zu dem Problem von der Bewegung geradliniger Wirbelfäden. Moskau Phys. Sect. **9**, Lieferung 2, 14-16. (Russisch.)

Das vom Autor behandelte Problem bezieht sich auf die Untersuchung der Bewegung zweier paralleler Wirbelfäden in einer unendlichen flüssigen Masse, welche eine Ebene berührt. Für die Fälle, wo die Wirbelintensitäten m und m_1 den Bedingungen $m = m_1$ oder $m = -m_1$ genügen, war dieses Problem durch Gröbli gelöst. („Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden." F. d. M. **9**, 675, 1877.) Der Autor löst das Problem unter der Voraussetzung, dass $m = -\lambda m_1$, wo λ eine positive Grösse ist. Jk.

D. Gorjatschoff. Ueber einige Fälle von Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. Moskau. 106 S. (Russisch.)

Nach Darlegung der bekannten Sätze über die Wirbelfäden kommt der Autor zu seiner speciellen Aufgabe über die Bewegung von vier Wirbeln, welche ein Parallelogramm bilden, wobei die Intensitäten der Wirbel, welche an den Enden einer und derselben Diagonale liegen, gleich sind. Der Autor nennt die Intensitäten der Wirbel der beiden Diagonalen m_1 und m_2.

Solch ein Wirbelsystem behält für die ganze Zeit der Bewegung die Parallelogrammform. Die Bewegung eines derartigen Wirbelsystems wird auf Grund der drei bekannten Integrale der Wirbelbewegung in zwei Dimensionen auf Quadraturen gebracht.

Diese Bewegung wird unter der Voraussetzung:

$$m_1 = m_2\,,\; m_1 = -m_2\,,$$
$$m_1\,\varrho_1^2 + m_2\,\varrho_2^2 = 0,$$

wo $2\varrho_1$ und $2\varrho_2$ die Längen der Diagonalen sind, umständlich untersucht. Der Autor construirt die Bahnen der Wirbel in allen obigen Fällen und teilt diese Bahnen in Klassen je nach ihrer Gestalt. Darauf fügt er zu den vier Wirbeln, welche ein Parallelogramm bilden, einen fünften hinzu, welcher im Centrum des Parallelogramms liegt, und untersucht dieses verallgemeinerte Problem.

Die Arbeit schliesst mit einer Untersuchung eines Systems von $2n+1$ Wirbeln, von welchen $2n$ Wirbel zwei regelmässige, gleiche n-Ecke bilden, während der $(2n+1)^{te}$ Wirbel in dem gemeinsamen Centrum dieser n-Ecke liegt. Interessant ist hierbei der Fall der Bewegung aller Wirbel nach logarithmischen Spiralen. Jk.

G. W. Walker. A theorem in vortex motion. Quart. J. **29**, 282-284.

Das Theorem, für welches ein naheliegender rechnerischer Beweis erbracht wird, lautet:

Ist bei einer Flüssigkeitsbewegung, welche in einem Teile rotationslos ist, während in dem andern Teile Rotation stattfindet, die tangentiale und die normale Geschwindigkeit stetig, so ändert sich auch der Druck stetig beim Durchgang durch die Trennungsfläche. F. K.

W. M. Hicks. Researches in vortex motions. Part III. On spiral or gyrostatic vortex aggregates. Lond. R. S. Proc. **62**, 332-338.

In diesem kurzen Auszuge bespricht der Verf. den Inhalt einer grösseren Schrift, welche sich mit einer bestimmten Klasse von Wirbelbewegungen befasst. Diese Wirbelbewegungen entsprechen der Superposition einer Bewegung, die in der durch eine Axe gelegten Meridianebene vor sich geht, und einer Bewegung in kreisförmigen Bahnen senkrecht zu jener Axe. Während die eigentliche Abhandlung sich auf die Hydrodynamik beschränkt, stellt der Verf. hier einige allgemeine Betrachtungen an, welche sich auf die Wirbeltheorie des Aethers und der Materie beziehen. F. K.

M. Réthy. Ueber schwere Flüssigkeitsstrahlen. Ungar. Ber. **15**, 258-267.

Nachdem der Verf. in früheren Untersuchungen Strahlen betrachtet hatte, welche nicht der Schwere unterworfen sind, behandelt er hier Strahlen mit Rücksicht auf die Schwerewirkung. Bei zweidimensionaler Bewegung ist die reciproke Geschwindigkeit ζ eine Function von $w = \varphi + i\psi$. Man setze nun $\zeta = \zeta_0/v$, wo ζ_0 und v Functionen von w sein sollen von der Art, dass an der freien Oberfläche der absolute Betrag von ζ_0 gleich 1 und v reell ist, so dass v an der freien Oberfläche gleich dem absoluten Betrage der Geschwindigkeit ist.

Zwischen den Coordinaten (x, y), ζ und w besteht aber, wenn $z = x+iy$ gesetzt wird, die Gleichung $\zeta = dz/dw$, so dass wir erhalten $z = \int \zeta dw$. Längs einer Stromlinie und also auch an der freien Grenze des Strahles ist ψ constant, und wir dürfen dort also setzen

$$x+iy = \int \frac{\xi_0 + i\eta_0}{v} d\varphi$$

oder

$$x = \int \frac{\xi_0}{v}\, d\varphi, \qquad y = \int \frac{y_0}{v}\, d\varphi.$$

An der freien Grenze besteht aber eine Gleichung von der Form $v^2 = 2\alpha x + \beta$ oder, differentiirt,

$$2v\,dv = 2\alpha\, dx = 2\alpha \frac{\xi_0}{v}\, d\varphi,$$

woraus dann weiter folgt

$$v^3 = \frac{\alpha}{3} \int \xi_0\, d\varphi.$$

Aus diesem für den Rand gültigen Ausdruck, in welchem sich v als Function von φ darstellt, hat man nun φ durch w zu ersetzen, um den allgemeinen Wert zu erhalten. Auf diese Weise kann man von einer Flüssigkeitsbewegung, bei welcher die Schwere keine Rolle spielt, und bei welcher die reciproke Geschwindigkeit gleich ζ_0 ist, zu einer anderen Bewegung übergehen, bei der die Schwere eine Rolle spielt.

Als Beispiel für die allgemeinen Betrachtungen wird der Fall

$$\zeta = e^{w} + \sqrt{e^{2w} - 1}$$

vollständig durchgeführt. F. K.

R. F. Gwyther. On a general method of determining the form of the velocity - potential of fluid motion in two dimensions across a channel with straight sides. Manchester Mem. **42**, No. 8, 1 - 6.

B. Hopkinson. On discontinuous fluid motions involving sources and vortices. Lond. M. S. Proc. **29**, 142-164.

Die Theorie der wirbelfreien zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegungen, bei welchen die festen Teile der Begrenzung geradlinig sind, während an den freien Teilen constanter Druck herrscht, darf im grossen und ganzen als abgeschlossen betrachtet werden, falls man sich auf den Fall beschränkt, dass sich im Innern der Flüssigkeit keine Quellen oder andere Singularitäten befinden. Der Verf. dehnt die Theorie hier auf den allgemeineren Fall aus, dass solche Unregelmässigkeiten wirklich vorhanden sind. Die Function, welche den Logarithmus der complexen Grösse $u + iv$ auf der Halbebene abbildet, erfährt hier eine Erweiterung gegen den einfacheren Fall, welche Verf. genau untersucht. An drei völlig durchgeführten Beispielen wird das Vorgetragene erläutert. Im ersten Beispiel besteht die feste Grenze aus einer starren Wand und die Singularität aus einem Wirbel, um welchen die Circulation gleich $2m\pi$, während die freie Geschwindigkeit gleich 1 ist. Im zweiten Falle wird die Bewegung durch einen Wirbel und eine Doppelstelle (doublet) an demselben Punkte hervorgebracht. Die Begrenzung besteht aus einer freien Stromlinie. Das dritte Beispiel ist ähnlich.

Es sei dem Referenten eine litterarische Bemerkung gestattet. Die Abhandlung beginnt mit den Worten: „The theory of fluid motion in two dimensions, where the boundary consists partly of straight walls and partly of free streamlines over which the pressure is constant, has been investigated in a general manner by Mr. Love“, und es wird dann in dem ganzen Verlauf der Abhandlung kein anderer Autor citirt. Demgegenüber kann nicht nachdrücklich genug hervorgehoben werden, dass wir den Kern und die Grundlage der Theorie (die conforme Abbildung der drei Gebiete $\varphi+i\psi$, $u+iv$, $x+iy$) unseren grossen Physikern Helmholtz und Kirchhoff verdanken, und dass die an sich gewiss recht anerkennenswerte Arbeit von Love eine mathematische Durchführung und Ausnutzung dieser Grundidee darstellt. F. K.

H. F. Baker. Abelian functions in connexion with two-dimensional fluid motion. Cambr. Proc. **9**, 384-393.

Die Bestimmung der Stromfunction in einer reellen Halbebene, von welcher gewisse kreisförmige Gebiete ausgeschlossen sind, ist bekannt. Die Untersuchung hat mathematisches Interesse. F. K.

G. H. Knibbs. On the steady flow of water in uniform pipes and channels. Proc. Roy. Soc. N. S. Wales **31**, 314-355 (1897).

Die Formeln für die Durchflussgeschwindigkeit bei Röhren und Kanälen werden einer eingehenden Prüfung unterzogen. Nach kurzer Behandlung der stetigen geradlinigen Bewegung in Röhren, bezüglich deren auf die früheren Abhandlungen des Verf. zu verweisen ist, geht er über zur Instabilität dieser Bewegung und wird so naturgemäss auf O. Reynolds' kritische Geschwindigkeit geführt. Hagen's und später Boussinesq's Untersuchungen über die nicht geradlinige Strömung werden mitgeteilt und dann die verschiedenen Geschwindigkeitsformeln einer kritischen Besprechung unterzogen.

In einzelnen Paragraphen werden dann die Formeln einer experimentellen Bestätigung unterworfen. F. K.

H. S. Hele-Shaw. Experimental investigation of the motion of a thin film of viscous fluid. Brit. Ass. Rep. 1898, 136-142.

Sir G. G. Stokes. Mathematical proof of the identity of the stream lines obtained by means of a viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions. Brit. Ass. Rep. 1898, 143-144.

Der erste Artikel enthält einen Bericht über sehr interessante Versuche bezüglich der Bewegung einer dünnen Schicht einer viscosen Flüssigkeit, und man bekommt eine gute Einsicht in viele Fälle, die meistenteils für die mathematische Behandlung zu verwickelt sind. In dem zweiten

Artikel wird gezeigt, dass unter gewissen Bedingungen, namentlich wenn die Flüssigkeitsbewegung regelmässig ist und die Wirkungen der Trägheit verschwinden, während die Viscosität alles beherrscht, die Stromlinien identisch sind mit den theoretischen Stromlinien, die zu der stationären Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit gehören, welche hinter einem unendlich langen Stabe fliesst, von dem ein Querschnitt durch das Hindernis zwischen den die viscose Flüssigkeit begrenzenden parallelen Wänden dargestellt wird. Gbs. (Lp.)

H. S. Hele-Shaw. The flow of water. Nature **58**, 467-468.

O. Reynolds, H. S. Hele-Shaw. Flow of water shown by colour-bands. Nature **58**, 467-468, 520.

Obschon der Gegenstand der Mitteilungen experimenteller Art ist, verdient der Artikel doch wegen der Methode, die Stromlinien des Wassers sichtbar zu machen, auch die Beachtung der Theoretiker. Lp.

Touche. Sur la résistance des fluides à une sphère. S. M. F. Bull. **26**, 86-89.

In früheren Untersuchungen hatte der Verf. für den Fall einer kreisförmigen Scheibe zur Bestimmung der Trajectorien und ihrer Orthogonalcurven ein graphisches Verfahren angegeben, welches auf der eigentümlichen Form beruht, auf welche der Verf. die hydrodynamischen Gleichungen gebracht hat. Vermittelst eines gewissen Inversionsverfahrens kann der Verf. von der Scheibe zur Kugel übergehen. (Vergl. „Sur les figures inverses“ in S. M. F. Bull. **26**, 3-5; Bericht S. 461 dieses Bandes). Verf. hat auf Grund dieser Betrachtungen eine Zeichnung von den Stromlinien und ihren Orthogonalcurven entworfen und giebt eine Discussion derselben. Im Anschluss hieran erörtert er die Druckverhältnisse an der Oberfläche der Kugel. F. K.

A. G. Greenhill. The motion of a solid in infinite liquid under no forces. American J. **20**, 1-75.

Die Darstellung der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit ist der erste Zweck der vorliegenden Abhandlung. Dann werden die pseudoelliptischen Fälle untersucht, bei denen eine gewisse Constante einen Wert von der Form $\omega_1 + 2\omega_3/n$ oder $2\omega_3/n$ hat. Leider gestattet die Rechnung mit ihren 577 Formeln keine auszügliche Wiedergabe, und so müssen wir uns auf diese kurze Inhaltsangabe der wertvollen Arbeit beschränken (vergl. F. d. M. **28**, 690, 1897). F. K.

Ol. Olsson. Generalisation af problemet om fasta kroppars planrörelse i vätskor. Stockh. Öfv. **54**, 353-370 (1897).

Die fundamentalen Abhandlungen „Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit“ von Kirchhoff (J. für Math. **71**,

237-262; F. d. M. **2**, 731, 1870) und „Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit“ von Clebsch (Math. Ann. **3**, 238-262; F. d. M. **2**, 733, 1870) haben den Weg für die allgemeine Behandlung des Problems gewiesen. Man vergleiche hierzu das Selbstreferat von Clebsch im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **2**, 733, 1870. Der Verf. hat den von Thomson und Tait in dem Handbuch der theoretischen Physik zuerst behandelten, vollständig integrablen Fall, bei welchem der Körper ein Rotationskörper ist, dessen Axe sich in einer festen Ebene bewegt, schon öfter zu verallgemeinern gesucht, zuerst in der Abhandlung: „Om fasta kroppars rörelse i vätskor“ (Upsala universitets Årsskrift 1890), sodann in der Arbeit: „Beiträge zur Lehre von der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit“ (Upsala Acta (3) **15**; Fortschr. der Physik **48**$_1$, 291, 1892). In Anknüpfung an diesen letzteren Aufsatz beweist Olsson jetzt, dass, falls auch die Bewegung der Axe nicht mehr in einer Ebene stattfindet, wenn nur die Resultante der Translationen in einer Ebene liegt, welche sich mit dem festen Körper bewegt, die Differentialgleichungen eine in elliptischen Functionen ausdrückbare Lösung besitzen. Lp.

S. Sircom. Question 11822. Ed. Times **69**, 75-77.

Die vom Verf. gestellte und a. a. O. gelöste Aufgabe lautet: Die Stromfunction für einen Cylinder zu finden, dessen senkrechter Querschnitt die Gleichung hat $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2-y^2)$, und der sich längs der x-Axe in einer unendlichen Flüssigkeit bei Abwesenheit einwirkender Kräfte bewegt. Ebenso für den Cylinder $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-3y^2)$, der sich längs der x-Axe bewegt. Eine Tafel mit den eingezeichneten Stromlinien erläutert die analytisch gefundene Lösung. Lp.

J. H. Michell. The wave resistance of a ship. Phil. Mag. (5) **45**, 106-123.

Den Gegenstand der Abhandlung bildet die Aufgabe, die Wellenbewegung und den damit verbundenen Widerstand zu bestimmen, welche ein in gleichmässiger Bewegung befindliches Schiff hervorruft.

Habe ich den Autor recht verstanden, so setzt er für das Potential der relativen Geschwindigkeit des Wassers gegen das Schiff, welches selbst mit der Geschwindigkeit v in positiver Richtung der x-Axe fortschreitet, den Ausdruck $-vx+\varphi$ und setzt dann in der Druckformel $p/\varrho+\frac{1}{2}q^2-g\zeta = \text{Const.}$ für q^2 den Wert

$$\left(-v+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Nach meiner Ansicht müsste aber für q^2 das Quadrat der absoluten Geschwindigkeit

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

genommen werden. Ich kann deshalb die Folgerungen nicht als richtig anerkennen. F. K.

V. Bjerknes. Ueber die Bildung von Circulationsbewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Christiania Vid. Selsk. Skr. 1898, Nr. 5, 29 S.

Verf. behandelt die Wirbelbewegung der Flüssigkeiten hier im Gegensatz zu früheren Untersuchnngen unter der allgemeinen Voraussetzung, dass die Dichtigkeit nicht allein vom Drucke abhängt, sondern auch durch andere, von Ort zu Ort sich ändernde Umstände bedingt ist. Ferner kommt nicht nur die Geschwindigkeit und ihr Wirbel, sondern auch das Moment, d. h. der mit der Dichtigkeit multiplicirte Geschwindigkeitsvector und sein Wirbel zur Sprache. Zum Schlusse werden die Unterschiede beider dahin zusammengefasst, dass das Moment in dem ersten Augenblicke der Bewegung stets ein Potential hat, während das bei der Geschwindigkeit im allgemeinen nicht der Fall ist. In den letzten Paragraphen wird auf die Bedeutung der vorgetragenen Lehren für Meteorologie und Oceanographie hingewiesen. F. K.

V. Bjerknes. Ueber einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung, besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeers. Stockholm Handl. **31**, Nr. 4, 35 S.

Verf. giebt zunächst eine Wiederholung der von ihm gewonnenen und in der vorerwähnten Abhandlung mitgeteilten Sätze und alsdann Anwendungen derselben in der durch den Titel gekennzeichneten Richtung. Als erstes Beispiel der Anwendung wird die Erzeugung der Wirbel durch die Beschleunigung der Schwere und Erwärmung behandelt. Dann werden die Gleitungswinkel an der Grenzfläche von Flüssigkeitsschichten verschiedener Dichte besprochen. Weiterhin gelangt die Bewegung der Luft in einem Schornstein und das Wirbeln austretenden Rauches und Dampfes zur Besprechung. Nach diesen Auseinandersetzungen kommt Verf. zu den meteorologischen und hydographischen Anwendungen. Die Betrachtung der täglichen und jährlichen Bewegungen der isosteren Flächen und die dabei in die Erscheinung kommenden Unregelmässigkeiten führen ihn zur Erklärung einer ganzen Reihe meteorologischer Erscheinungen: Passate, Monsune, Cyklone, Anticyklone u. s. w. F. K.

W. F. Sedgwick. On the oscillations of a heterogeneous compressible liquid sphere and the genesis of the moon; and on the figure of the moon. Messenger (2) **27**, 159-173.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil (S. 159-171) handelt von den Schwingungen einer nicht homogenen zusammendrückbaren flüssigen Kugel und der Entstehung des Mondes, der zweite

(S. 171-173) von der Gestalt des Mondes. Indem der Verf. die Ergebnisse der neueren Arbeiten über den Zusammenhang zwischen der Umlaufszeit des Mondes und der Dauer einer Umdrehung der Erde um ihre Axe kurz zusammenstellt (Darwin, Phil. Trans. 1879, 1880, 1881. — Love, Phil. Mag. **27**, 255, 1889), meint er, es sei interessant, gemäss einer Anregung von Darwin bezüglich der Entstehung des Mondes die Schwingungsperiode einer nicht rotirenden und nicht homogenen flüssigen Kugel zu untersuchen. Nach einem Vorschlag von Darwin wird als Gesetz für die Dichtigkeit an einer beliebigen Stelle der Erde $\varrho = C/r$ angenommen und als Methode die der kleinen Bewegungen nach Sir W. Thomson, Mathematical and physical papers **3**, 384-386, gewählt. Die Rechnung ergiebt als einzigen brauchbaren Wert $1^h\,22^m\,21^{sec}$, etwa die Hälfte der von Darwin gefundenen Dauer von $2\frac{3}{4}$ Stunden für die ursprüngliche Rotationsperiode des Systems Erde-Mond; dieses Resultat wird als eine Stütze der zu Grunde gelegten Hypothesen betrachtet. — Der zweite Teil erörtert die Werte der Trägheitsmomente des Mondes nach diesen neueren Hypothesen, zufolge deren der Mond beim Erstarren noch fast in Berührung mit der Erde war, während Laplace bei seiner Berechnung die Erstarrung des Mondes erst in seiner heutigen Entfernung annahm. Lp.

W. McF. Orr. On the forced precession and nutations of a rotating ellipsoidal shell containing liquid. Phil. Mag. (5) **46**, 545-553.

„Der Zweck der folgenden Analyse ist vornehmlich die Bestimmung des Unterschiedes zwischen der Präcession und der Nutation eines rotirenden Körpers, der, wie die Erde, äusseren Kräftepaaren unterworfen ist, wie diejenigen, welche auf die Erde unter den Annahmen einwirken, dass sie völlig starr und dass sie ein mit Flüssigkeit angefüllter Hohlkörper ist. Die Flüssigkeit wird homogen, incompressibel und reibungslos angenommen, die Kruste des Hohlkörpers starr, ihre innere und äussere Begrenzungsfläche als Rotationsflächen um eine gemeinsame Axe. Zufolge dieser Voraussetzungen ist die Tragweite der erhaltenen Resultate bezüglich der Frage nach der inneren Beschaffenheit, ob flüssig oder fest, wahrscheinlich gering. Schon vor längerer Zeit sind Resultate für das hier zu erörternde Problem von Lord Kelvin angegeben worden (Brit. Ass. Rep. 1876 u. a. O.), aber ohne irgend eine Andeutung der Analyse, durch welche er sie erlangt hat. Es wird sich zeigen, dass, während die hier für die Präcession und die neunzehnjährige Nutation gewonnenen Ergebnisse mit denen von Lord Kelvin sehr gut übereinstimmen, diejenigen für die halbjährliche und die vierzehntägige Nutation abweichen. Die Methode, welche zur Ermittelung der Bewegung der Schale und des Inhaltes benutzt ist, rührt von Greenhill her (Proc. Cambr. Phil. Soc. **4**) und ist bereits auf die Erörterung der freien Oscillationen eines solchen Systems von Hough (Phil. Trans. 1895) zur Erläuterung der freien Nutationen der Erde angewandt worden.“ Lp.

V. Volterra. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta Math. **22**, 201-296.

In der vorliegenden Arbeit giebt der Verf. eine zusammenhängende Darstellung von Resultaten, welche in einer Reihe von Noten und Abhandlungen aus dem Jahre 1895 niedergelegt sind. Gegenstand der Untersuchung ist die Wanderung der Erdpole. Der Verf. studirt insbesondere diejenigen cyklischen Bewegungen, welche zwar weder die Trägheitsaxen, noch die Trägheitsmomente der Erde, noch auch die Massenverteilung auf der Erdoberfläche zu ändern, aber gleichwohl einen bedeutenden Einfluss auf die Polwanderung auszuüben vermögen. Zu diesen im Hertz'schen Sinn verborgenen Bewegungen gehören u. a. die constanten Meeresströme, die Luftströme, der andauernde Abfluss der Ströme zum Meer, die Verdampfung des Wassers und die nachfolgende Verdichtung des Wasserdampfes im Gebirge, Bewegungen, welche keine sichtbaren Veränderungen in der Massenverteilung oder in der Gestalt der Erde hervorbringen und sich sogar in erster Annäherung als stationär betrachten lassen.

Dem Studium der genannten Bewegungen sind die fünf ersten Kapitel gewidmet. Im sechsten Kapitel beschäftigt sich der Verf. mit denjenigen Bewegungen, welche die Gestalt und Constitution der Erde offensichtlich beeinflussen. Hiermit ist der neue und eigenartige Gesichtspunkt gekennzeichnet, von welchem aus der Verf. das Problem der Polwanderung behandeln will.

Die vorliegende Arbeit besitzt ausser einem astronomischen ein hohes mathematisches Interesse. Der Verf. stellt sich nämlich das folgende Problem: „Im Innern eines Systems, das sich um einen festen Punkt dreht und seiner Trägheit überlassen wird, finden beliebige cyklische Drehungen um Axen statt. Es ist die Bewegung dieses Systems zu bestimmen.“ Verf. findet, dass sich die Rotationscomponenten sowie die Richtungscosinus zwischen den beweglichen und festen Axen durch Thetafunctionen eines Arguments, welches linear von der Zeit abhängt, ausdrücken lassen. Durch dieses Resultat ist das Gebiet der mechanischen Probleme, welche auf Jacobi'sche Thetafunctionen führen, um ein bedeutendes erweitert.

Hierzu möchte Ref. Folgendes bemerken. Schon im Jahre 1889 hat Wangerin ein Problem behandelt, das nur scheinbar specieller als das erwähnte ist. Während sich aber Wangerin begnügt, das Problem auf Quadraturen zurückzuführen, gelingt es dem Verf., die drei Rotationscomponenten nach den beweglichen Axen und drei der neun Richtungscosinus in definitiver Form mittels der Sigmafunctionen auszudrücken, d. h. in Form von Brüchen, deren Zähler und gemeinsamer Nenner viergliedrige Summen darstellen. Dagegen ist es dem Verf. nicht gelungen, die Ausdrücke der sechs anderen Richtungscosinus und der drei Rotationscomponenten nach den festen Axen in die definitive Form zu bringen, wie sie sich in den von F. Kötter entdeckten allgemeinen Jacobi'schen Formeln offenbart. Die vom Verf. aufgestellten Ausdrücke

haben die Form von Brüchen, deren Zähler und Nenner viergliedrige Producte darstellen. Diese Lücke ist vom Ref. im Journ. de Math. (5) **5**, 155-174, 1899 ausgefüllt worden. Daselbst ist auch gezeigt, wie der Begriff der oben charakterisirten definitiven Form in den Eigenschaften des allgemeinen Orthogonalsystems im Caspary'schen Sinne tief begründet ist. Hiernach erweisen sich die Formeln, durch welche Jacobi in dem Euler'schen Fall des Rotationsproblems die Bestimmungsstücke der Bewegung dargestellt hat, als ein specieller Fall der Formeln des Volterra-Waugerin'schen Problems.

Das fünfte Kapitel enthält Anwendungen der vorhergehenden Untersuchungen auf die Bewegung der Erde. Der Verf. untersucht, welche inneren cyklischen Bewegungen imstande sein würden, die von Chandler entdeckte harmonische Polbewegung, deren Periode ungefähr 430 Tage beträgt, hervorzurufen, und teilt hierüber mehrere allgemeine Theoreme mit. Jhk.

F. v. Wrangell. Ueber eine in oceanographischen Werken vorkommende falsche Formel. Wiedemann Ann. **65**, 238-240.

In unbegrenztem Wasser besteht zwischen der Geschwindigkeit v, der Tiefe x und der Zeit t, wenn an der Oberfläche die constante Geschwindigkeit v_0 herrscht und $\alpha = 2\sqrt{\mu t/k}$ gesetzt wird, nach Zöppritz die Formel:

$$v = v_0\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\alpha}} e^{-z^2}dz\right],$$

so dass sich die Zeiten, in welchen dieselben Geschwindigkeiten erreicht werden, wie die Quadrate der Tiefen verhalten. Für ein bestimmtes Verhältnis $1/n = v/v_0$ erhält man hieraus eine Formel von der Gestalt $\sqrt{t} = Cx$. P. Hoffmann giebt nun in seiner Mechanik der Meeresströmungen die Formel $\sqrt{t} = 1736x/n$, welche mit der obigen Formel nicht übereinstimmt und daher auch Zöppritz nicht zugeschrieben werden kann. F. K.

S. S. Hough. On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Part II. On the general integration of Laplace's dynamical equations. Lond. Phil. Trans. A **191**, 139—185.

Die Integration führt auf einem ziemlich complicirten Wege zu Reihenentwickelungen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten, aber vollständige Lösungen darstellen. Der Aufbau der Arbeit ist, da der Verf. die Resultate bereits auf einem andern Wege gefunden hatte, völlig synthetisch. Es wird zuerst die Lösung für den Fall einer gleichmässigen Meerestiefe mitgeteilt, die ausser der gewöhnlichen Flutwelle noch eine zweite ergiebt. Dann wird angegeben, wie die Variation der Meerestiefe

und wie äussere störende Kräfte berücksichtigt werden können. Alle theoretisch errechneten Resultate werden durch numerische Beispiele illustrirt. Br.

A. A. MICHELSON and S. W. STRATTON. A new harmonic analyser. Phil. Mag. (5) **45,** 85—91; Am. J. of science (4) **5,** 1—13.

Beschreibung eines Instrumentes, das auf mechanischem Wege die zu einer gegebenen Curve gehörigen Coefficienten der Fourier'schen Reihenentwickelung (bis zum zwanzigsten Glied) ermittelt oder auch die einzelnen Glieder einer solchen Entwicklung mechanisch summirt.

Br.

E. J. HOUSTON und A. E. KENNELLY. Ueber eine einfache Methode, näherungsweise die harmonischen Componenten einer gegebenen Wellenlinie zu bestimmen. Elektrotechn. Zeitschr. **19,** 714-715, 795-796. Uebersetzt aus El. World **31,** 580.

Die von den Verf. gewählte Methode benutzt graphische Hülfsmittel, indem die auszuführenden Integrationen durch mechanische Quadraturen primitivster Art ersetzt werden. Die zu Grunde liegenden Sätze, die nur an Beispielen verificirt werden, sind die folgenden: Es seien p und w zwei teilerfremde ungerade Zahlen. Man teile w auf einander folgende halbe Wellenlängen der Sinuslinie $y = a\sin(x/b)$ durch $p+1$ Ordinaten in p gleich breite Streifen, so ist, wenn p von w verschieden ist, die Summe s_1 der Flächenstücke in den ungeraden Abschnitten gleich der Summe s_2 der Flächenstücke in den geraden Abschnitten, also $s_1 - s_2 = 0$. Falls aber $p = w$ ist, so ist $s_1 - s_2 = p.F$, wenn F den Flächeninhalt zwischen der x-Axe und der Curve von 0 bis πb bezeichnet ($F = 2ab$).

Liegt nun eine Curve von der Wellenlänge $2L$ gezeichnet vor, deren Gleichung

$$y = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3 \sin 5x + \cdots$$
$$+ B_1 \cos x + B_2 \cos 3x + B_3 \cos 5x + \cdots$$

sein möge, so teile man zur Bestimmung von A_n das Intervall der halben Wellenlänge L, vom Nullpunkte beginnend, in n gleiche Teile und bestimme die Differenz S aus den Summen der ungeraden und der geraden Flächenstücke, so ist $A_n = \pi S/L$. Bei der Bestimmung von B_n hat man eine Strecke $L/2n$, vom Nullpunkte aus gerechnet, zu beginnen, sonst aber ebenso zu verfahren. Bei der Auswertung der Flächen soll in erster Annäherung die Abzählung der Quadrate von Millimeterpapier genügen, was durch einige Beispiele belegt wird (sehr verwandt mit der Methode von L. Hermann, vergl. das folgende Referat). Lp.

G. Weiss. Analyse d'une courbe périodique par le procédé de Ludimar Hermann. Journ. de Phys. (3) **7**, 141-144.

Auseinandersetzung der von L. Hermann erdachten Methode (Pflüger's Archiv **47**; Fortschr. der Physik 46_1, 513ff., 1890). Lp.

T. Cl. Fidler. Calculations in hydraulic engineering. Part I. London: Longmans, Green, and Co. XII + 155 S.

So weit jemand, der nicht Ingenieur ist, die Sache beurteilen kann, ist dieses Werk in seiner Art vortrefflich. Die Gattung der hier erläuterten und durchgeführten Rechnungen könnte sehr gut in dem gewöhnlichen Lehrgange der Mathematik eine hervorragende Stelle erhalten und den Platz mancher Aufgaben in Gestalt von Fallthüren einnehmen, von denen unsere Lehrbücher wimmeln. Uebungsaufgaben sind darum noch nicht notwendig gut, dass sie keinen Bezug auf die Probleme des praktischen Lebens haben. Gbs. (Lp.)

N. Joukowsky. Ueber die Luftschiffahrt. Moskau Phys. Sect. **9**, Lieferung 2, 23-29. (Russisch.)

Dieser Artikel enthält eine Rede des Autors, gehalten auf dem X. Congress der Naturforscher und Aerzte in Kiew, 1898. Jk.

Weitere Litteratur.

A. Averone. Ricerche idrauliche. Formole empiriche con coefficienti costanti pel calcolo delle portate degli orifizi chiusi e degli stramazzi; fenomeni del efflusso dei liquidi etc. Mantova. V + 89 S.

J. Benetti. Formole fondamentali di applicazione generale per le turbine motrici e per le pompe centrifughe elevanti. Bologna Mem. (5) **7**, 521-540.

S. H. Burbury. On the general theory of stationary motion in an infinite system of molecules. Lond. M. S. Proc. **29**, 225-248.

R. de Saussure. Cinématique des fluides. 1° Note: Mouvement d'un fluide dans un plan. Arch. sc. phys. (4) **5**, 497-519.

F. Tonkovitch. Di un problema che può presentarsi nella prova idraulica delle condotte metalliche. Torino: Camilla e Bertolero. 8 S. Auszug aus L'Ingegneria civile e le arti industriali. **24**. Vi.

Wilh. Müller. Die eisernen Wasserräder. Berechnung, Construction und Bestimmung ihres Wirkungsgrades. Mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis, Uebersichten der Grössenverhältnisse und Gewichte, sowie Mitteilungen über Leistungsversuche. Für Ingenieure, Wasserbautechniker und Wasserwerksbesitzer. 2 Teile. Zellenräder und Schaufelräder. Mit zahlreichen Tabellen und Abbildungen im Text.

Leipzig: Veit & Co. VI + 143 und IV + 167 S. Lex.-8°. Mit einem Atlas von 33 Taf.

G. A. Zanon. Velocità ragguagliata e potenza effusoria delle maree in una bocca d'estuario. Applicazioni alla laguna e al porto di Venezia. Ven. Ist. Atti (7) **10,** 147-176.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

A. Tauber. Ueber einige Sätze der Potentialtheorie. Monatsh. f. Math. **9,** 74-88.

1. Um das Potential V eines beliebigen einfach zusammenhängenden Raumes für einen Punkt dieses Raumes zu bestimmen, ist es nur nötig, irgend eine Function W zu ermitteln, welche innerhalb jenes Raumes der Gleichung $\Delta W = -4\pi k$ genügt (k die Dichtigkeit). Dann folgt aus dem Green'schen Satze:

$$V = W - \frac{1}{4\pi}\iint\left(W\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial N_i} - \frac{1}{E}\frac{\partial W}{\partial N_i}\right)d\omega,$$

wobei die Integration rechts über die Oberfläche des in Rede stehenden Raumes zu erstrecken ist. Als Beispiel wird das Potential eines verlängerten Rotationsellipsoids berechnet, falls k eine ganze rationale Function der Coordinaten ist. Am einfachsten nimmt man für W ebenfalls eine ganze rationale Function der Coordinaten.

2. Ein Satz über das Potential einer Doppelbelegung, den der Verf. früher (cf. F. d. M. **28,** 698, 1897) für die Ebene abgeleitet hatte, wird für den Raum bewiesen.

3. Die Differentialquotienten des Potentials W einer Doppelschicht können durch die Differentialquotienten von drei Potentialen L, M, N gewisser einfacher Belegungen so dargestellt werden:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}.$$

4. Die Eigenschaft des Potentials, dass rV, $r^2\frac{\partial V}{\partial x}$ etc., wie gross auch r wird, unter einer endlichen Grenze bleiben, ist eine Folge der übrigen charakteristischen Eigenschaften von V, in Verbindung damit, dass V im Unendlichen verschwindet. Der Beweis wird geführt durch Anwendung des Green'schen Satzes auf den Raum zwischen zwei Kugeln, deren eine die anziehende Masse ganz umschliesst, während der Radius der anderen schiesslich unendlich gross wird. Wn.

P. Paci. Esposizione di due nuovi metodi per determinare l'espressione della densità in ogni punto di un strato ellissoidico equipotenziale. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 131-138.

Für die bekannte Aufgabe, eine Ellipsoidfläche so mit Masse zu belegen, dass sie eine Fläche constanten Potentials ist, wird hier folgende directe Lösung gegeben. Die normale Anziehungscomponente lässt sich für einen Flächenpunkt, indem man das Flächenelement durch ein Element $d\sigma'$ der um den Mittelpunkt beschriebenen Einheitskugel darstellt, so ausdrücken:

$$P_0 = -\int K' \frac{\cos(rn)}{\cos(rn')}\, d\sigma',$$

wo K' die Dichtigkeit ist, n und n' die Normalen des Ellipsoids im angezogenen Punkte, resp. an dem Elemente $d\sigma'$. Ferner ist, wenn $f = 1$ die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{\cos(rn)}{\cos(rn')} = \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}}, \quad \Delta f = \Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2.$$

Andererseits stellt $P_0 + 2\pi K$ die normale Ableitung des Potentials der Fläche für den dem angezogenen Punkte unendlich nahen inneren Punkt dar, und diese Ableitung verschwindet. Das giebt die Gleichung

$$\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}}\, d\sigma' = 2\pi K,$$

und dieser genügt

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}, \quad K = \frac{H}{\sqrt{\Delta f}},$$

wenn H eine Constante darstellt.

Der Verf. fügt noch einen zweiten Beweis hinzu. Er berechnet das Potential der Ellipsoidfläche für einen beliebigen Punkt einer ganz im Innern des Ellipsoids liegenden concentrischen Kugel vom Radius ϱ, indem er die reciproke Entfernung nach Kugelfunctionen entwickelt. Zugleich nimmt er

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}$$

an und drückt das Flächenelement des Ellipsoids, wie oben, durch das Element $d\sigma'$ der Einheitskugel aus, so ergiebt sich:

$$V = \tfrac{1}{2} H \sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{\,n-2}}\, d\sigma',$$

wobei ϱ' den Radius des Ellipsoids vom Mittelpunkte bezeichnet, ω, wie üblich, den Winkel zwischen dem Radius des angezogenen Punktes und dem von $d\sigma'$. Kann man noch nachweisen, dass alle Integrale der

rechten Seite von V verschwinden, ausser für $n = 0$, so ist die Richtigkeit der Annahme für K' bewiesen. Dieser Nachweis aber gelingt leicht, wenn man beachtet, dass $1 : \varrho'^{n-2}$ für gerade n eine ganze Function von $\cos\vartheta'$, $\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $\sin\vartheta'\sin\varphi'$ vom Grade $n-2$ ist, also, nach Kugelfunctionen entwickelt, nur solche bis zur Ordnung $n-2$ enthält.

Wn.

W. Dürll. Die Probleme des logarithmischen Potentials für eine von zwei Kreisbogen begrenzte ebene Fläche. Ein Beitrag zur Potentialtheorie. Diss. Leipzig. IV + 134 S. 8°. Mit 2 Tafeln.

Die Arbeit enthält in breiter Ausführung ein sorgfältig durchgeführtes Beispiel zur Theorie des logarithmischen Potentials, nämlich die Bestimmung der Green'schen Function a) für eine von zwei beliebigen Kreisbogen begrenzte endliche Fläche, b) für die ins Unendliche sich erstreckende Fläche, die im Endlichen von zwei Kreisbogen begrenzt wird, nebst Folgerungen daraus. Die Grundlage der Betrachtung bilden die bekannten dipolaren Coordinaten ϑ, λ, die mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x = \frac{2a\sin\vartheta}{\psi},\quad y = -\frac{2ia\sin(i\lambda)}{\psi},$$
$$\psi = 2\cos(i\lambda) - 2\cos\vartheta,$$

wobei λ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, ϑ zwischen 0 und 2π variirt. Die Grenzen der in Rede stehenden Fläche bilden zwei Kreise, für die ϑ constant ist, $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$. Im Falle a) ist für einen im Innern der Fläche gelegenen Punkt $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_1$, während im Falle b) $\vartheta_1 < \vartheta < 2\pi + \vartheta_0$ ist; hier muss nämlich, damit ϑ beim Durchgang des Punktes durch das Unendliche sich nicht discontinuirlich ändert, an Stelle des Intervalls $0 \ldots \vartheta_0$ das Intervall $2\pi \ldots 2\pi + \vartheta_0$ genommen werden.

Ist der Winkel ω, den die beiden Kreisbogen einschliessen, ein aliquoter Teil von π, so ergiebt die Betrachtung der auf einander folgenden, zu einem gegebenen Punkte in Bezug auf die sich schneidenden Kreise conjugirten Punkte (die Methode der Spiegelung) unmittelbar das Resultat. Falls aber die Kreise sich unter einem beliebigen Winkel ω schneiden, muss man auf die Laplace'sche Gleichung zurückgehen, deren allgemeine Lösung in Form eines Fourier'schen Integrals angesetzt werden kann:

$$\int_0^\infty \left(A_q e^{q\vartheta} + B_q e^{-q\vartheta}\right)\cos(q\lambda)\,dq + \int_0^\infty \left(C_q e^{q\vartheta} + D_q e^{-q\vartheta}\right)\sin(q\lambda)\,dq.$$

Mittels der bekannten Randbedingung der Green'schen Function an den beiden Kreisen lassen sich A_q, B_q, C_q, D_q leicht bestimmen, und die Green'sche Function ergiebt sich als Summe zweier Doppelintegrale.

Aus dem Resultat wird in beiden Fällen (ω ein aliquoter Teil von π oder ω beliebig) die Dichtigkeit der Green'schen Belegung der Kreis-

bogen bestimmt, ferner die Gesamtmasse dieser Belegung und ihre Verteilung auf die beiden Kreisbogen. Eine besondere Untersuchung ist der Dichtigkeit in den Schnittpunkten beider Kreise gewidmet, und zwar ergiebt sich dieselbe $=0$ für $\omega<\pi$, $=\infty$ für $\omega>\pi$, während sie für $\omega=\pi$ endlich und von Null verschieden ist.

Zum Schluss wird gezeigt, dass die durch die Methode der Spiegelung abgeleiteten Resultate, die eine andere Form haben, als im allgemeinen Falle, identisch sind mit den Ergebnissen, die aus den allgemeinen Formeln für die betreffenden speciellen Fälle folgen. Dieser Nachweis wird für die Fälle $\omega=\pi$, $\omega=\frac{1}{2}\pi$, $\omega=\frac{1}{3}\pi$ durchgeführt, und zwar in Bezug auf die Formeln für die Dichtigkeit. Wn.

L. Königsberger. Ueber die erweiterte Laplace'sche Differentialgleichung für die allgemeine Potentialfunction. Berl. Ber. 1898, 5-18.

L. Königsberger. Ueber die erweiterte Laplace-Poisson'sche Potentialgleichung. Berl. Ber. 1898, 93-101.

Anknüpfend an seine Untersuchungen über die Principien der Mechanik (cf. F. d. M. **27**, 572, 1896; **28**, 611, 1897), legt sich der Verf. die Frage vor, welche Gleichungen für die verallgemeinerte Potentialfunction an Stelle der Laplace'schen, resp. an Stelle der Poisson'schen Gleichung der gewöhnlichen Potentialtheorie treten. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die in der früheren Arbeit eingeführte Kräftefunction W, d. h. eine Function der Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung, für welche der Ausdruck

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial x'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial x^{(\nu)}}\right)$$

und die beiden analogen die nach den drei Coordinatenaxen genommenen Kraftcomponenten liefern. Um eine Verallgemeinerung der Newton'schen Potentialfunction zu erhalten, wird die specielle Annahme gemacht, dass W eine beliebige Function von r, eine ganze Function von r', r'', ..., $r^{(\nu)}$ ist, wo r den Abstand des Punktes x, y, z von einem festen Punkte, r', r'', ..., $r^{(\nu)}$ die Ableitungen von r nach der Zeit bezeichnen. [Unter welchen Bedingungen zugleich die Kraft eine Function von r, r', r'', ..., $r^{(2\nu)}$ wird, ist in der früheren Arbeit erörtert.] Für diese Function W gilt nun der folgende Satz: Nennt man höchstes Glied von W denjenigen Posten

$$A r^{(\nu)^{\alpha_\nu}} r^{(\nu-1)^{\alpha_{\nu-1}}} r^{(\nu-2)^{\alpha_{\nu-2}}}\cdots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\varphi(r),$$

welcher die Eigenschaft hat, dass $r^{(\nu)^{\alpha_\nu}}$ die höchste in W vorkommende Potenz von $r^{(\nu)}$ ist, $r^{(\nu-1)^{\alpha_{\nu-1}}}$ die höchste Potenz von $r^{(\nu-1)}$, die mit $r^{(\nu)^{\alpha_\nu}}$ verbunden vorkommt, u. s. w., so ist:

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta_{00}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{21}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\cdots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu} W \\ \qquad = A\alpha_\nu!\,\alpha_{\nu-1}!\ldots\alpha_2!\,\alpha_1! \\ \qquad \times\left\{\frac{\partial^{2+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{2+\varepsilon_1}}+\varepsilon_1\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^{1+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{1+\varepsilon_1}}\right\}. \end{cases}$$

Darin bezeichnen $\Delta_{\nu\nu}$, $\Delta_{\nu\nu-1}$ die Operationen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{(\nu)2}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{(\nu)2}}+\frac{\partial^2}{\partial z^{(\nu)2}},$$

resp.
$$\frac{\partial^2}{\partial x^{(\nu)}\partial x^{(\nu-1)}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{(\nu)}\partial y^{(\nu-1)}}+\frac{\partial^2}{\partial z^{(\nu)}\partial z^{(\nu-1)}},$$

die Indices k, ε bezeichnen die k-, resp. ε-fache Iteration dieser Operationen; endlich ist

$$\alpha_\nu = 2k_\nu+\varepsilon_\nu,\ \alpha_{\nu-1}-\varepsilon_\nu = 2k_{\nu-1}+\varepsilon_{\nu-1},\ \ldots,\ \alpha_1-\varepsilon_2 = 2k_1+\varepsilon_1.$$

Soll die rechte Seite von (1) verschwinden, so muss, je nachdem $\varepsilon_1 = 0$ oder $\varepsilon_1 = 1$ ist,

$$(2)\qquad \varphi(r) = \frac{c}{r}+c_1 \quad \text{oder} \quad \varphi(r) = \frac{c}{r^2}+c_1 r+c_2$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist W die verallgemeinerte Potentialfunction, Gleichung (1) die verallgemeinerte Laplace'sche Gleichung.

Für $\nu = 1$ hat W eine der beiden Formen:

$$(3)\quad W = \varphi_0(r)+\varphi_1(r).r'+\varphi_2(r).r'^2+\cdots+\varphi_{2k-1}(r).r'^{2k-1} + \left(\frac{c}{r}+c_1\right).r'^{2k}$$

oder

$$(3^a)\quad W = \varphi_0(r)+\varphi_1(r).r'+\varphi_2(r).r'^2+\cdots+\varphi_{2k}(r).r'^{2k} + \left(\frac{c}{r^2}+c_1 r+c_2\right).r'^{2k+1},$$

worin $\varphi_0(r)$, $\varphi_1(r)$, …, $\varphi_{2k}(r)$ willkürliche Functionen von r sind, und die entsprechende erweiterte Laplace'sche Gleichung lautet, je nachdem W die erste oder zweite Form hat:

$$\Delta_{00}\Delta_{11}^k W = 0, \quad \text{resp.} \quad \Delta_{00}\Delta_{10}\Delta_{11}^k W = 0.$$

Die Kräftefunction des Weber'schen Gesetzes

$$(4)\qquad W = \frac{m}{r}\left(1+\frac{r'^2}{c^2}\right)$$

gehört der ersten dieser Formen an.

Bei der Ableitung der Poisson'schen Gleichung für die verallgemeinerte Potentialfunction beschränkt sich der Verf. auf das Weber'sche Gesetz, also auf die Kräftefunction (4). Er berechnet nach bekannter Methode das Potential einer in concentrischen Schichten homogenen und in ihren Massenelementen nach dem genannten Gesetze wirkenden Hohlkugel auf einen ausserhalb oder innerhalb gelegenen

Punkt. Hat der Punkt die Entfernung l vom Mittelpunkte der Kugel, besitzt derselbe die Geschwindigkeit v, und ist l' die Projection von v auf die Richtung von l, so wird

$$W_a = \frac{M}{l}\left(1+\frac{l'^2}{c^2}\right) - \frac{4\pi}{3c^2}\,\frac{3l'^2-v^2}{l^3}\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho^4 d\varrho,$$

$$W_i = 4\pi\left(1+\frac{v^2}{3c^2}\right)\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho,$$

wobei σ die Dichtigkeit ist. Daraus folgt für das Potential einer homogenen Vollkugel in Bezug auf einen Punkt der Masse:

$$W_m = 2\pi\sigma(R^2-\tfrac{1}{3}l^2) + \frac{8\pi\sigma}{15c^2}l^2 l'^2 + \frac{2\pi\sigma}{3c^2}R^2v^2 - \frac{2\pi\sigma}{5c^2}l^2v^2,$$

woraus sich unmittelbar als verallgemeinerte Poisson'sche Gleichung

$$\varDelta_{00}\varDelta_{11}W = -\frac{8\pi}{c^2}\sigma$$

ergiebt.

Im Anfang der ersten Abhandlung wird noch Folgendes ausgeführt. Ist V die Kräftefunction einer gewöhnlichen Centralkraft, und soll für eine endliche oder unendliche Anzahl von Centren der Ausdruck $\varDelta V$ nicht mehr von den einzelnen Entfernungen abhängen, so muss

$$V = c_1\frac{e^{ar}}{r} + c_2\frac{e^{-ar}}{r}$$

sein. Zugleich wird $\varDelta V = a^2 V$. — Weiter wird gefragt, ob es (ausser Functionen von r) noch andere Functionen R von x, y, z giebt, für welche $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2$, sowie $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$ reine Functionen von R sind. Es findet das statt, wenn

$$R = F(x+ay+bz+c)$$

ist, wo a, b, c willkürliche Constanten sind. Dass die genannten Functionen die einzigen von der geforderten Beschaffenheit sind, wird für zwei Variabeln bewiesen. Wn.

W. Dyck. Beiträge zur Potentialtheorie III. Ueber die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Systems von Functionen mehrerer Veränderlicher in einem gegebenen Bereiche und über die Berechnung der Werte einer gegebenen Function in diesem Punkte. Münch. Ber. **28**, 1898, 203-224.

Kronecker ist in seiner Arbeit über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln (Berl. Monatsber. 1869, cf. F. d. M. **2**, 203, 1869/1870) mit Hülfe von Formeln der Potentialtheorie zu einer allgemeinen Darstellung beliebiger Functionen der durch ein Gleichungs-

system definirten Punkte und damit zu einer Verallgemeinerung des sogenannten Cauchy'schen Integrals gelangt. Danach lässt sich die algebraische Summe aller Werte, welche eine gegebene Function $\mathfrak{F}$ von n reellen Variabeln im Innern eines von einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit begrenzten n-dimensionalen Gebiets annimmt an den Nullstellen eines Systems von n Functionen dieser Variabeln, ausdrücken durch ein n-faches, über das Innere, und ein $(n-1)$-faches, über den Rand des Gebiets erstrecktes Integral. Dabei sind aber die Werte der Function $\mathfrak{F}$ an jenen Nullstellen noch versehen je mit dem Vorzeichen der Functionaldeterminante der n Functionen des Systems an eben diesen Stellen.

Diese „Kronecker'sche Transformation der Gauss'schen Formel für die Potentialgleichung" wird in § 1 der vorliegenden Arbeit aufs neue abgeleitet, und daran werden neue Formeln geknüpft, welche die Summe der Werte der Function $\mathfrak{F}$ an den Nullstellen jenes Functionensystems, statt durch eine Summe aus einem n-fachen und einem $(n-1)$-fachen Integral, geben mit Hülfe eines $(n-k)$-fachen und eines $(n-k-1)$-fachen Integrals $(k=0, 1, \dots, n-2)$, endlich eines einfachen Integrals und einer Summe. Dabei sind für jeden Wert von k noch $\binom{n}{k}$ verschiedene Darstellungen möglich. Um zu diesen neuen Formeln zu gelangen, hat man nur, statt, wie Kronecker, von der Betrachtung des Potentials einer n-dimensionalen Masse auszugehen, die Formeln für das Potential einer $(n-k)$-dimensionalen Masse zu Grunde zu legen, welche über einen ebenen, $(n-k)$-dimensionalen Schnitt der ersteren ausgebreitet ist; und nachher sind, wie bei Kronecker, in den Potentialformeln neue Variabeln einzuführen. Uebrigens gehen die gewonnenen Formeln, wenn man $\mathfrak{F} =$ const. setzt, in die im ersten Teile der Beiträge (cf. F. d. M. **26**, 461, 1895) aufgestellten Integrale für die Charakteristik eines Functionensystems über, und die dort gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

Ferner wird gezeigt, wie man sich von dem Vorzeichen der Functionaldeterminante, mit dem die Werte von $\mathfrak{F}$ noch versehen waren, freimachen kann. Man hat nur nötig, falls $F_1, F_2, \dots, F_n$ die Functionen sind, deren Nullstellen in Betracht kommen, Δ_0 ihre Functionaldeterminante, als Dichtigkeitsfunction statt der früheren Function $\mathfrak{F}$ die Function

$$(1) \qquad \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2+\lambda^2\Delta_0^2}} \cdot \mathfrak{F}$$

zu nehmen, wo λ irgend eine Constante ist oder auch eine stetige Function, die an allen Nullstellen positiv ist. Damit hat man die definitiven Formeln für die Bestimmung der Summe der Functionswerte von $\mathfrak{F}$ an den Nullstellen der F_i. Auch die Summe der absoluten Beträge von $\mathfrak{F}$ an diesen Stellen ergiebt sich leicht.

Für den Fall $\mathfrak{F} = 1$ folgen aus den letzten Formeln sofort die von Picard auf einem anderen Wege abgeleiteten Formeln zur Be-

stimmung der Anzahl der Nullstellen des Functionensystems F_i. Andererseits lassen sich die Nullstellen dieses Systems selbst aus den Dyck'schen Integralformeln berechnen, wenn man an Stelle der in (1) auftretenden Function $\mathfrak{F}$ successive verschiedene Potenzen einer der unabhängigen Variabeln z nimmt. Endlich wird noch gezeigt, wie man die Grenzen des n-dimensionalen Gebiets, über welches die Integration zu erstrecken ist, abändern kann. Wn.

S. Zaremba. Sur un théorème de M. Poincaré. C. R. **127**, 215-216.

Der Verf. zeigt, dass ein von Poincaré in seiner Arbeit über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik (F. d. M. **25**, 1526ff., 1893/1894) aufgestellter Satz ganz allgemein gilt, während Poincaré ihn nur für beschränkte Werte einer gewissen Constante bewiesen hatte. Die einzige Bedingung für die Gültigkeit ist, dass von der Grenzfläche des betrachteten Gebiets die Krümmungsradien nie verschwinden.

Wn.

H. v. Zeipel. Ueber das äussere Potential eines heterogenen, in Rotation befindlichen Sphäroids, dessen flüssige Oberfläche im Gleichgewichte ist. Stockh. Bihang **24**, Afd. I, No. 4, 20 S. 8°.

Im ersten Paragraphen wird das fragliche Potential V in der Form ermittelt:

$$V=\frac{M}{r}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[1-\frac{4\omega^2a^3}{9fM}\cdot\frac{n}{2n+3}\cdot\varkappa\right]\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\mu)\right\},$$

wo M die Masse des Sphäroids bedeutet, $x=r\cos\theta$ ist, $\mu=\cos\theta$, a die grosse Halbaxe der Meridianellipse, $b^2(1+\lambda^2)=a^2$, P_{2n} das Legendre'sche Polynom,

$$\varkappa\left\{(1+\tfrac{1}{3}\lambda^2)\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda}-1\right\}=\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

ω die Rotationsgeschwindigkeit, f eine Constante. Die Reihe convergirt, wenn $\lambda a<r\sqrt{1+\lambda^2}$. Im § 2 wird aus dieser Formel der bekannte Satz gefolgert, dass die Oberflächen constanter Dichte im Innern des rotirenden Sphäroids nicht abgeplattete Ellipsoide sein können, ausser in dem Falle eines homogenen Sphäroids. Der § 3 dient zur Herleitung einiger Resultate über die Trägheitsmomente des Sphäroids aus den beiden ersten Gliedern der obigen Reihe. Die scheinbare Schwere am Aequator wird in § 4 aus V gewonnen und des näheren betrachtet, und im § 5 wird in gleicher Weise die Formel für die Beschleunigung der scheinbaren Schwere auf der Oberfläche des Sphäroids bestimmt, zuletzt hieraus die Clairaut'sche Gleichung erhalten. Lp.

J. Schütz. Ein elementares Uebungsbeispiel zur Potentialtheorie. Deutsche Math. Ver. 7_1. 117-119.

Nimmt man an, dass Massen auf unendlichen, unter einander parallelen Ebenen gleichmässig verteilt sind, so ist die Anziehung einer jeden solchen Ebene auf einen Massenpunkt nach dem Newton'schen Gesetze von constanter Intensität und senkrecht zu jenen Ebenen; die Wirkung jener Massen lässt sich also durch punktförmige Massen in einer Normale zu jenen Ebenen ersetzen mit dem Kraftgesetze mr^0. Die Potentialfunction wird dann mr, und man kann diese Function benutzen („lineare Potentialfunction"), um die Theoreme für die Newton'sche und die logarithmische Potentialfunction wiederzufinden, Theoreme, die hier die Form einfacher geometrischer und algebraischer Wahrheiten annehmen, wie an den Haupttheoremen gezeigt wird. Zum Schlusse weist der Verf. auf den von A. Gutzmer aufgestellten, erweiterten Green'schen Satz hin (Remarques sur quelques équations différentielles partielles d'ordre supérieur, Journ. de Math. (4) **6**, 405-422, 1890), der für die lineare Potentialfunction in die Taylor'sche Reihe übergeht (vergl. F. d. M. **22**, 363, 1890). Lp.

G. Holzmüller. Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. Zweiter Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Uebungsbeispielen und einem Anhange über die Masseinheiten. Leipzig: B. G. Teubner. XVII u. 440 S. gr. 8°.

Das Buch bildet den zweiten Teil des Werkes, dessen erster Teil in F. d. M. **28**, 609, 1897 angezeigt wurde. Weil es aber im Grunde nicht die Fortsetzung des ersten Bandes bildet, der im grossen und ganzen nur die elementare Behandlung der Schwerpunkte und Trägheitsmomente enthält, so hat der Verf. als Haupttitel gewählt: „Das Potential und seine Anwendung etc. in elementarer Behandlung", wodurch der vorliegende Band als selbständige Schrift gekennzeichnet wird. Unter „elementarer Behandlung" ist hier wie im ersten Teile der Ausschluss der Infinitesimalrechnung verstanden; die nicht zu entbehrenden infinitesimalen Betrachtungen werden in jedem vorkommenden Falle so durchgeführt, wie dies aus den elementaren Lehrbüchern bekannt ist. Auch von der analytischen Geometrie wird nicht viel mehr vorausgesetzt als die Bekanntschaft mit der Bedeutung der Coordinaten. In den späteren Kapiteln steigern sich allerdings die Anforderungen.

Als tüchtiger Mathematiker und langjähriger Lehrer hat sich der Verf. ein bemerkenswertes Geschick zur Bewältigung der bei derartig beschränkten Hülfsmitteln auftretenden Schwierigkeiten erworben. Besonders sind die graphisch veranschaulichenden Zeichnungen von ihm mit Erfolg benutzt worden. Auch über den Kreis der Leser hinaus, für welche das Buch bestimmt ist, nämlich für Studenten aus dem ersten Semester, Lehrer der Physik und Mathematik an Mittelschulen, Schüler technischer

Fachschulen, praktische Ingenieure, können die numerisch und graphisch durchgeführten Beispiele, besonders aus der Theorie der Elektricität und des Magnetismus, weiteres Interesse beanspruchen, ein Interesse, das allerdings — in Uebereinstimmung mit der ausgesprochenen Ansicht des Verf. — vorzugsweise auf pädagogischem Gebiete liegt. Doch kann man gewiss dem Verf. beipflichten, wenn er behauptet, dass die Kraftlinientheorie für jeden, der nicht wenigstens einmal ein Beispiel für solche Wissensgebiete vollständig verarbeitet hat, nebelhaft und unbestimmt bleibt.

Zur näheren Nachricht über den Inhalt diene der Abdruck der Kapitelüberschriften. I. Das Newton'sche Anziehungsgesetz. II. Die Gravitationscurve $y = 1/x^2$ und der Potentialbegriff. III. Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und Hohlkugel. IV. Die einfachsten Kraftröhren und Niveauflächen; Zelleneinteilung des Raumes und physikalische Anwendungen. V. Die Mehrpunktprobleme. VI. Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen. VII. Die Methode der elektrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume. VIII. Centrobarische Flächenbelegungen und Körper. IX. Selbständiger Uebergang zu den zweidimensionalen Problemen und zum logarithmischen Potential. X. Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme. XI. Physikalisches über galvanische Ströme und ihr Potential. XII. Magnetismus. XIII. Elektromagnetische und elektrodynamische Wirkungen galvanischer Ströme. XIV. Hydrodynamische Analogien. XV. Zusätze zur Lehre von der Gravitation und der Elektrostatik, Flächen zweiten Grades betreffend. XVI. Von den Einheiten und Dimensionen.

Bezüglich der Tendenz des Werkes hat Ref. seine Meinung am Schlusse der Anzeige des ersten Bandes kurz ausgesprochen. — In dem gegenwärtigen Bande sind ihm beim Lesen manche Incorrectheiten aufgefallen. Lp.

A. Schülke. Bemerkungen zu der Potentialtheorie von Prof. Dr. Holzmüller in Hagen. Hoffmann Z. **29**, 69-70.

G. Holzmüller. Erwiderung. Ebenda, 70-72.

A. Schülke. Noch einmal Potential und Kraftlinien. Ebenda, 137-138.

G. Holzmüller. Entgegnung. Ebenda 138-141.

A. Schülke. Die Dimensionen des Potentials. Ebenda, 265-267.

G. Holzmüller. Die Dimensionen des Potentials. Ebenda, 364-366.

A. Schülke. Mein letztes Wort gegen Herrn Dr. Holzmüller. Ebenda, 366-367.

Der Streit dreht sich zuerst um die Frage, ob ein Beweis für die algebraische Addition der Potentiale nötig sei, und um die Gleichung

für die Kraftlinien, wird dann aber durch den Artikel von Schülke auf die Dimensionen des Potentials hinüber getragen. Lp.

G. M. Stanoïévitch. Les lignes de forces et les surfaces équipotentielles dans la nature. C. R. **126**, 640-643; Soc. Franç. de Phys. No. 119, 1-2.

Manche Querschnitte von Pflanzen (Jahresringe, die um Astlöcher herumlaufen, Durchschnitte bei einer Eiche dicht unter einer Verzweigung, Querschnitt eines Radieschens) zeigen einen Anblick, der demjenigen mancher elektromagnetischen Felder sehr ähnlich ist. „Dass die Annäherung dieser so verschiedenartigen Phänomene durch die Natur vom Zufalle herrührt, ist nicht recht glaublich. Natürlicher wäre der Schluss, dass sie durch ähnliche, wenn nicht identische Ursachen erzeugt werden: dass jede Pflanze ein „zellulares Feld“ darstellt, das durch seine Kraftlinien und äquipotentialen (sichtbaren oder unsichtbaren) Oberflächen gekennzeichnet ist, und dass jede Zelle sich nach einer Kraftlinie bewegt und endlich anheftet, wobei die das Wachstum beherrschenden Kräfte Richtkräfte sind.“ Lp.

F. Richarz und O. Krigar-Menzel. Bestimmung der Gravitationsconstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde durch Wägungen. Berlin: G. Reimer in Comm. 196 S. gr. 4°. Mit 4 Tafeln. (Aus „Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften“.) Wiedemann Ann. **66**, 177-193.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

G. Mie. Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung. Wien. Ber. **107**, 1113-1182.

Die umfangreiche Abhandlung kann als eine selbständige Bearbeitung und Fortführung der bezüglichen Forschungen englischer Physiker, wie Poynting, Heaviside und Lodge, nach einheitlichen Gesichtspunkten bezeichnet werden. Wegen ihrer grossen Ausdehnung müssen wir uns auf die Wiedergabe einiger Gedanken aus der zusammenfassenden Einleitung beschränken. Nachdem eine Individualisirung der Energieteilchen, gleich der der materiellen Teilchen, zurückgewiesen ist, wird trotzdem die Theorie der sogenannten Energieströme als eine notwendige Consequenz aus der Vorstellung der Nahewirkung hergeleitet. Die Forderung, dass es nur Nahewirkungen gebe, wird mathematisch in Form allgemeiner Principien ausgedrückt, deren sich unter Einrechnung des Princips von der Erhaltung der Energie vier ergeben. Während die beiden ersten von der Energie selbst handeln und zu dem Problem der Berechnung der Energie aus den Eigenschaften der Materie führen, handeln die beiden anderen von der Energieübertragung und bringen das Problem mit sich, die Energieübertragung zu berechnen. Es zeigt sich dabei, dass dies mit Hülfe einer durch die Eigenschaften der Materie überall eindeutig bestimmten Vectorgrösse zu geschehen hat, die als „wirklicher Energiestrom“ bezeichnet wird. Dieser Vector lässt sich, wie in dem zweiten Teile der Untersuchung gezeigt wird, abgesehen von den Energieübergängen durch Gravitation und durch die neuentdeckten Strahlungen, wirklich immer in einer einfachen Weise berechnen. Als besonders wichtig erscheint die Behandlung der Energieübertragung im elektromagnetischen Felde mit dem Ergebnis, dass der von Poynting

und Heaviside hergeleitete Energiestrom thatsächlich als der wirkliche Energiestrom zu bezeichnen ist. Damit erweist sich die Poynting'sche Theorie als Consequenz der Maxwell'schen; insbesondere entkräftet der Verf. den von Hertz erhobenen Einwand der cyklischen Energieströme in statischen Feldern. Zu erwähnen ist, dass die sogenannte Energetik nicht berücksichtigt ist, da diese Richtung auf die Untersuchung keinen Einfluss gehabt hat. Lp.

A. Schuster. Potential matter. A holiday-dream. Nature **58**, 367, 618.

In der freien Form einer „Ferienträumerei" ergeht sich der Verf. in Betrachtungen über die Möglichkeit einer „Antimaterie", die zu der von uns gekannten in einem Gegensatze steht, ähnlich wie positive und negative Elektricität, Nord- und Südmagnetismus. Antigold würde z. B. alle übrigen physikalischen Eigenschaften wie Gold haben, aber mit 981 cm Beschleunigung aufwärts steigen. In unserer bekannten Welt kann wegen der Abstossung von Materie und Antimaterie nichts von der letzteren vorhanden sein; aber weit weg könnten Sonnensysteme aus Antimaterien bestehen. Die Vereinigung von Materie und Antimaterie bringt ein Etwas zu Wege, das weder Gravitation noch Trägheit besitzt, also keine der von uns als wesentlich angesehenen Eigenschaften der Materie. Dieses Etwas kann „potentielle Materie" heissen. Hört damit der Satz von der Constanz der Materie auf? Kann durch einen Funken die Materie und Antimaterie getrennt werden? — In dem Nachtrage auf S. 618 weist der Verf. auf die beiden ihm zur Zeit der Abfassung seines ersten Artikels nicht bekannten Abhandlungen von Karl Pearson („Ether squirts", American J. of Math. **13**; F. d. M. **23**, 1011, 1891) und A. Föppl („Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes", Münch. Ber. 1897; F. d. M. **28**, 710, 1897) hin, wo der Begriff der negativen Materie postulirt und erörtert ist. Lp.

A. Korn. Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Aufl. Berlin: F. Dümmler. VI + 280 S. 8°.

Der kurzen Anzeige des ersten Teiles dieser Schrift (F. d. M. **27**, 678, 1896) möge jetzt, wo auch der zweite Teil vorliegt, eine eingehendere Analyse folgen.

Das Ziel des Buches ist kein geringeres als dieses: Eine rein hydrodynamische Theorie des Aethers zu geben, welche die gesamten Erscheinungen der Gravitation und der Elektrodynamik im modernen Sinne umfasst. Die Grundlage der Untersuchung bildet überall das d'Alembert'sche Princip, welches Verf. einerseits auf den Aether (incompressible, wirbellose, reibungslose Flüssigkeit) und auf die darin befindlichen ponderabeln oder elektrisch erregten Medien (in gewisser Bewegung begriffene Körper) anwendet. Die Ausgangsvorstellung des

Verf. ist die von Bjerknes eingeführte Idee der pulsirenden Kugeln, die sich nach dem Sinusgesetz periodisch erweitern und verengern.

In Abschnitt I des ersten Teiles werden die Differentialgleichungen der Bewegung einer Flüssigkeit und die der Bewegung eines starren Körpers in der Flüssigkeit auf eigenartige Weise aus dem d'Alembert'schen Princip abgeleitet. Der Flüssigkeitsdruck p spielt dabei die Rolle eines Lagrange'schen Multiplicators, der wegen der Bedingungsgleichung der Incompressibilität eingeführt wird. Der mathematische Leser wird an der wissenschaftlichen Strenge des Verf. (z. B. bei der Definition eines continuirlichen Mediums) seine Freude haben.

In Abschnitt II wird das Geschwindigkeitspotential des Aethers berechnet, welches dem Vorhandensein einer, bez. zweier pulsirenden Kugeln entspricht. Letzteres geschieht durch eine combinatorische Methode im Anschlusse an C. Neumann's „Hydrodynamische Untersuchungen". Als Kraftgesetz, nach dem die beiden Kugeln auf einander wirken, ergiebt sich, wenn der Abstand der Kugeln gross gegen ihren Radius ist, und wenn ihre Pulsationen gleiche Periode und Phase besitzen, das Newton'sche Anziehungsgesetz. Für die Erklärung der Schwere auf der Erdoberfläche, für welche die bei der Ableitung des Newton'schen Gesetzes gemachten Voraussetzungen nicht gelten, genügt es, eine Taylor'sche Entwickelung anzusetzen, um das hier gültige Kraftgesetz ($= mg$) abzuleiten.

Die Voraussetzung gleicher Periode und Phase für alle pulsirenden Massenteilchen ist auf den ersten Blick sehr gezwungen. Um sie plausibler zu machen, denkt sich Verf. auf eine das Sonnensystem umschliessende sehr grosse Kugelfläche P einen periodischen Druck wirken. Dieser teilt sich wegen der Incompressibilität des Aethers den sämtlichen pulsationsfähigen Massenteilchen momentan mit und erzeugt in der That gleiche Periode und Phase der Pulsationen im ganzen Sonnensystem. Die dem einzelnen ponderabeln Teilchen zugehörige Masse berechnet sich aus der Amplitude und der Periode der Pulsation sowie aus dem Radius der betreffenden Kugel und der Dichte der umgebenden Aetherflüssigkeit. Die Bedingung an der Kugel P spielt dabei allerdings die Rolle eines deus ex machina. Indessen ist, wie Verf. bemerkt, ohne eine solche Bedingung ein hydrodynamisches Problem für den unendlichen Raum überhaupt unbestimmt.

Abschnitt III bringt hydrodynamische Analogien für die Anziehung zweier magnetischen Teilchen, bez. zweier elektrischen Ströme, welche von Bjerknes und Kirchhoff herrühren. Diese Analogien (Wechselwirkung zweier „oscillirenden" starren Kugeln, bez. zweier „umströmten" starren Ringe) geben die Anziehungsgesetze quantitativ richtig, aber mit verkehrtem Vorzeichen wieder. Durch geeignete Abänderung des hydrodynamischen Bildes auch dieses Vorzeichen zu berichtigen, ist Aufgabe des zweiten Teiles der Schrift.

Der erste Abschnitt dieses Teiles behandelt die ponderomotorischen Erscheinungen elektrisch oder magnetisch erregter Körper. Hier wird zunächst zwischen einem echten Continuum (gewöhnliche Flüssigkeit)

und einem unechten Continuum unterschieden. Mit letzterem ist ein Medium gemeint, dessen Dichte räumlich so schnell variirt, dass bei der Taylor'schen Entwickelung des analytischen Ausdrucks des d'Alembert'schen Principes für die Umgebung einer Stelle die höheren Glieder nicht vernachlässigt werden dürfen. Der „periodisch starre Körper", als welchen Verf. den elektrischen Leiter definirt, ist ein besonderer Fall eines unechten Continuums. Die weitere Behandlung des periodisch starren Körpers, insbesondere die Zerlegung seiner Bewegung in mehrere Bestandteile, ist nicht ohne eine gewisse Willkür möglich. Man vergl. hierzu die eigenen Bemerkungen des Verf. S. 159.

Jedenfalls gelingt es nun, auch eine dem Vorzeichen nach richtige hydrodynamische Erklärung für die ponderomotorische Wechselwirkung zweier elektrischen und magnetischen Teilchen sowie zweier elektrischen Ströme aufzustellen. Ein elektrisches Teilchen ist dabei ein periodisch starrer pulsirender, ein magnetisches Teilchen ein ebensolcher oscillirender Körper; (oscillirend heisst als Ganzes hin und her schwingend und ausserdem pulsirend, d. h. in abwechselnder Contraction und Dilatation befindlich). Ein elektrischer Strom endlich wird als vibrirender Ring bezeichnet (an der Oberfläche pulsirend und gleichzeitig in der Richtung der Meridiancurve des Ringes hin und her schwingend).

Der zweite Abschnitt behandelt sodann die elektromotorischen Erscheinungen, nämlich die Vorgänge im Dielektricum, die Induction in langsam und schnell veränderlichen Feldern, und schliesst mit der Herleitung der Maxwell'schen Gleichungen. Um die Vorgänge im Dielektricum hydrodynamisch zu verfolgen, schreibt Verf. dem Aether einen gewissen Bewegungszustand (den „dielektrischen Zustand") vor, bei welchem nicht, wie bei der Ableitung der ponderomotorischen Wirkungen, die Geschwindigkeit selbst, sondern eine lineare Combination der Geschwindigkeit und ihres Wirbels (oder Curls) wirbellos verteilt ist. Unter welchen Umständen dieser Zustand eintreten muss, oder weshalb er, einmal eingeleitet, fortbesteht, untersucht Verf. an dieser Stelle ebenso wenig, wie er die Notwendigkeit der wirbellosen Bewegung bei der Ableitung der ponderomotorischen Kräfte näher erörtert; er wird später darauf zurückkommen und weist hier nur auf die Einfachheit dieses dielektrischen Zustandes hin. Die genannte Definition gilt übrigens nur für den Fall, dass der Aether (neben den kleinen Schwingungen, welche die elektrische und magnetische Erregung definiren) keine „sichtbaren Bewegungen" ausführt. Sind solche sichtbaren Bewegungen vorhanden, so ist die Definition eine complicirtere. Im ersteren Fall ergeben sich in richtiger Weise die Maxwell'schen Feldgleichungen des reinen Aethers. Beim Vorhandensein von sichtbaren Geschwindigkeiten dagegen folgt eine bestimmte Erweiterung dieser Gleichungen, welche von den bekannten Ansätzen für bewegte Medien abweicht. Die hydrodynamische Bedeutung der elektrischen und magnetischen Kraft ist die der Amplituden zweier linearen Schwingungen, deren Phasen sich um eine Viertelwellenlänge unterscheiden. Dass beide Kräfte hier als Grössen von genau derselben Beschaffenheit und Dimension auftreten, ja, dass die eine Kraft durch

eine blosse Verlegung der Zeitscala in die andere übergeführt werden kann, scheint uns nicht sehr plausibel.

Für die Behandlung des Leiters nimmt Verf. die Annahme hinzu, dass die Bewegung hier mit Reibung, wie bei einer reibenden Flüssigkeit, vor sich gehe. Verf. bekommt auf diese Weise die Strömungserscheinungen und die Inductionsgesetze in der üblichen Form, weicht aber in den allgemeinen Feldgleichungen und Grenzbedingungen für den Leiter von Maxwell ab.

Ein Anhang nimmt gegen Maxwell einerseits, gegen die Energetik andererseits Stellung. Der gegen Maxwell erhobene Vorwurf, dass er keine mechanische Deutung der von ihm eingeführten physikalischen Grössen gestatte, scheint nicht aus dem Studium der Originalwerke Maxwell's, sondern viel eher aus der Hertz'schen Darstellung derselben hervorgegangen und lässt sich wohl angesichts der bekannten Maxwell'schen Aetherzellen, Frictionsrollen etc. etc. kaum aufrecht halten. Allerdings stellen Maxwell und seine Nachfolger, welche, ebenso wie die Energetiker, als Abtrünnige von der rein mechanischen Weltauffassung der Mystik beschuldigt werden, seine mechanischen Bilder eben nur als Bilder hin, während Verf. offenbar durch seine pulsirenden Kugeln, periodisch starren Körper, wirbellose oder dielektrisch schwingende Aetherflüssigkeit das Wesen der Dinge zu treffen glaubt. Hierzu scheint uns aber die geschilderte Theorie, so interessant und durchdacht sie ist, nicht einfach und überzeugend genug. Vielleicht wird in dieser Hinsicht dem Inhalte der Theorie durch die Darstellung etwas Abbruch gethan, die wohl durch Zurückdrängung der Formeln (man vgl. die über zwei Seiten gehende Formel 278) und durch Kürzung der Ausdrucksweise (man vgl. den über drei Seiten gehenden Satz XVI) vereinfacht werden könnte. Auch dürfte etwas Vectoranalysis gerade bei diesen allgemeinen Untersuchungen nützlich sein. A. S.

P. Gerber. **Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation.** Schlömilch Z. **43**, 93-104.

Betrachtungen von sehr allgemeiner Art führen den Verf. zur Aufstellung des folgenden Ausdrucks für das Gravitationspotential eines Massenpunktes auf einen anderen m:

$$(1) \qquad V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

wo c die Geschwindigkeit ist, mit der das Potential sich bewegt. Aus (1) folgt für grosse Werte von c (im Vergleich zu dr/dt) bis zur zweiten Potenz von c genau:

$$(2) \qquad V = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

und hieraus ergiebt sich für die Beschleunigung φ von m:

$$(3)\qquad \varphi = -\frac{\mu}{r^2}\left[1-\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right] = -\frac{\mu}{r^2}(1-F).$$

Setzt man diesen Wert von φ in die Differentialgleichungen der Planetenbewegungen ein, so ergiebt sich aus dem Zusatzfactor $1-F$ eine Bewegung des Perihels. Mit Hülfe der bekannten Perihelbewegung beim Mercur im Betrage von 41″ in einem Jahrhundert berechnet der Verf. dann unter der Voraussetzung, dass diese Bewegung einzig von jenem Zusatzfactor herrührt, die Constante c und erhält dafür die Zahl $c = 305\,500$ km/sec, also die Lichtgeschwindigkeit. Für die übrigen Planeten würden die auf diese Weise entstehenden Perihelbewegungen in einem Jahrhundert betragen: Erde 3″,6, Mond 0″,06, Mars 1″,3, Jupiter 0″,06, Saturn 0″,01, Uranus 0″,002, Neptun 0″,0007. Die entgegenstehenden Ergebnisse der bezüglichen Untersuchungen von Astronomen sind nicht erwähnt. Lp.

P. Berthot. Projet de programme de physique mathématique. Belg. Bull. (3) **35**, 355-356.

An der im Titel angegebenen Stelle befindet sich nur ein Bericht von P. de Heen über die Abhandlung des Verf., die in den Mémoires in 8° der Akademie zu Brüssel erscheinen soll. Nach diesem Berichte wird an Stelle des Newton'schen Gesetzes bei den Atomen und Molekeln das folgende gesetzt:

$$\varphi(r) = \frac{4k_0^2}{r_0}Mm\frac{r_0-r}{r^3},$$

wo r_0 die sehr kleine Entfernung ist, bei der die Anziehung in eine Abstossung übergeht. Lp.

J. Weber. Die allgemeine Schwere als Wirkung der Wärme. Prometheus **9**, 241-244, 257-262.

Wie die Bjerknes'schen, in einer Flüssigkeit pulsirenden Kugeln eine Anziehung auf einander auszuüben scheinen, wenn sie sich in derselben Phase befinden, so soll die Voraussetzung der scheinbaren Massenanziehung im Weltenall in synchronen Schwingungszuständen der Massen (oder auch in in geraden Vielfachen sich haltenden Schwingungszuständen) liegen. Statt einer immanenten Gravitation sind also synchrone Wärmedruckschwingungen anzunehmen. Der Verf. bemüht sich, zu zeigen, dass diese Hypothese alle Erscheinungen der Gravitation zu erklären im Stande sei. Lp.

H. Duport. Théorie des atomes. S. M. F. Bull. **26**, 159-162.

Unter der Annahme, dass die Atome Kugeln von nicht verschwindendem Durchmesser sind, welche sich gegenseitig beeinflussen,

findet Verf. bei geeigneter Verfügung über die Art des gegenseitigen Einflusses eine mechanische Analogie zur Wärmeausdehnung der Körper.

A. S.

Juppont. Note théorique sur deux hypothèses physiques. Toulouse Bull. **1**, 117-123.

Die beiden Hypothesen, welche Verf. durch Dimensionsbetrachtungen plausibel zu machen wünscht, sind folgende: 1. Die Temperatur ist numerisch proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Körpermolecüle; 2. sie stellt das gegenseitige Anziehungspotential der Körpermolecüle dar. Verf. wünscht hierdurch die Principien der Physik zu vereinheitlichen.

A. S.

G. Pacher. Sull'attrito interno di alcuni elementi allo stato liquido. Nota prima. Ven. Ist. Atti (7) **9**, 516-533.

Diese erste Note enthält die Beschreibung des Apparates und der Methode, nach welcher Verf. in einer zweiten Note die innere Reibung einiger verflüssigten Elemente messen will. Die Methode ist die Poiseuille'sche. Einige Aenderungen in der Anordnung der Ausflusscapillaren machen leichte Aenderungen der Theorie erforderlich.

A. S.

P. Appell. Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu. S. M. F. Bull. **26**, 135-136.

Auszug aus einer demnächst im Journ. de Math. erscheinenden Arbeit, welche die Theorie der Wirbellinien zu verallgemeinern bezweckt.

A. S.

A. Mesnager. Essai sur la théorie de la déformation permanente des solides. Revue d'Art. **51**, 509-545.

Diese Abhandlung enthält die ausführliche Begründung der in C. R. **126**, 515-517 gemachten Andeutungen. Veranlasst ist die Arbeit durch die merkwürdigen Resultate der von Hartmann angestellten Versuche, über die in der Revue d'Artillerie von 1894 eine ausführliche Schrift veröffentlicht ist, aus welcher in C. R. 1894 ebenfalls kurze Auszüge mitgeteilt waren. Nach diesen im grossen Massstabe mit Metallen angestellten Versuchen entstehen in dem Augenblicke, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten wird, an der Oberfläche des Körpers zwei Systeme von Geraden oder Curven, die unter einander constante Winkel bilden, welche von 90° verschieden, unabhängig von der Temperatur, aber abhängig von der Natur des Körpers sind. Bei den Stützen oder bei plötzlichen Wechseln im Querschnitte kann ein drittes Liniensystem entstehen, das nach der Hälftungslinie des kleineren Winkels der beiden ersten Systeme gerichtet ist. Wenn man einen dem Angriffe von Kräften unterworfenen Körper der Einwirkung einer Säure aussetzt, so

erscheinen an der Oberfläche Netze von Curven mit genau denselben Schnittwinkeln, auch wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist. Sobald die Beanspruchung des Körpers aufhört, wird die Einwirkung der Säure wieder gleichmässig. Die Winkel der beiden ersten Systeme werden in den Fällen, bei denen eine Bestätigung möglich war, durch die Richtung der grössten Hauptspannung gehälftet. Die Linien des dritten Systems erscheinen also normal zur grössten Hauptspannung. Bei den Stahlsorten ist der Widerstand in einem Teile, wo die Streifung begonnen hat, grösser als anderswo.

Zur Erklärung dieser Thatsachen erinnert der Verf. zuerst an die Theoreme, welche der Theorie der Elasticität zu Grunde liegen und auf den Gleichgewichtsbedingungen allein beruhen. Dann untersucht er, wie man die allgemein angenommenen Vorstellungen über den Bau der Körper abändern muss, um sie mit den Thatsachen des Versuchs zu vereinigen; ferner, welche Abänderungen an den Formeln der Elasticitätstheorie anzubringen sind. Danach zeigt er, dass, wenn der Gleitungswiderstand im Innern den von ihm angenommenen Grenzwert hat, der Bruch des Gleichgewichtes bei einem festen Körper immer nach Richtungen eintreten muss, die mit der kleinsten Hauptspannung einen unterhalb 45° liegenden Winkel bilden. Unter den im Verlauf der Untersuchung eingeführten Hypothesen findet man genau die von **Hartmann** beobachteten Erscheinungen, namentlich bei gespannten Prismen.

Als Ergebnisse werden am Schlusse folgende Sätze angeführt: Bei allen geprüften Körpern hat die Reibung der inneren Gleitung den Wert πf, wo f, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist, eine Constante bedeutet, die von der Natur des Körpers und von den Wandlungen abhängt, welchen er vorher unterworfen war, und π eine Constante, die sehr wahrscheinlich der von der gegenseitigen Anziehung der Molekeln herrührende innere Druck ist. Alle isotropen Körper, für welche dieses Gesetz gilt, deformiren sich in dem Augenblicke, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten wird, durch Gleitung. Die Neigung zur Gleitung ist am grössten längs zweier Ebenen, die durch diejenige Axe des Elasticitäts-Ellipsoides gehen, welche der mittleren Hauptspannung entspricht, und mit der Richtung der kleinsten Hauptspannung einen Winkel $\varphi' < 45°$ bilden, für den $\operatorname{cotg} 2\varphi' = f$. Die Spuren der Gleitebenen erzeugen an der Oberfläche der Körper, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten ist, Liniensysteme, deren Hälftungsgeraden zu den Hauptrichtungen an der Oberfläche parallel sind, und welche die Bestimmung der Richtungen der grössten und der kleinsten Spannungen in der Nähe der Oberfläche ermöglichen. Die permanente Deformation wird durch die Werte der beiden extremen Axen des Elasticitäts-Ellipsoides bestimmt, welches auch der Wert der mittleren Axe ist. Lp.

M. BRILLOUIN. Théorie des déformations permanentes des métaux industriels. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13**, 377-404; **14**, 311-331; **15**, 447-469.

Verf. betrachtet die in der Industrie zur Verwendung kommenden Metalle als Körper, gebildet aus isolirten, sehr kleinen krystallinischen Körnern, die in ein beinahe continuirliches Netz von sehr zäher Materie eingebettet sind. Die krystallinischen Körner werden als ganz frei von Viscosität angenommen, das viscose Cement als ganz frei von Elasticität. Bei einer solchen Structur werden die Kräfte, denen die Körner unterworfen werden, völlig durch das viscose Cement übermittelt; die Deformation setzt sich aus der Deformation der Krystalle zusammen, vermehrt um die Deformation des zähen Netzes. Nun ändert sich aber unter der Einwirkung von Kräften, die nach verschiedenen Richtungen ungleich sind, die Verteilung der zähen Materie; sie wird von den Gebieten, in denen stärkerer Druck herrscht, nach den weniger gedrückten Gebieten hin getrieben, und dieser Transport dient zum Ausgleich der Deformationen und der Kräfte.

Von dieser Grundvorstellung aus entwickelt der Verf. seine Theorie in drei grossen Abhandlungen. Die erste beschäftigt sich mit den „langsam hervorgerufenen Deformationen, in denen man oft einen Gleichgewichtszustand zu verwirklichen glaubt“. Der Verf. stellt die Form der charakteristischen Gleichung für die grossen Deformationen der in der Industrie gebrauchten Metalle auf, deren Structur analog derjenigen eines aufgemauerten Bauwerkes ist. Die zweite Abhandlung geht auf die Gesetze der Schwingungen eines derartigen Metalles ein, Gesetze, die sehr verschieden von denjenigen ausfallen, denen eine gleichzeitig elastische und viscose homogene Substanz gehorcht. In der letzten Abhandlung wird die besondere Form der Function Φ untersucht, welche die Rolle des zähen Kittes für eine besonders einfache Structur definirt, und es werden einige Anwendungen hiervon gemacht. Die grosse Ausdehnung der interessanten Untersuchungen macht ein genaueres Eingehen auf die Einzelheiten unmöglich. Wir müssen uns daher mit dem Hinweise auf diesen Versuch begnügen, die beobachteten Thatsachen in einer grösseren Annäherung als bisher durch theoretische Betrachtungen darzustellen. Lp.

M. Brillouin. Loi des déformations des métaux industriels. C. R. **126**, 328-330.

Verf. legt seinen Betrachtungen die Vorstellung zu Grunde, dass die in der Technik verwendeten Metalle aus einer Combination kleiner Krystalle bestehen, eingebettet in wenigstens einigen Tausendsteln eines Cementes, welcher aus dem gebrauchten Zuschlag gebildet ist. Die unter Einfluss einer Zugkraft entstehende Längenänderung setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen, nämlich erstlich aus der Dilatation der Krystalle, welche, wenn L_1 die Gesamtlänge der Krystalle ist, $\delta L_1 = kXL_1$ beträgt, und aus der Längenänderung des Bindemittels, dessen Gliederanzahl gleich n und dessen ursprüngliche Länge gleich L_2 sei. Diese soll nun der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L_2}{n}\right)=\frac{X}{n}f\left(\frac{L_2}{n}\right)$$

genügen, woraus sich für diesen Teil der Verlängerung eine Formel von der Gestalt

$$n\left\{\Phi\left(-\frac{A}{n}+\frac{1}{n}\int^{t}X\,dt\right)-\Phi\left(-\frac{A}{n}\right)\right\}$$

ergiebt. Der Verf. meint, dass durch seine Formel alle Beobachtungsthatsachen völlig dargestellt würden, und erläutert das an einigen derselben (Auszug aus der ausführlichen Arbeit in Ann. de Chim. et Phys. (7) **13, 14** u. **15**). F. K.

P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektricität. Münch. Ber. **28,** 1898, 117-125.

Die Arbeit ist in einer schwer verständlichen Art von Vectoranalysis geschrieben und lässt den eigentlichen Gedankengang des Verf. kaum erkennen. Sie scheint eine von den allgemeinsten Ideen über Elasticität, Wärme, Schwingungsvorgänge ausgehende Theorie des Marconi'schen Empfängers zu sein. A. S.

L. Gages. Essai sur la théorie générale des aciers. Revue d'Art. **53,** 23-57, 132-151, 248-262, 441-460.

Zusammenstellung der Ergebnisse der neuesten Untersuchungen über die Eigenschaften der verschiedenen Stahlsorten, sowie über die zu ihrer Erklärung aufgestellten Theorien. Lp.

H. Bouasse. Sur la définition de la mollesse des fils métalliques. Ann. de Chim. et Phys. (7) **14,** 98-106.

Die Definition benutzt Torsionscurven, die von einem Drahte erzeugt werden (vergl. unten S. 678). Lp.

Ch. Fabry et A. Perot. Mesure du coefficient de viscosité de l'air. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13,** 275-288.

Die sonst experimentelle Arbeit enthält auch mathematische Untersuchungen über die Bewegung von Luft, sowie von Scheiben in der Luft. Lp.

R. C. Maclaurin. On the solution of the equation $(\nabla^2+\varkappa^2)\psi=0$ in elliptic coordinates and their physical applications. Cambridge Trans. **17,** 41-108.

Ueber den Zweck der Untersuchung berichten wir mit den einleitenden Worten der umfangreichen Abhandlung: Es ist wohl bekannt, dass die Lösung einer grossen Anzahl physikalischer Probleme fast ganz auf der erfolgreichen Behandlung der Differentialgleichung $(\nabla^2+\varkappa^2)\psi=0$ beruht. Die Schwierigkeit besteht in jedem Falle darin, eine Lösung

in Ausdrücken mit den Coordinaten zu erhalten, die sich für den symbolischen Ausdruck der „Grenzbedingungen“ des Problems eignen. Wenn die Grenzen entweder Kreiscylinder oder Kugeln sind, so hat man alle analytischen Schwierigkeiten äusserst glücklich überwunden; allein verhältnismässig wenig ist man mit anderen Gestalten von begrenzenden Oberflächen vorwärts gekommen. Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit Problemen, welche elliptische Cylinder und Sphäroide betreffen.

Das zweidimensionale Problem scheint zuerst von Mathieu in Angriff genommen zu sein (Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. Journ. de Math. (2) **13**, 137-203; F. d. M. **1**, 354-356, 1868). In dem folgenden Jahre veröffentlichte H. Weber einen Aufsatz über den Gegenstand in Math. Ann. **1**, 1-36 (Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$; F. d. M. **2**, 217, 1869). Weitere Beziehungen findet man in Heine's Handbuch der Kugelfunctionen **2**, 208 und in einem neueren Buche von Pockels (Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig: Teubner; F. d. M. **23**, 403, 1891).

Das dreidimensionale Problem ist vom analytischen Gesichtspunkte aus dem zweidimensionalen sehr ähnlich. Es ist von C. Niven in einer Abhandlung über „Conduction of heat in ellipsoids“ in Angriff genommen worden (Philos. Trans. **171**, 117-161; F. d. M. **12**, 836, 1880).

Die vorliegende Schrift hat wenig Gemeinsames mit einer der citirten Arbeiten, es sei denn, dass das Problem, mit dem Niven sich 1880 beschäftigte, hier eine kurze Erwähnung findet, obgleich die Methode der Behandlung eine ganz verschiedenartige ist. Seitdem diese Abhandlung verfasst war, ist die Aufmerksamkeit des Verf. auf einen kurzen Artikel von Lindemann gelenkt worden („Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders“. Math. Ann. **22**, 117-123; F. d. M. **15**, 270, 1883). Derselbe gebraucht unabhängige Veränderliche, die in der That die nämlichen sind wie die der vorliegenden Arbeit, und erhält einige der hier gewonnenen Resultate; doch beschäftigt er sich vornehmlich mit dem Beweise einiger Sätze über das Product der beiden Lösungen der Differentialgleichung.

Ein grosser Teil der Schrift ist einer rein mathematischen Untersuchung gewidmet, nämlich der Aufstellung von Reihenentwickelungen für die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders der Form:

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - p^2)\,y = 0$$

in der Umgebung der kritischen Punkte $x = 1$, $x = -1$, $x = \infty$. Obschon der Verf. sich mit den bezüglichen Forschungen, insbesondere den Grundzügen der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen vertraut zeigt, hat er unter anderem die Arbeiten von E. Haentzschel auf diesem Gebiete vollständig übersehen: „Beitrag zur Theorie der Functionen des elliptischen und des Kreiscylinders“, Pr. Berlin 1889 (F. d. M. **21**, 521-523, 1889) und „Studien über die

Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen", Berlin: Georg Reimer (F. d. M. **25,** 831-835, 1893). Ausser diesen Arbeiten sind von demselben Verf. noch zu erwähnen: „Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen" in Schlömilch Z. **31,** 25-33, ferner: „Zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders", Pr. Duisburg (vergl. F. d. M. **18,** 430-433, 1886).

Die physikalischen Anwendungen der erhaltenen Formeln beginnen auf S. 72. Folgende Gegenstände werden der Reihe nach erledigt: Schwingungen elliptischer Membranen, Schwingungen einer elliptischen Platte (S. 73), Schwingungen von Luft in elliptischen Cylindern (S. 74-76), Flutwellen in einem cylindrischen Gefässe von elliptischem Querschnitte (S. 76), Formen stetiger Wirbelbewegung in einem elliptischen Cylinder (S. 76-77), elektrische Wellen in der dielektrischen Umgebung eines elliptischen Cylinders und die Abnahme magnetischer Kraft in einem Metallcylinder bei magnetischen Kraftlinien parallel zur Axe (S. 77-79).

In dem als zweiter Abschnitt bezeichneten Teile werden für die im Titel angegebene Differentialgleichung die Lösungen aufgesucht, welche zur Behandlung von Problemen bezüglich der Sphäroide geeignet sind. Die für diesen Fall gültige Differentialgleichung lautet in der vom Verf. benutzten Form:

$$(1-x^2)z''-2(n+1)xz'+[p-n(n+1)-\lambda^2x^2]z=0.$$

Die mathematische Behandlung dieser Gleichung wird an die im ersten Abschnitte erledigte Differentialgleichung angeknüpft (S. 80-90), und dann wendet sich der Verf. zu den folgenden physikalischen Problemen: Vibrationen von sphäroidischen Luftschichten (S. 91-96), Vibrationen in einer halbsphäroidischen Schicht (S. 96), Arten der Vibration für die elektrischen Schwingungen in einem dünnen homoioidalen Lager eines Dielektricums zwischen zwei leitenden sphäroidischen Oberflächen (S. 96-98), Vibrationen der Luft in einer sphäroidischen Hülle (S. 98-99), Mitteilung der Vibrationen von einem Sphäroid an das umgebende Gas (S. 99-101), Zerstreuung von Wellen durch ein hemmendes Sphäroid (S. 101), elektrische Schwingungen über die Oberfläche eines Sphäroids (S. 102-104), Abnahme elektrischer Ströme in leitenden Sphäroiden (S. 104-105), verschiedene Probleme über Wärmeleitung in Sphäroiden (S. 105-107). Wegen der Mannigfaltigkeit der behandelten Fragen ist Ref. nicht in der Lage, über jede Lösung einzeln zu berichten, sondern muss sich mit der allgemeinen Bemerkung begnügen, dass vielfach Zahlenbeispiele durchgerechnet und aus ihnen in Tabellenform viele Einzelergebnisse abgeleitet worden sind. Lp.

W. Grosse. Der Aether und die Fernkräfte. Mit besonderer Berücksichtigung der Wellentelegraphie. Leipzig: Quandt und Händel. VI u. 89 S. gr. 8°.

G. Jäger. Theoretische Physik. I. Mechanik und Akustik. II. Licht und Wärme. Leipzig: G. J. Göschen. 155, 156 S. 8°.

W. Nernst. Theoretische Chemie vom Standpunkte der Avogadro'schen Regel und der Thermodynamik. 2. Aufl. Stuttgart: F. Enke. XVI + 703 S. 8°.

B. Elasticitätstheorie.

M. Brillouin. Les écarts apparents de la loi de Hooke. Poinçons et couteaux de pendules. Chaînes. Vis calantes. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13**, 231-264.

Der Zweck der Arbeit besteht darin, durch einfache Schlüsse allgemeiner Natur eine wichtige, von H. Hertz 1881 entdeckte, hierauf von Boussinesq näher untersuchte Eigenschaft abzuleiten und ihre Tragweite genauer festzustellen, dass nämlich die Anwendung des Hooke'schen Elementargesetzes zu örtlichen Gestaltsänderungen führt, die nicht der Gesamtkraft proportional sind, sobald die Stützfläche sich ändert. Bei den Betrachtungen geht der Verf. von der folgenden Ueberlegung aus. Bei einem elastischen Körper seien die elementaren Deformationen mit den elastischen Kräften linear verknüpft (Hooke'sches Gesetz). Die Gleichungen des inneren Gleichgewichts sind nur dann linear, wenn die relativen Verrückungen aller Punkte klein sind. Fallen die relativen Verrückungen nicht alle sehr klein aus, so kann das Hooke'sche Gesetz bei der Vergleichung der an dem Körper angebrachten Kraft und der Verrückung des Angriffspunktes als verletzt erscheinen. Wir müssen es uns versagen, die Behandlung der Elasticitätsgleichungen durch den Verf. hier zu wiederholen; es genüge die Bemerkung, dass es dem Verf. gelingt, Formeln herzustellen, die mit der Erfahrung in Uebereinstimmung stehen. Insbesondere bespricht er die Differenzen, welche zwischen der Hertz'schen theoretischen Arbeit (J. für Math. **92**; F. d. M. **14**, 807, 1882) und den Auerbach'schen Versuchen (Wiedemann Ann. **43**; Fortschr. d. Phys. **47**$_1$, 322, 1891) vorhanden sind. „Die Hertz'sche, auf der Hypothese einer einfachen normalen Verrückung beruhende Theorie, die einzig normale Kräfte in Rechnung zieht, genügt zur Berechnung der Gesamtkraft und des Eindringens (enfoncement), reicht aber nicht aus zur Berechnung der örtlichen Gestaltsänderung, selbst nicht in dem Falle des Hooke'schen Gesetzes. Sobald die Kugel ein bisschen in die Ebene eindringt, kommen beträchtliche Tangentialkräfte ins Spiel und ändern ohne Wandelung des normalen Druckes die örtlichen Deformationen gewaltig ab". Weitere Auseinandersetzungen bezwecken eine Berichtigung eines von Auerbach aus seinen Beobachtungen gefundenen Resultates. Die im Titel genannten Anwendungen der gefundenen Sätze auf physikalische Apparate nehmen am Ende der Abhandlung einen beträchtlichen Raum ein. Lp.

H. Bouasse. Exposé et discussion des principales expériences faites sur les phénomènes de torsion. Toulouse Ann. **12,** A, 5-33.

H. Bouasse. Sur les courbes de déformation typiques des fils neufs. Première partie. Toulouse Ann. **12,** G, 1-25.

In der ersten Arbeit stellt sich Verf. auf einen rein experimentellen Standpunkt. Einige aus der Erfahrung geschöpfte Regeln zeigen, wie sehr die durch ein veränderliches Kräftepaar hervorgerufene Torsion eines Drahtes von den früher durchlaufenen Zuständen des Drahtes und von der Durchlaufungsgeschwindigkeit des augenblicklichen Zustandes abhängt. Aeltere Arbeiten über Torsion werden scharf kritisirt.

Die zweite Arbeit bildet die theoretische Vorbereitung zu einer eigenen experimentellen Untersuchung des Verf. über Torsion. Hier spricht er sich viel zuversichtlicher über den Nutzen der Theorie aus, wie in der ersten Arbeit; die Grundlagen der Theorie werden dabei sorgfältig durch das Experiment geprüft. (Verf. nimmt dazu einerseits einen Wachs-, andererseits einen Bleicylinder.) Den Schluss der Arbeit bilden Discussionen über die Zerreissungsspannung der Drähte.

A. S.

H. Bouasse. Sur les pertes d'énergie dans les phénomènes de torsion. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13,** 106-144.

Fortsetzung der vorzugsweise experimentellen Arbeit, über deren Anfang in F. d. M. **28,** 718, 1897 berichtet ist; dieselbe enthält auch manche mathematischen und theoretischen Partien und steht mit den übrigen Veröffentlichungen des Verf. in engem Zusammenhange.

Lp.

H. Bouasse. Sur un mode de comparaison des courbes de torsion. C. R. **126,** 466-467.

Die Curven werden erhalten, indem man in einer Ebene den Torsionswinkel α und das drehende Kräftepaar C als Coordinaten benutzt; dazu kommt dann noch eine weitere Formel, welche die Variation des Torsionswinkels mit der Zeit giebt. Ist $C=\varphi(\alpha)$ die Gleichung der Curve und $\alpha=f(t)$ die Zeitgleichung, so kann man sich fragen, wie sich die beiden Gleichungen beim Uebergang von einem Material zum andern ändern. Mit Einführung eines Parameters a, welchen der Verf. die Weichheit (mollesse) nennt, lassen sich die Versuchsergebnisse in den Formeln $aC=\varphi(a\alpha)$, $a\alpha=f(t)$ darstellen, welche Formeln noch nicht der Veränderlichkeit des Durchmessers Rechnung tragen. Will man auch diese berücksichtigen, so muss man schreiben: $bC=\varphi(a\alpha)$.

F. K.

J. Dougall. A general method of solving the equations of elasticity. Edinb. M. S. Proc. **16,** 82-98.

Die angezogenen Gleichungen sind die Differentialgleichungen, denen die Verrückungen eines homogenen isotropen elastischen Körpers genügen, und die Methode ist analog derjenigen der Green'schen Function in der Theorie des Potentials. Die Analysis beruht auf dem Betti'schen Reciprocitäts-Theorem: „Wenn man zwei Gleichgewichtszustände eines elastischen Körpers herausgreift, so ist die von den Kräften des ersten Zustandes geleistete Arbeit, wenn sie in Bezug auf die Verrückungen des zweiten wirken, gleich der von den Kräften des zweiten Zustandes geleisteten Arbeit, wenn sie in Bezug auf die Verrückungen des ersten wirken." Zuerst wird ein Beweis dafür gegeben, dass bei einem nur den körperlichen Kräften unterworfenen Körper alle neun ersten Ableitungen der Verrückungen stetig sind; dann wird das folgende System von Verrückungen betrachtet:

$$u = -\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{2}{r}, \qquad v = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \qquad w = -\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},$$

wo r der Abstand eines gegebenen Punktes (x', y', z') von dem veränderlichen Punkte (x, y, z) ist. Es wird gezeigt, dass diese angesehen werden müssen als herrührend von einer einzigen, der x-Axe parallelen Kraft, die in (x', y', z') angebracht ist und die Grösse $8\pi\mu(\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)$ hat. Dies ist der fundamentale Typus der Deformation in einem unendlichen Körper, und er kann in gehöriger Weise herangezogen werden, wenn die Kraft eine Einheit beträgt und von einer x-Quelle bei $(x'\,y'\,z')$ entspringt. Durch Combinirung der drei fundamentalen Deformationen, die aus einer x-, einer y- und einer z-Quelle entspringen, leitet Verf. die von Betti in dessen allgemeiner Integrationsmethode gebrauchten Lösungen ab. Diese sind von zwei Typen:

(a) $$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad v = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad w = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right);$$

(b) drei verwandte Deformationen, deren eine $u = 0$, $v = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$, $w = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$ ist.

Aus der Methode der Ableitung derselben geht hervor, dass die auf das Element in (x', y', z') einwirkenden Kräfte, welche die Deformation vom Typus (b) erzeugen, einem Paare äquivalent sind, und dass daher eine der Betti'schen Formeln einer Modification bedarf.

Der Gebrauch der x-, y- und z-Quelle bei der Entwickelung einer allgemeinen Methode zur Lösung der elastischen Gleichungen ist völlig dem Gebrauche des Potentials $1/r$ bei der Entwickelung der Methode der Green'schen Functionen analog, indem das Betti'sche Theorem auf diese Quellen so angewandt wird, wie das Green'sche Theorem auf $1/r$ in der Theorie des Potentials angewandt wird. Gbs. (Lp.)

P. Glan. Zusatz zu den früheren theoretischen Untersuchungen über elastische Körper und Licht. Berl. Phys. Ges. Verh. **17,** 8.

Kurze Bemerkung bezüglich einiger von Brunhes gemachten Einwände (vergl. F. d. M. **28,** 738, 1897). Lp.

Mesnager. Déformation des métaux (essai d'une théorie). C. R. **126,** 515-517.

Verf. beschreibt die Ergebnisse, welche Hartmann bezüglich der Risse erhalten hatte, die bei Erreichung der Elasticitätsgrenze sich zeigen. Die Ueberlegungen des Verf.'s führen zu der Gleichgewichtsbedingung $(\pi-\nu)f-\tau\geqq 0$ zwischen den beiden Componenten ν,τ der Beanspruchung und dem Widerstand gegen Bruch π, so dass also der Gleitungswiderstand sehr wohl mit einer Reibung verglichen werden kann. Bezüglich der Einzelheiten verweise ich auf die Abhandlung selbst (s. oben S. 671). F. K.

E. et F. Cosserat. Sur les équations de la théorie de l'élasticité. C. R. **126,** 1089-1091.

Die Differentialgleichungen des elastischen Problems:

$$\Delta_2(u)+\xi\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0,\quad \Delta_2(v)+\xi\frac{\partial\Theta}{\partial y}=0,\quad \Delta_2(w)+\xi\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0$$

sollen hier unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, dass man die Lösung in ihrer vollen Abhängigkeit von ξ ansieht. Es wird zunächst der bemerkenswerte Fall $\xi=-1$ besprochen und dann an dem Beispiel der Kugel das von den Verf. verfolgte Ziel erläutert. F. K.

E. et F. Cosserat. Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité. C. R. **126,** 1129-1132.

Eine Function, welche in der Elasticitätstheorie eine ähnliche Rolle spielt wie $1/r$ in der Potentialtheorie, ist die Function

$$u_i=U_i-\frac{\xi}{2[\xi(i-1)+2i-1]^2}r^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial U_i}{\partial x}+\frac{\partial V_i}{\partial y}+\frac{\partial W_i}{\partial z}\right\}$$

$$i=-1,\quad U_i=\frac{kA}{r},\quad V_i=\frac{kB}{r},\quad W_i=\frac{kC}{r},\quad k=\frac{3(2\xi+3)}{\xi+1},$$

in Verbindung mit einem auf entsprechende Weise zu bildenden Paare von Grössen v und w. Es besteht nämlich die Gleichung

$$4\pi(Au+Bv+Cw)=\iiint(Xu'+Yv'+Zw')\varrho\,d\tau$$

$$+\iint(Fu'+Gv'+Hw')\,ds-\iint(F'u+G'v+H'w)\,d\sigma,$$

in welcher u, v, w die Verrückung bezeichnet, welche durch ein System äusserer Kräfte hervorgebracht wird, während die u', v', w' die obigen Ausdrücke und F', G', H' die zugehörigen Oberflächenkräfte sind.

F. K.

E. et F. Cosserat. Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique. C. R. **127,** 315-318.

Die Differentialgleichungen

$$\Delta^2 u + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0,\quad \Delta^2 v + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0,\quad \Delta^2 w + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

sollen für den Raum eines dreiaxigen Ellipsoids mit der Nebenbedingung integrirt werden, dass an der Oberfläche bestimmte Werte stattfinden müssen.

Bei der Auffassung der Verf. kommt es zunächst darauf an, solche Werte k_i wirklich zu finden, dass die Gleichungen

$$\Delta_2 U_i + k_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial x} = 0 \text{ etc.}$$

sich erfüllen lassen, wenn an der Oberfläche U_i, V_i, W_i gleich Null sind; hat man diese bestimmt, so ist es leicht, hieraus die Lösung des ursprünglichen Systems abzuleiten.

Solche Functionen erhält der Verf., indem er setzt

$$U_i = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) U_i',\quad V_i = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) V_i',$$
$$W_i = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) W_i',$$

wo U_i', V_i', W_i' ganze homogene Functionen sein sollen. Für den Grad 0 und 1 werden dieselben mit den zugehörigen Werten von k_i wirklich bestimmt.

F. K.

M. Lévy. Rapport sur un Mémoire de M. Lecornu intitulé: „Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme". C. R. **126,** 1844-1849.

Nach einer litterarischen Besprechung des Problems des Gleichgewichts biegsamer, unausdehnbarer Flächen, welche Ref. nicht als ganz vollständig ansehen kann, wird die specielle Aufgabe gewürdigt, welche sich Lecornu in seiner Abhandlung gestellt hat. Dann folgt eine kurze Besprechung der von Lecornu befolgten Methode und seiner Discussion der Rechnungsergebnisse; schliesslich wird die Abhandlung zur Aufnahme in den Recueil des Savants étrangers empfohlen.

F. K.

A. Vaccaro. Equilibrio delle superficie piane elastiche isotrope. Batt. G. **36,** 208-224.

Verf. giebt zunächst die Differentialgleichungen für die elastische Deformation einer elastischen Platte, falls die Normalcomponente der Verrückung gleich Null ist. Mit Hülfe zweier particularen Lösungen dieser Gleichungen wird die allgemeine Lösung für jede der beiden Verrückungscomponenten auf eine Summe von drei Integralen zurückgeführt. Das erste Integral erstreckt sich über den Flächenraum und entspricht der von den äusseren Kräften herrührenden Verrückung, während die beiden andern über den Rand erstreckt sind und dem Falle entsprechen, dass die äusseren Kräfte gleich Null sind. In diesen letzteren Integralen kommen nun sowohl die beiden Componenten der Randspannung als auch die beiden Componenten der Verrückung vor. Verf. zeigt im letzten Abschnitt seiner Untersuchung, wie man für den Fall einer unendlichen Halbebene entweder die Randwerte beider Componenten der Verrückung oder beider Componenten der Spannung oder zweier ungleichnamigen Grössen der beiden Paare eliminiren kann. F. K.

G. Lauricella. Sulle vibrazioni dei solidi elastici. Annali di Mat. (2) **26,** 113-141.

In der Abhandlung „Sulle equazioni del moto dei corpi elastici“ (vergl. F. d. M. **26,** 921, 1895) beschäftigte sich der Verf. mit der Frage nach der Existenz der Ausnahmelösungen der unbestimmten Gleichungen, von denen man die Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung der elastischen Körper abhängig machen kann. Da er damals die Existenz einer unbestimmten Reihe dieser Ausnahmelösungen in demjenigen Falle, bei welchem die entsprechenden Ausdrücke der Spannungen an der Oberfläche der Körper verschwinden, nicht vollständig bewiesen hatte, so kommt er jetzt auf diese Frage zurück und zeigt, dass, wenn drei willkürliche Functionen der Punkte des elastischen Körpers gegeben sind, immer eine endliche oder unendliche Reihe von Ausnahmelösungen existirt. Nimmt man folgeweise für die willkürlichen Functionen die Componenten der anfänglichen Verrückungen und die Componenten der anfänglichen Geschwindigkeiten, so erhält man zwei Ausnahmereihen und demnach zwei entsprechende Reihen elementarer Vibrationen der Punkte des elastischen Körpers. Durch Ueberlagerung der beiden Reihen elementarer Vibrationen entsteht die diesen Verrückungen und diesen Geschwindigkeiten entsprechende Bewegung, falls die beiden Reihen endlich oder auch unendlich sind, vorausgesetzt, dass in dem letzteren Falle einige bestimmte Bedingungen erfüllt sind.

Lp.

P. Sacerdote. Sur les déformations élastiques des vases minces. Journ. de Phys. (3) **7,** 516-520.

Der Verf. zeigt, wie man durch ganz einfache Rechnungen die Deformationen eines dünnen sphärischen oder cylindrischen Gefässes erhalten kann, das verschiedenen Drucken auf seine beiden Seiten unter-

worfen wird. Die abgeleiteten Formeln stehen in völliger Uebereinstimmung mit den aus der allgemeinen Elasticitätstheorie abgeleiteten.

Lp.

E. Kohl. Ueber Strahlcurven und Wellenflächen in einem Medium mit veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Rücksicht auf die Erdbebenerscheinungen. Monatsh. f. Math. **9**, 151-168.

Wenn die Erde homogen wäre, müsste die scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Bebens an der Erdoberfläche von dem Centrum aus bis zu dem normalen Werte c abnehmen, welcher die wirkliche Fortpflanzung im Erdinnern giebt. Die Beobachtungen stimmen aber nicht mit den hieraus gezogenen quantitativen Folgerungen überein. Verf. untersucht daher, zum Teil im Anschlusse an A. Schmidt, die Fortpflanzung von Stössen in einem inhomogenen Medium und erweitert die Untersuchung noch dahin, dass er statt einer punktförmigen eine geradlinige Quelle des Erdbebens annimmt. Die Methode der Untersuchung ist die der geometrischen Optik.

Zwei Grenzfälle werden specieller behandelt: 1. Erdbebenherd in geringer Tiefe, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nimmt mit der Tiefe y nach dem Gesetze $c = c_0(1+ay)$ zu. Die Curven, längs welcher sich das Beben fortpflanzt („Strahlcurven"), sind Kreise. Der Ort aller Punkte, zu denen das Beben in einer gegebenen Zeit gelangt („Wellenfläche"), ist eine Kugel, deren Mittelpunkt aber von dem Erdbebenherde verschieden und zeitlich veränderlich ist. Die scheinbare Fortpflanzung längs der Oberfläche ist senkrecht über dem Herde grösser, in grösserer Entfernung geringer als die wirkliche Fortpflanzung c. 2. Erdbebenherd in grosser Tiefe. Die Abhängigkeit zwischen Fortpflanzung und Tiefe wird in der Form angenommen: $c = c_0 e^{ay}$; die Strahlencurven sind transcendent; sie werden, soweit sie die Erdoberfläche überhaupt treffen, von dem Herde auslaufend, sehr stark nach jener hingebrochen und treffen die Oberfläche sämtlich im Innern eines Kreises vom Radius π/a. Das Erschütterungsgebiet auf der Erdoberfläche ist also ein begrenztes; die Erschütterung selbst ist enorm und erfolgt fast momentan für alle Punkte des Gebietes.

A. S.

E. Kohl. Ueber die Fortpflanzung von Wellen in absorbirenden Medien mit Rücksicht auf das Schallphänomen bei Erdbeben. Monatsh. f. Math. **9**, 358-371.

Die Gleichungen für die Ausbreitung einer Erschütterung im Erdinnern werden in dieser Arbeit durch Hinzunahme von Reibungsgliedern vervollständigt. Indem Verf. die ursprüngliche Störung harmonisch analysirt, erhält er die auch aus anderen Gebieten der mathematischen Physik bekannten Gesetze: dass die schnelleren Wellen stärker gedämpft werden und sich etwas schneller fortpflanzen wie die langsameren, die ihrerseits den Hauptbestandteil der Erregung geben. Hieraus erklärt sich,

dass das Schallphänomen bei einem Erdbeben mit einem leisen und hohen Pfeifen beginnt und sich bald in ein tiefes und starkes Rollen umsetzt.

Ferner wird gezeigt, wie sich die Resultate einer früheren Arbeit (vergl. das vorstehende Ref.) durch Hinzunahme der Reibung modificiren. Von letzterer wird angenommen, dass sie ebenfalls mit der Tiefe variabel sei und zwar mit zunehmender Tiefe abnimmt, wobei wieder die im vorigen Ref. genannten Grenzfälle 1. und 2. unterschieden werden.

A. S.

E. Kohl. Ueber die Linienintegrale der Elasticitätsgleichungen. Monatsh. f. Math. **9**, 215-232.

Unter Linienintegralen versteht Verf. eigentümlicher Weise (ganz im Gegensatz zu dem üblichen Sprachgebrauch) Lösungen von der Form einer Exponentialfunction, in deren Exponenten eine complexe lineare Verbindung der Variabeln x, y, z, t steht. Die gewöhnliche Bezeichnung würde sein: gedämpfte ebene Wellen. Verf. untersucht in allgemeinster Weise die Beziehung zwischen den Parametern der Lösung und den Constanten des elastischen Mittels; er unterscheidet den longitudinalen und den transversalen Typus. Ausserdem werden nach der Zahl der Grenzflächen Körperwellen, Oberflächenwellen und Kantenwellen unterschieden. Die Körperwellen folgen den bekannten Gesetzen; wenn keine innere Reibung vorhanden ist, pflanzen sie sich notwendig ohne Dämpfung fort. Specieller werden die Oberflächenwellen behandelt. Verf. sucht zu zeigen, dass beim Vorhandensein einer Grenzebene Wellen möglich sind, die an der Oberfläche entlang laufen, mit geringerer Geschwindigkeit wie die Körperwellen, und die nach dem Innern hin schnell an Stärke abnehmen, auch wenn keine innere Reibung vorhanden ist. Allerdings werden dabei die Grenzbedingungen zum Teil unberücksichtigt gelassen. Diese Oberflächenwellen haben ein specielles Interesse für die Erdbebentheorie, durch welche Verf. zu seiner Arbeit angeregt ist. Kantenwellen sind nur beim Vorhandensein zweier Grenzebenen möglich; sie laufen längs der Kante der beiden Grenzebenen entlang und nehmen von da aus nach dem Innern rapide ab. [Uebrigens scheinen genauere Erdbebenbeobachtungen zu zeigen, dass die längs der Oberfläche fortschreitenden Wellen garnicht constante Wellenlänge haben, also garnicht zum Typus der gedämpften ebenen Wellen gehören; dies würde damit stimmen, dass Verf. den Grenzbedingungen bei ebenen Oberflächenwellen nicht vollständig genügen kann, dass also dieser einfachste Typus auch theoretisch unmöglich ist.] A. S.

H. Lamb. On waves in a medium having a periodic discontinuity of structure. Manchester Proc. **42**, No. 3, 1-20.

L. DE LA RIVE. Sur la propagation d'un allongement graduel dans un fil élastique. Arch. sc. phys. (4) **6**, 380-381.

C. BACH. Elasticität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 18 Tafeln in Lichtdruck. 3. vermehrte Aufl. Berlin: J. Springer. XIX u. 570 S. 8°.

Wir hatten schon zweimal Gelegenheit, auf die grossen Vorzüge des gediegenen Werkes hinzuweisen. Die schnelle Aufeinanderfolge der Auflagen beweist wohl am besten, wie berechtigt der grosse Anklang ist, welchen das Werk von seinem ersten Erscheinen ab gefunden hat. Da die Vorzüge des Werkes in der Besprechung der ersten Auflage hervorgehoben sind, genügt hier ein kurzer Hinweis auf die neue Auflage.

F. K.

G. WILSON. On a method of determining the reactions at the points of support of continuous beams. Lond. R. S. Proc. **62**, 268-279. [Nature **57**, 238.]

Der Verf. benutzt bei seinen Berechnungen das von Bresse für drei Auflagerpunkte eines Trägers aufgestellte Princip: Die Verrückung irgend eines Punktes zufolge der Deformation des Balkens ist das Resultat der Verrückungen, welche entstehen würden, wenn man annähme, dass alle äusseren Kräfte einzeln und nach einander zur Wirkung gelangten. Der Verf. meint, dass die von ihm hiernach entwickelte Methode für n Auflagerpunkte eine leichte und genaue Lösung für Probleme über continuirliche Träger giebt, besonders auch für solche, in denen das Trägheitsmoment variabel ist. Der durch eine Reihe von graphischen Erläuterungen begleiteten Darstellung sind in drei Tafeln mehrere durchgerechnete Zahlenbeispiele beigegeben. Lp.

H. J. TOMLINSON and K. PEARSON. Note on continuous beams. Phil. Mag. (5) **46**, 306-311.

Im Gegensatz zu dem Artikel von G. Wilson (vergl. das vorangehende Referat) betonen die Verf. die Leichtigkeit, mit welcher durch die graphischen Methoden die Lösung der Fragen über continuirliche Balkenträger bewirkt wird. „Wir haben es der Mühe für wert gehalten, die graphische Behandlung durch eine reducirte Zeichnung der zur völligen Lösung des Wilson'schen Beispieles erforderlichen Arbeit zu beleuchten, einschliesslich der Gestalt der elastischen Linie des gebogenen Tragbalkens. Die angewandte Methode ist eine, die in dem Zeichenamte des University College während der letzten 12 Jahre im Gebrauch gewesen ist; dieselbe ist allen älteren Studenten geläufig, da die volle Behandlung eines solchen Balkens in den Lehrgang des zweiten Jahres fällt. Ein guter Zeichner wird die in dem sehr reducirten, dieser Schrift

beigegebenen Plane angedeutete Arbeit innerhalb 6 bis 8 Stunden erledigen." Das Verfahren stützt sich im allgemeinen auf Culmann, weicht indess in einigen Punkten von dem continentalen Gebrauche ab.

Lp.

RIBIÈRE. Sur la flexion des pièces épaisses. C. R. **126**, 402-404.

Um das Problem der Spannungsbestimmung in einem Träger der Länge $2a$ und der Höhe $2h$ auf zwei Dimensionen zu reduciren, wird die Breite desselben sehr gross angenommen. Von allgemeinen Formeln für die Spannungen ausgehend, zeigt Verf., dass sich für die Druckcomponenten an der oberen und unteren Grenze des Querschnitts ausserordentlich einfache Näherungswerte ergeben, welche den wahren Werten sehr nahe kommen, vorausgesetzt dass h im Vergleich zu a nicht klein ist. Für solche h ändert sich aber die Beanspruchung nicht mehr mit h, so dass durch eine Steigerung der Dicke der Widerstand nicht mehr gesteigert wird. Eine graphische Darstellung zeigt, dass von einer gewissen Höhe ab das sogenannte Trapezgesetz nicht mehr mit der strengen Elasticitätstheorie im Einklang ist.

F. K.

RIBIÈRE. Sur la résistance des massifs épais. C. R. **126**, 1190-1192.

Als Resultat der ersten Untersuchung des Verf.'s über diesen Gegenstand hatte sich ergeben, dass die Trapezregel ihre Gültigkeit verliert, wenn die Höhe des Trägers über eine gewisse Grenze steigt. Der Verf. untersucht in dieser Notiz, wie man in einem solchen Falle die Druckverteilung zu bestimmen habe.

Es wird gezeigt, dass die Dilatation sehr angenähert ein gewisser Bruchteil des Druckes ist, welchen ein zum Querschnitte senkrecht stehendes Flächenelement erleidet, und schliesst dann weiter daraus, dass die beiden Normalcomponenten des Druckes einander gleich sind.

Im weiteren Verlauf lässt Verf. die Voraussetzung unendlicher Breite fallen und zeigt, dass auch für den allgemeineren Fall ein ähnliches Verfahren zulässig ist.

F. K.

W. H. MACAULAY. The stresses and deflection of braced girders. Phil. Mag. (5) **45**, 42-65.

Der Verf. wendet die von Maxwell entwickelten allgemeinen Formeln für die Spannungen und Durchbiegungen eines aus geradlinigen Verbindungsstücken bestehenden Rahmenwerks auf einige einfache Fälle ebener Gitter an, die durch Gewichte in ihrer Ebene belastet sind, und führt die Entwickelung in den einzelnen Fällen bis zur Angabe der Elemente für jedes Verbindungsglied durch.

Br.

A. BÉRARD. Sur la déformation des pièces comprimées et la stabilité des grandes charpentes. C. R. **126**, 1008-1010.

Für die Brückenträger ist bekanntlich nicht die Ausbiegung in der Ebene des Trägers, sondern die seitliche Ausbiegung des gedrückten Gurtes das Gefährlichste, welche entstehen kann, wenn die Stabilitätsgrenze überschritten ist. Verf. hat in einer Abhandlung die Stabilität genau untersucht und giebt in dem vorliegenden kurzen Auszuge die Hauptresultate wieder.

Fehlt eine seitliche Verstrebung, so muss die Ausbiegung befürchtet werden, sobald die Compression $N \geqq 20 \frac{EJ}{L^2}$ wird. Wird aber ein seitlicher Widerstand geleistet, welcher bei einer Abweichung y eines Elementes ds die Kraft $qyds$ erzeugt, so ergiebt sich die grösste zulässige Compression aus

$$N = \frac{20}{7}\sqrt{\frac{EJ}{L^2}(qL+2N)},\ \text{falls}\ qL^2+2N > 100\,\frac{EJ}{L^2}.$$

F. K.

E. Ovazza. Calcolo grafico delle trave elastiche sollecitate a flessione e a taglio. Torino Mem. (2) **48**, 63-81.

Von dem Princip der virtuellen Arbeit ausgehend, erhält Verf. zunächst einen Ausdruck für die relative Senkung zweier Punkte der elastischen Linie, von denen der eine zu einem Querschnitt gehört, welcher keine Drehung erleidet. In diesem Ausdruck ist nicht nur das Biegungsmoment, sondern auch die in den einzelnen Querschnitten wirksame Querkraft (Scheerkraft) berücksichtigt.

Aus dieser Formel wird dann für die verschiedenen in Betracht kommenden Fälle ein graphisches Verfahren abgeleitet, welches ohne Figuren nicht gut wiedergegeben werden kann. F. K.

M. Lévy. Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie. C. R. **126**, 1235-1240.

Nach verschiedenen Katastrophen, von denen Verf. diejenige bei Bouzey hervorhebt, haben sich Zweifel erhoben an der Zulässigkeit der sogenannten Trapezregel für die Berechnung des Druckes in einem horizontalen Schnitt durch die Mauer. Deshalb untersucht Verf. die Verteilung des Druckes vom Standpunkt der Elasticitätstheorie aus, und zwar für die beiden Querschnittsformen des Dreiecks und des Rechtecks. Die Untersuchung ergiebt bezüglich des Dreiecks genaue Uebereinstimmung beider Anschauungen bezüglich der Druckverteilung. Für einen rechteckigen Querschnitt weichen jedoch beide Theorien von einander ab. Die Trapezregel liefert ungünstigere Werte für die Beanspruchung als die strengere Betrachtungsweise, so dass vom Standpunkt der Sicherheit aus die Trapezregel vorzuziehende Werte liefert.

Erwägt man, dass jede Querschnittsform zwischen den beiden extremen Formen liegt, so wird man die Unglücksfälle nicht dem Ge-

brauch der Trapezregel zuschreiben dürfen und dieselbe auch ferner für die Berechnung der Bauwerke verwenden können. F. K.

M. Lévy. Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire. C. R. **127**, 10-15.

In diesem Artikel behandelt Verf., von der Elasticitätstheorie ausgehend, die Druckverteilung in einer Thalsperre von dreieckigem Querschnitte. Es werden zuerst die Differentialgleichungen für die drei Druckcomponenten samt den Grenzbedingungen unter der Voraussetzung aufgestellt, dass das Niveau des Wasserspiegels um die Höhe h oberhalb der Krone des Bauwerks liegt. Dann werden diese Formeln zunächst für den Fall $h=0$ integrirt, wobei sich das Resultat ergiebt, dass die Trapezregel in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Elasticitätstheorie ist.

Für den Fall eines Ueberdrucks kann man die Druckcomponenten durch Superposition zweier Bestandteile herstellen, von denen der erste genau derselbe ist, welcher dem erst behandelten besonderen Falle entspricht, während der andere dem Ueberdrucke zugehört. Die Trapezregel ist hier nicht mehr zulässig.

Zum Schlusse berechnet Verf. aus den Druckcomponenten die Verrückung. F. K.

L. Lecornu. Sur l'équilibre d'élasticité d'un bandage pneumatique. C. R. **127**, 168-171.

Die Aufgabe kommt darauf hinaus, die Druckverteilung in einem aus elastischer Masse gebildeten Hohlring zu finden, dessen Meridianschnitt von zwei concentrischen Kreisen gebildet wird, während auch der Aequatorialschnitt ein Kreisring ist.

In dem vorliegenden kurzen Auszug werden die fraglichen, nicht ganz einfachen Ausdrücke für die Druckcomponenten ohne Ableitung mitgeteilt: ihre Richtigkeit wird durch den Hinweis auf die stattfindenden Differentialgleichungen begründet. F. K.

G. Holzmüller. Ueber Spannungszustände, bei denen ein Spannungspotential und zugleich ein Verschiebungspotential besteht. Schlömilch Z. **43**, 216-229.

Die Abhandlung gehört zu der Reihe der Schriften, in denen der Verf. mit Umgehung der Infinitesimalrechnung und systematischer mathematisch-physikalischer Vorlesungen die Studenten, besonders die der technischen Hochschulen, möglichst früh und schnell an die in der Technik sich darbietenden Aufgaben heranbringen will. Ueber den Inhalt berichten wir mit den einleitenden Worten des Aufsatzes: „Der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure habe ich kürzlich eine Arbeit eingereicht, deren Resultate, wie mir scheint, von allgemeinerem Interesse sind. Es

handelt sich um Spannungszustände elastischer Körper, bei denen ein Spannungspotential nach Art des Newton'schen und zugleich ein Verschiebungspotential nach Art des logarithmischen besteht. Das letztgenannte Potential ermöglicht die Anwendung der conformen Abbildung, die meines Wissens bisher nur für die Saint-Venant'sche Torsionstheorie in der Elasticitätslehre Verwendung fand, und zwar in sehr beschränktem Masse für einige wenige Formen des prismatischen Stabes. Einiges möchte ich ohne Rechnungen hier mitteilen, anderes vervollständigen und verallgemeinern." Die durchgearbeiteten Beispiele schliessen sich an gewisse Probleme der inneren Ballistik bezüglich der Spannungen in den Geschützrohren an. 1. Feststellung der Grundhypothese am Einpunktproblem. 2. Unter den „Mehrpunktproblemen" setzen wir die Fassung des ersten her: „Es seien zunächst zwei cylindrische Oeffnungen in der unbegrenzten Platte, beide vom Radius a. In beiden werde dieselbe Spannung a angebracht. Wie gross sind die Spannungen in einem Punkte P, der von den Mittelpunkten die Entfernungen r_1 und r_2 hat?" Lp.

F. Zimmermaeckel. C. Julius Caesar's Rheinbrücke. Ein Reconstructionsversuch. Hoffmann Z. **29,** 481-499.

„Ich werde den Brückenschlag Caesar's mit einem modernen Brückenbau, wie er von unseren Pioniertruppen mittels unvorbereiteten Materials ausgeführt wird, in folgender Weise vergleichen. Zunächst werde ich einen solchen Brückenbau vorführen, sodann die Ereignisse besprechen, die Caesar veranlassten, die Brücke zu schlagen, darauf das 17te Kapitel des vierten Buches de bello Gallico unter Heranziehung der verschiedenen Auslegungen behandeln und zum Schluss noch eine kurze Darstellung des wahrscheinlichsten Verlaufes des Brückenbaues geben." Lp.

P. Wostrowsky. Versuch einer rationellen Lafettentheorie. Mitt. üb. Art. u. Genie **29,** 439-490.

Fortsetzung der in F. d. M. **28,** 733, 1897 angezeigten Abhandlung. „Die Resultate decken sich mit jenen der gebräuchlichen Lafettentheorie nicht, ja stellenweise stehen sie sogar im Widerspruche damit. Es hätte sonach vorstehende Theorie keinen Anspruch auf Berechtigung, wenn die jener zu Grunde gelegten Zustandsgleichungen unanfechtbar wären; dies ist nach meiner Auffassung nicht der Fall, und es haben sich bei Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen gestützter Massensysteme mehrfach Gelegenheiten ergeben, einzelne der Annahmen, auf welche jene Theorie aufgebaut ist, in Zweifel zu ziehen. Bei näherer Betrachtung lassen sich die Unterschiede beider Theorien daher ableiten, dass einmal der Trägheitswiderstand der Parallelbewegung zur Bahn im Schwerpunkte der Masse wirkend angenommen wurde, während er im anderen Falle im Stützpunkte angenommen wird. Letztere Annahme ergiebt sich als

notwendige Folge aus einer Reihe von Gleichungen, die als richtig anerkannt werden müssen, da sie bekannte mechanische Lehrsätze teils in erweiterter Form, teils in Abänderung auf den vorliegenden Fall enthalten, wie dies jedes Mal dadurch nachgewiesen wurde, dass das betreffende Gesetz als besonderer Fall aus der allgemeinen Gleichung entwickelt wurde." Lp.

C. Gautier. Note sur le calcul des dimensions transversales des bouches à feu en acier. Revue d'Art. **52**, 344-350.

Entwickelung einer Formel zur Berechnung eines aus n über einander geschobenen Hüllen gebildeten Geschützes nach gegebenen Bedingungen und unter Berücksichtigung des sogenannten Gadolin'schen Gesetzes, nach welchem der Widerstand eines derartig gebildeten Geschützrohres ein Maximum wird, wenn die Radien der auf einander folgenden Hüllen in geometrischer Progression stehen. Lp.

H. Haase. Mit Gott für Licht und Wahrheit. Offenes Schreiben an Seine Excellenz den Königlich Preussischen Staatsminister der öffentlichen Arbeiten in Berlin. Betreff: Neue Theorie der Ingenieurbauwerke. Mit Portrait des Verfassers. Regensburg: Commissionsverlag von Hermann Bauhof. 40 S. 8°.

Im Jahre 1897 hatte Verf. eine Theorie der parabolischen und elliptischen Bogen veröffentlicht, welche von den sonst allgemein angenommenen Grundsätzen ganz erheblich abweicht. Diese Theorie hatte eine durchaus abweisende Kritik seitens des bekannten Bauingenieurs Prof. Winkler erfahren, der es für angezeigt hielt, Verleger und Redactionen vor Werken wie dem eben erwähnten des Verf. ausdrücklich zu warnen.

Von der Unanfechtbarkeit seiner Lehre überzeugt, fühlt Verf. sich durch diese nach seiner Meinung ungerechtfertigte Kritik in seinem wissenschaftlichen Ansehen und in seiner Beamtenlaufbahn schwer geschädigt und richtet deshalb an den Minister der öffentlichen Arbeiten in Berlin das Gesuch, wegen dieser schweren Schädigung Remedur eintreten zu lassen. F. K.

Weitere Litteratur.

E. Glinzer. Grundriss der Festigkeitslehre. Zum Gebrauch an Handwerkerschulen, insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet. 2. Aufl. Mit 98 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln, sowie mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben. Dresden: G. Kühtmann. VIII u. 148 S. gr. 8°.

W. Rebber. Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung auf den Maschinenbau. Elementar behandelt zum Gebrauche für Studirende und in der Praxis. 3. Auflage. Herausgegeben von L. Hummel. Mittweida. Polytechnische Buchhandlung. XVI + 476 S. 8°.

A. Weickert und R. Stolle. Praktisches Maschinenrechnen. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Erfahrungswerte aus der allgemeinen und angewandten Mechanik in ihrer Anwendung auf den praktischen Maschinenbau. Erläutert durch zahlreiche der Praxis entnommene Beispiele und eingeleitet durch eine leichtfassliche Darstellung der für Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze des allgemeinen Buchstabenrechnens. Mit über 100 in den Text gedruckten Abbildungen. 3. Aufl. 6. und 7. Tausend. Berlin: Polytechnische Buchhandlung. A. Seydel. VII + 262 S. 8°.

K. Zillich. Statik für Baugewerkschulen und Baugewerkmeister. 2. Teil: Festigkeitslehre. Berlin: W. Ernst & Sohn. VII + 148 S. 8°.

P. Tait. On the directions which are most altered by a homogeneous strain. Edinb. Proc. **22**, 162-164.

N. Schiller. Ein paradoxer Schluss aus der Elasticitätstheorie. Kiew Naturf. Vers. 1898, 319.

W. Peddie. On torsional oscillations of wires. Edinb. Proc. **22**, 212-215: Edinb. Trans. **38**, 611-638. [Nature **58**, 239.]

C. Capillarität.

A. Griffiths. Diffusive convection. Phil. Mag. (5) **46**, 453-465.

Der Verf. leitet zuerst folgenden Satz ab: Wenn ein geschlossenes Gefäss in zwei durch eine Scheidewand getrennte Teile zerlegt ist, in deren unterem sich eine Salzlösung und in deren oberem sich Wasser befindet, und wenn durch die Scheidewand zwei verschieden lange Röhren gesteckt sind, die im Wasser gleiches Niveau haben, aber verschieden tief in die Salzlösung tauchen, so entsteht eine Druckdifferenz, die einen continuirlich cirkulirenden Strom in Richtung: Salzlösung, lange Röhre, Wasser, kurze Röhre, Salzlösung zur Folge hat. Dieser Strom muss, abgesehen von der durch Diffusion transportirten Salzmenge, auch direct durch Convection Salz mitführen. Alle einschlägigen Verhältnisse werden quantitativ unter Vernachlässigung der Viscosität an der Hand von Formeln untersucht, und zwar sowohl für Röhren von gleichem wie für solche von ungleichem Querschnitt. Auch für den Einfluss der Viscosität, der sehr gering ist, werden noch Formeln angegeben. Zum Schluss wird eine Versuchsanordnung mitgeteilt, die allerdings nur eine qualitative Uebereinstimmung mit der Theorie erkennen liess, aber zu exacten Messungen auch ungeeignet war. Br.

J. S. Townsend. Applications of diffusion to conducting gases. Phil. Mag. (5) **45**, 469-480.

Es werden die Formeln entwickelt für die zeitliche Aenderung des Druckes in einem Gase, das von den Wandungen des Gefässes absorbirt wird, während zugleich ein nicht absorbirbares Gas sich in demselben Gefäss befindet. Die Formeln werden ausgerechnet für den Fall zweier

parallelen Gefässwände, eines cylindrischen und eines kugelförmigen Gefässes. Dann wird eine specielle Anwendung auf ein teilweise ionisirtes Gas gemacht, von dem angenommen wird, dass die geladenen Atome an der Gefässwand haften bleiben und somit zum Drucke nichts beitragen können, während dies natürlich für die neutralen Molecüle nicht gilt. Br.

Kapitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

H. VON HELMHOLTZ. Vorlesungen über theoretische Physik. Herausgegeben von A. König, O. Krigar-Menzel, F. Richarz, C. Runge. Bd. III. Die mathematischen Principien der Akustik. Herausgegeben von A. König und C. Runge. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. X + 256 S. gr. 8°.

Von den Vorlesungen des universellsten Forschers auf dem Gebiete der mathematischen Physik ist Bd. **5**, enthaltend die „Elektromagnetische Theorie des Lichtes“, in F. d. M. **28**, 739-741, 1897, angezeigt worden; das Referat über Bd. **1**, Abt. 2, die „Dynamik discreter Massenpunkte“, befindet sich in diesem Bande S. 577-578.

Die gegenwärtigen „Vorlesungen über die mathematischen Principien der Akustik“ rechtfertigen vollauf die Erwartungen, welche man von dem Verf. der „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“ und der „Tonempfindungen“ hegen musste. Sowohl in Hinsicht der Handhabung aller Hülfsmittel der mathematischen Analysis als auch der Verknüpfung aller Herleitungen mit den Principien der Dynamik spürt man den Meister, der aus dem Reichtum seines in jahrelanger Arbeit erworbenen Besitzes freigebig das Beste spendet.

Dem Buche liegt als erste Quelle die Vorlesung zugrunde, die Helmholtz im Sommersemester 1892 gehalten hat. Das von B. Borchardt herrührende Stenogramm ist vervollständigt durch eine stenographische Nachschrift von A. Scheye. Die in diesen Aufzeichnungen fehlenden ersten 29 Paragraphen sind durch eine Nachschrift von A. König aus dem Jahre 1881 ergänzt worden; endlich ist der im Sommersemester 1892 nicht zum Vortrag gekommene Schluss durch Abdruck der Abhandlung über die Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (unter Fortlassung der ersten Paragraphen) geschaffen. Die ersten 29 Paragraphen sind noch von Helmholtz selbst durchgesehen worden.

Bei einem Werke, das den Stempel des Helmholtz'schen Geistes trägt, ist es nicht gut angängig, einzelne originale Partien besonders hervorzuheben. Wir begnügen uns damit, eine Uebersicht des Inhalts durch Abdruck der Haupttitel zu geben, und müssen wegen aller Einzelheiten auf das Werk selbst verweisen.

Erster Teil. Theorie der kleinen Oscillationen discreter Massenpunkte um eine Lage stabilen Gleichgewichtes. I. Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflusse einer elastischen Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung. II. Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflusse conservativer Kräfte in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage. III. Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluss einer elastischen Kraft und einer Dämpfung. IV. Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einfluss conservativer Kräfte mit Berücksichtigung der Reibung. V. Das Mitschwingen eines einzelnen Massenpunktes. VI. Das Mitschwingen eines Systems von Massenpunkten. VII. Der Hamilton'sche Satz. Uebergang auf continuirlich verbreitete Massen.

Zweiter Teil. Die Schwingungen von Saiten, elastischen Stäben und Luftsäulen. I. Die Schwingungen einer Saite. II. Die Schwingungen von elastischen Stäben und Luftsäulen.

Dritter Teil. Die Schallbewegung im Raume. I. Die allgemeinen Formeln. II. Die Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

Aus dieser Aufzählung ist ersichtlich, dass nicht alle mathematischen Fragen der Akustik zur Behandlung kommen; so fehlen die Untersuchungen über schwingende Platten gänzlich. Nichts desto weniger wird das Studium des Buches für jeden Freund exacter Forschung genussreich sein.

Lp.

J. Violle. Sur la vitesse du son dans l'air. C. R. **127**, 904-908.

A. Leduc. Sur la vitesse du son dans l'air sec à 0°. C. R. **127**, 1201-1203.

Gelegentlich einer Besprechung der Methoden, nach denen von verschiedenen Experimentatoren die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0° berechnet ist, hatte Leduc bemerkt, dass die von Violle und Vautier 1885 gefundene Zahl zu klein sei; man könne auch nicht angeben, um wie viel. Der Grund liege einmal darin, dass man mit Feuchtigkeit gesättigte Luft nicht als ein vollkommenes Gas betrachten dürfe, sodann darin, dass das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen für trockene und feuchte Luft nicht dasselbe sei. Dem gegenüber sucht Violle die Richtigkeit seiner Zahl aufrecht zu erhalten, indem er erörtert, welche Correctionen anzubringen sind, um aus der Schallgeschwindigkeit in feuchter Luft die in trockener zu ermitteln, und welchen Effect die einzelnen Correctionen für sich haben. Das Schwierigste bei der Verwertung ihrer an einer Röhrenleitung gemachten Beobachtungen sei gewesen, den Einfluss der Wände zu bestimmen, und dieser sei erheblicher, als die von Leduc verlangten Correctionen.

In seiner Erwiderung hält Leduc seinen Einwand aufrecht; an der Zahl von Violle und Vautier sei eine Correction von mindestens 0,2 m anzubringen, wodurch sich jene Zahl der von ihm angenommenen

(331,8 m) erheblich nähern würde. Er führt dann noch weitere Gründe an, die für die Richtigkeit seiner Zahl sprechen. Wn.

H. Lamb. On the velocity of sound in a tube, as affected by the elasticity of the walls. Manchester Mem. **42**, No. 9, 16 S.

A. Aignan. Sur la théorie des tuyaux à anche. C. R. **127**, 268-272.

In § 7 seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden" (J. für Math. **59**, Ostwald's Klassiker No. 80) hat Helmholtz die Luftbewegung in einer Röhre behandelt, deren eines Ende durch eine periodische Bewegungen ausführende Platte geschlossen ist, während das andere Ende offen ist. Die dort abgeleiteten Resultate dürfen nach des Verf. Ansicht nicht, wie die meisten Autoren meinen (auch Helmholtz selbst, vergl. dessen „Lehre von den Tonempfindungen"), auf Zungenpfeifen angewandt werden, weil die der Rechnung zugrunde liegende Annahme, dass die Zunge und die sie berührende Luftsäule gleiche Geschwindigkeiten haben, nicht zutrifft. Es wird dies daraus geschlossen, dass der Ton der frei schwingenden metallischen Zunge durch die Verbindung der Zunge mit einer Röhre nicht erheblich verstärkt wird. Die Verstärkung des Tones tritt erst beim Einblasen eines Luftstromes ein, dann aber bei beliebiger Röhrenlänge. Die durch die Zunge hervorgerufene periodische Unterbrechung des Luftstroms ist, ähnlich wie bei der Sirene, das Wesentliche, während die Resonanz der Röhre keine Rolle spielt. Der Verf. führt verschiedene Versuche an, die für die Richtigkeit seiner Ansicht sprechen. Wn.

C. Zeissig. Ein einfacher Fall der transversalen Schwingung einer rechteckigen elastischen Platte. Wiedemann Ann. **64**, 360-397; Diss. Göttingen 52 S. 8° (1897).

Ein Paar gegenüberliegender Seiten einer rechteckigen Platte ist zugeschärft und so eingespannt, dass die Punkte der Kanten keine Verschiebungen erleiden können, dass aber Drehungen der Randelemente nicht ausgeschlossen sind. Die beiden anderen Seiten sollen frei sein. Die fragliche Differentialgleichung mit ihren Grenzbedingungen ist von W. Voigt (Gött. Nachr. 1893; F. d. M. **25**, 1593) angegeben und integrirt. Der Verf. teilt die Lösung mit und stellt im Anschluss daran die transcendente Gleichung auf, welche die Tonhöhe bestimmt. Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt auf graphischem Wege. Dann werden die den sogenannten Einzellösungen zugehörigen Knotenlinien, welche den Paaren der Seiten parallel sind, bestimmt. Bei gewissen Verhältnissen giebt es aber auch Tonhöhen, denen mehrere von einander verschiedene particulare Lösungen des Schwingungsproblems zugehören. Durch Superposition solcher sogenannten mehrfachen Schwingungen entstehen dann andere Klangfiguren, welche für den Fall der Doppelschwingung, bei denen zwei particulare Lösungen vorhanden sind, be-

sprochen werden. Natürlich fallen die Knotenfiguren verschieden aus je nach dem Intensitätsverhältnisse der beiden Schwingungen, was sich bei den angestellten Versuchen geltend machen musste.

Verf. ist folgendermassen vorgegangen. Die Klangfigur, welche nach der Theorie einem bestimmten Intensitätsverhältnisse entspricht, wurde auf ein Blatt gezeichnet und unter die schwingende, mit Sand bestreute Glasplatte gelegt. Durch Probiren wird dann eine möglichst genaue Uebereinstimmung zwischen dem gezeichneten Bilde und der Sandfigur angestrebt, und nach Erreichung dieses Zieles wird die Sandfigur samt dem aufgelegten Bilde photographirt.

Auch die Schwingungszahlen fanden sich in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungsresultaten. F. K.

Ch. Berdellé. L'arithmétique des gammes. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 198-201.

Zur Verschmelzung der Tonleiter des Pythagoras und des Aristoxenos, die nach den Versuchen von Cornu und Mercadier beide ihre Berechtigung haben, berechnet Berdellé den Wert der Noten in Quintenaufstieg durch Multiplication mit $\frac{3}{2}$, nachdem er dem Grundton die beiden Werte 1 und $\frac{80}{81}$ gegeben hat. Auf diese Weise gelangt er dazu, für alle Töne Tonleitern zu bilden, die derjenigen für den Grundton ähnlich sind, indem er vier Noten aus der ersten Progression und drei aus der zweiten entnimmt. Diese Rechnung lässt sich, wie weiter gezeigt ist, durch Einführung des Zahlsystems mit der Grundzahl 8 sehr einfach gestalten. Lp.

G. Chicandard. La gamme déduite de la théorie des sons harmoniques et des sons résultants. Assoc. Franç. St. Étienne (1897), 248-252.

Die Obertöne 2, 3, 4, 5 führen zur Aufstellung dreier Tonleitern; die aus der Terz resultirenden Töne bestimmen eine vierte, die aus der Quinte eine fünfte. Da keine Tonleiter in strenger Weise den Theorien der Obertöne und der resultirenden Töne genügen kann, so ist die natürliche Tonleiter diejenige, welche diese Anforderungen mit grösster Näherung erfüllt. Dieselbe wird gekennzeichnet durch die Octav 2, die Quinte 1,49577, die Terz 1,25141. Lp.

N. Kasterin. Ueber die Dispersion der akustischen Wellen in einem nicht homogenen Medium. Amst. Versl. **6**, 530-531.

B. Theoretische Optik.

ISAAC NEWTON. Optik oder Abhandlungen über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts. (1704.) Uebersetzt und herausgegeben von W. Abendroth. (Ostwald's Klassiker der exact. Wissensch. No. 96, 97.) Leipzig: W. Engelmann. Bd. I (Buch I) 132 S. mit dem Bildnisse von Newton und 46 Textfiguren: Bd. II (Buch II und III) mit 12 Textfiguren.

Von diesem berühmten Werke gab es bisher noch keine deutsche Uebersetzung; und da auch die englischen Ausgaben wie die französischen und lateinischen Uebersetzungen heutzutage nur sehr schwer zugänglich sind, so muss das Erscheinen der beiden Bändchen freudig begrüsst werden. Handelt es sich doch um ein grundlegendes und eminent klassisches Werk, das nicht bloss historischen Wert hat, sondern das auch heute noch von jedem Studirenden der Mathematik und Physik mit Nutzen gelesen wird. Seine Anschaffung ist durch die vorliegende billige Ausgabe jedem ermöglicht.

Die Bedeutung von Newton's Optik ist so bekannt und so vielfach geschildert, dass es unnötig ist, an dieser Stelle darauf näher einzugehen. Die deutsche Uebersetzung, der die dritte englische Ausgabe (1721), die letzte von Newton's eigner Hand, zu Grunde liegt, giebt das Original in klarer, leicht verständlicher Darstellung wieder. Hinzugefügt ist ein kurzer Lebensabriss Newton's, wie eine grössere Zahl erläuternder Anmerkungen. Zur Erleichterung der Uebersicht wäre noch die Beigabe eines Inhaltsverzeichnisses erwünscht gewesen. Wn.

SILV. P. THOMPSON. Light visible and invisible. London: Macmillan and Co. XII + 294 S. (Nature 57, 506-507.)

W. KLINCKERT. Das Licht, sein Ursprung und seine Function als Wärme, Elektricität, Magnetismus, Schwere und Gravitation. Leipzig: W. Friedrich. 104 S. 8°.

J. D. EVERETT. On dynamical illustrations of certain optical phenomena. Phil. Mag. (5) 46, 227-243.

Verf. betrachtet Ketten von schwingenden Partikeln, die sich gegenseitig beeinflussen, ohne aber Elemente eines elastischen Mediums zu sein. Das Gesetz ihrer Beeinflussung wird, wenn μ eine Constante und y_1, y_2, y_3 die Ordinaten dreier aufeinander folgenden Partikeln bedeuten, in die Differentialgleichung gefasst: $y_2'' = -\mu(y_2-y_1) - \mu(y_2-y_3)$. Der Einfachheit wegen wird vorausgesetzt, dass alle Partikeln einfache harmonische Schwingungen mit derselben Periode und denselben oder entgegengesetzten Phasen beschreiben. Die unter dieser Voraussetzung aufgestellten Formeln geben einen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Schwingungszahl in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Es existirt ein Maximum der Schwingungszahl, unterhalb dessen jeder Schwingungszahl

zwei Wellenlängen entsprechen, die durch eine einfache Beziehung mit einander verbunden sind, d. h. jede einfache harmonische Schwingung einer Partikel kann durch zwei verschiedene Wellenbewegungen völlig und gleichwertig dargestellt werden.

Eine weitere Ueberlegung ergiebt, dass das Gleiche nicht allein von zwei, sondern von zwei Reihen unendlich vieler Wellenbewegungen (entgegengesetzter Richtungen) geleistet wird. Geometrisch ausgesprochen, heisst dies: Durch eine Reihe von Punkten mit äquidistanten Abscissen auf der Curve einer einfachen harmonischen Schwingung lässt sich immer eine doppelte Reihe unendlich vieler einfacher harmonischer Schwingungscurven von andern Wellenlängen legen. Dem Maximum der Schwingungszahl entspricht dagegen nur eine Wellenlänge. Oberhalb des Maximums erhält man überhaupt keine Werte für Wellenlängen mehr, d. h. Wellen von so hoher Schwingungszahl können als einfache harmonische Schwingungen in die Kette der Partikel nicht eindringen. Eine besondere Beweisführung ergiebt vielmehr, dass eine derartige Schwingung, auf die erste Partikel stossend, in der Kette eine oscillirende Bewegung hervorruft, bei der jede folgende Partikel die entgegengesetzte Phase der ersten, aber mit in geometrischer Reihe abnehmender Amplitude hat. Die Abnahme der Amplitude ist um so grösser, je höher die Schwingungszahl ist. Die auf diese Art zu Stande kommende Zwangsbewegung hat einen Energieverlust zur Folge, der zur Erklärung der Fluorescenz benutzt werden kann. Des weiteren wird der Weg zur Behandlung stehender Schwingungen der Partikelkette angegeben und eine auf Specialfälle eingehende Anwendung auf die Bewegung zweier sich gegenseitig störenden Pendel gemacht. Br.

O. Lodge. On the question of absolute velocity and on the mechanical function of an aether, with some remarks on the pressure of radiation. Phil. Mag. (5) **46,** 414-426.

Allgemeine Ueberlegungen über Fernübertragung, Aetherspannung und dergl. Br.

W. Sutherland. Relative motion of the earth and aether. Phil. Mag. (5) **45,** 23-31.

Der Aufsatz legt dar, dass der Versuch von Michelson und Morley (vergl. F. d. M. **19,** 1084, 1887) für die Frage, ob die Erde bei ihrer Bewegung den Lichtäther mit sich reisst oder ihn durchdringt, nicht entscheidend sein könne, da die Methode der optischen Justirung des Apparates nicht einwandfrei sei. In wiefern dies der Fall sein soll, wird durch Formeln und mathematische Entwickelungen näher präcisirt. Br.

W. Wien. Ueber die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen. Wiedemann Ann. **65,** Beilage, I-XVIII.

Die Arbeit bildet ein der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Düsseldorf erstattetes Referat. Dabei hat sich der Verf.

nicht die Aufgabe gestellt, einen litterarischen Bericht über die unzählbaren Theorien, die den Lichtäther zum Gegenstande haben, zu liefern, sondern er hat nur die Fragen erörtert, die man auf Grundlage der Maxwell'schen Theorie in Betreff der Beweglichkeit des Aethers stellen kann.

Macht man die Annahme, dass dem Aether Beweglichkeit zukommt, so folgt aus der Maxwell'schen Theorie mit Strenge, dass er unter dem Einfluss der Druckkräfte, die ein veränderliches elektromagnetisches System erzeugt, Bewegungen ausführen muss. Die Grundzüge für die Berechnung dieser Strömungen hat Helmholtz unter der Voraussetzung gegeben, dass die Trägheit und Zusammendrückbarkeit des Aethers Null ist. Doch hat er seine Formeln nicht auf specielle Beispiele angewandt, die gestatten, die Theorie an der Erfahrung zu prüfen. In der vorliegenden Arbeit werden nun zwei solche Beispiele entwickelt. Das erste bezieht sich auf die Strömungen, die im Aether erregt werden durch einen elektrischen Doppelpunkt, der in sehr kleinen Entfernungen von einander gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität trägt, die der Zeit proportional zunehmen. Die sich ergebenden Aetherströmungen sind hydrodynamisch unmöglich. Zweitens wird ein elektrischer Punkt von constanter Ladung betrachtet, der sich mit constanter Geschwindigkeit durch den Raum bewegt. Unter der Annahme, dass die Trägheit des Aethers Null ist, ist dieser Fall von Heaviside behandelt, und aus dessen Formeln folgt, dass keine Strömungen des Aethers eintreten. Wien behandelt sodann dasselbe Beispiel unter der Annahme, dass die Trägheit des Aethers von Null verschieden ist. Dann ergeben sich für die Strömungen des Aethers Ausdrücke von derselben Form wie bei kreisförmigen Wirbelringen. Weiter bietet die Reflexion elektromagnetischer ebener Wellen an der Grenze bewegter Isolatoren ein Beispiel dar, wo die Spannungen im Aether Bewegung hervorrufen. Um den Grenzbedingungen zu genügen, muss hier eine Bewegung des Aethers angenommen werden, und zwar muss er sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen wie die bewegte Platte. Doch gilt dies nur für kleine Geschwindigkeiten.

Auch die Folgerungen aus der Annahme ruhenden Aethers werden vom Verf. erörtert; doch werden hieran keine analytischen Entwickelungen geknüpft, hinsichtlich letzterer vielmehr auf eine Arbeit von H. A. Lorentz (cf. F. d. M. **25**, 1632, 1893/1894) verwiesen. In der ausführlich durchgearbeiteten Theorie des letztgenannten Autors erweist sich die Annahme unbeweglichen Aethers als vollkommen ausreichend. Allerdings entsteht, wie Wien bemerkt, bei consequenter Durchführung der Theorie eine Schwierigkeit principieller Natur.

Zum Schluss werden die hauptsächlichsten Experimente zusammengestellt, die sich auf die Frage des ruhenden oder bewegten Aethers beziehen, und es wird auf weitere Experimente hingewiesen, deren Anstellung zur Entscheidung der Frage erwünscht ist. Wn.

J. Walker. On the admissible width of the slit in the interference experiments. Phil. Mag. (5) **46,** 472-478.

Der Verf. untersucht den Einfluss der Spaltbreite bei dem Fresnel'schen Fundamentalversuch für Interferenz (mit zwei Spiegeln oder dem Biprisma) und findet, dass eine wachsende Verbreiterung des Spaltes erst eine Schwächung des Interferenzphänomens, dann eine Umkehrung des Ortes von hellen und dunklen Banden, dann wieder eine Schwächung dieses Systems, darauf eine Wiederherstellung des ersten Systems und so fort in periodischer Wiederholung zur Folge hat. Nach einer Fussnote soll das gleiche Resultat bereits 1892 von Fabry abgeleitet sein (vergl. F. d. M. **24,** 991, 1892). Br.

J. Walker. On the orientation of the slit in interference experiments. Phil. Mag. (5) **46,** 553-557.

Eine Untersuchung des Einflusses, den eine falsche Orientirung des Spaltes auf das Interferenzphänomen bei dem Fresnel'schen Fundamentalversuch ausübt. Br.

Ch. Fabry et A. Perot. Sur une méthode de détermination du numéro d'ordre d'une frange d'ordre élevé. C. R. **126,** 1561-1564.

A. Perot et Ch. Fabry. Sur la détermination des numéros d'ordre de franges d'ordre élevé. C. R. **126,** 1624-1626.

Lässt man einen monochromatischen Lichtbündel durch eine Schicht, die von zwei ebenen parallelen versilberten Glasflächen begrenzt ist, hindurchfallen und beobachtet das durchgegangene Licht in einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr, so sieht man concentrische Ringe, ähnlich den Newton'schen Ringen. Wird der Apparat gleichzeitig von zwei Strahlungen verschiedener Wellenlänge, λ und λ' $(\lambda > \lambda')$, beleuchtet, so erscheinen zwei Ringsysteme. Da zu jedem Punkte des Gesichtsfeldes ein bestimmter Wegunterschied der interferirenden Strahlen gehört, so ist die Bedingung dafür, dass der K^{te} Ring des ersten mit dem $(K+m)^{\text{ten}}$ Ringe des zweiten Systems zusammenfällt,

$$K = \frac{m\lambda'}{\lambda-\lambda'},$$

während für

$$K = \frac{(m-\frac{1}{2})\lambda'}{\lambda-\lambda'}$$

der $(K+m)^{\text{te}}$ Ring des zweiten Systems in der Mitte zwischen dem K^{ten} und $(K+1)^{\text{ten}}$ Ringe des ersten Systems liegt; letztere Lage wird als Discordanz bezeichnet. Durch Zählen der Zahl der Coincidenzen, resp. der Discordanzen, kann man K recht genau bestimmen.

Weiter wird angegeben, wie man durch zweckmässige Wahl von λ bei gegebenem λ', sowie durch Aenderung des Abstandes der versilberten Glasflächen den genauen Wert von K in dem Falle ermitteln

kann, dass der Ort der Coincidenzen nicht genau beobachtet werden kann, was für kleine Werte von $\lambda - \lambda'$ stattfindet. Wn.

E. Edser and C. P. Butler. A simple method of reducing prismatic spectra. Phil. Mag. (5) **46**, 207-216.

Die Verf. geben ein Mittel zum directen Messen von Wellenlängen im Prismenspectroskop an, indem sie auf dem Spalt eine dünne Lamelle (praktisch Luft zwischen zwei halb versilberten Glasflächen) von bekannten Constanten anbringen, die durch Interferenz des direct durchgehenden Lichtes mit zweimal im Innern der Lamelle reflectirtem Lichte ein System von Interferenzstreifen erzeugen, das sich über das Spectrum legt und somit, da sein Winkelwert ein für allemal berechnet werden kann, direct als Massstab zu benutzen ist. Die nötigen Formeln zur Berechnung und zur Aufsuchung der günstigsten Anordnung werden gegeben. Br.

J. Macé de Lépinay. Sur les franges des caustiques et les arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel. Journ. de Phys. (3) **7**, 209-216.

In dem Aufsatze, der einen Auszug aus einer grösseren, in den Annales de la Faculté des Sciences de Marseille 1898 veröffentlichten Abhandlung bildet, weist der Verf., wie schon in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. **25**, 1617, 1893/1894), auf die Analogie zwischen den Fransen der kaustischen Flächen und den überzähligen Bogen des Regenbogens hin. Beides sind reine Interferenzerscheinungen, die dadurch zu Stande kommen, dass die Wellenfläche aus zwei in einer Kante zusammenstossenden Schalen besteht, die durch den beobachteten Punkt zu verschiedener Zeit, also mit einer Phasendifferenz hindurchgehen. Die Intensitätsformel hat für beide Erscheinungen genau dieselbe Form; sie ist für die überzähligen Bogen zuerst von Mascart abgeleitet (cf. F. d. M. **20**, 1126, 1888). Der Verf. giebt eine kurze Ableitung der beiden in Rede stehenden Formeln und zeigt weiter durch eine Zahlentabelle und eine graphische Construction, dass die von Airy und Mascart für den Regenbogen aufgestellten Formeln, die bis zum ersten Airy'schen Maximum einen ganz verschiedenen Verlauf haben, darüber hinaus fast vollständig übereinstimmende Resultate ergeben. Wn.

J. Macé de Lépinay. Sur les franges des caustiques et les arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel. Marseille Ann. **8**, 187-200.

G. Sagnac. Théorie géométrique de la diffraction à l'infini des ondes planes par un écran percé de fentes parallèles. Journ. de Phys. (3) **7**, 28-36.

Schwingungen von gleicher Periode und Richtung lassen sich bekanntlich ebenso zusammensetzen wie Kräfte, wobei an Stelle der Inten-

sität der Kraft die Amplitude der Schwingung, an Stelle der Richtung der Kraft die Phase tritt (Fresnel's Parallelogramm). Wendet man diese Regel auf die an einem Spalt gebeugten parallelen Strahlen an, so ergiebt sich, da die von den einzelnen Elementen des Spaltes ausgehenden Schwingungen gleiche Amplitude haben, während ihre Phasen dem Abstande vom Spaltrande proportional sind, folgendes Resultat: Auf einem Kreise vom Radius $R = \lambda : 2\pi \sin \vartheta$ (λ die Wellenlänge, ϑ der Winkel der gebeugten Strahlen gegen die Normale des Spaltes) trage man einen Bogen gleich der Breite a des Spaltes auf und ziehe die zugehörige Sehne. Ihre Länge stellt die Amplitude, ihre Richtung die Phase der resultirenden Schwingung dar. Man kann dasselbe Verfahren auf mehrere parallele Spalten, resp. auf ein Gitter anwenden und erhält dann durch elementare Rechnungen die bekannten Intensitätsformeln, ohne dass man, wie bei den üblichen Ableitungen, Integrationen auszuführen hat. Allerdings ist dieses Verfahren nur für das specielle, nicht für allgemeinere Differentiationsprobleme verwendbar. Wn.

K. Schwarzschild. Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Münch. Ber. **28**, 1898, 271-294.

In den Arbeiten von Struve und E. v. Lommel (über letztere vergl. F. d. M. **16**, 924, 1884) sind die Beugungsfiguren in Fernröhren zuerst exact behandelt. Doch beschränken sich beide Autoren auf die Betrachtung von Einstellungen in ziemlicher Nähe des Focus. Ihre Entwickelungen bedürfen daher einer Ergänzung, die auch Einstellungen weit ausserhalb des Focus berücksichtigt. Die für letzteren Fall gültigen Formeln werden in der vorliegenden Arbeit abgeleitet. Aus dem Huygens'schen Princip erhält man für die Lichtintensität in irgend einem Punkte P hinter dem Objectiv den Ausdruck

$$I = S^2 + T^2,$$

wo

$$W = S + iT = \frac{mi}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2} im (r^2 - 2rp\cos\varphi + p^2)}\, r\,dr\,d\varphi$$

ist. Ferner ist

$$p = \frac{v}{u} \frac{1}{2\sin\frac{\vartheta_1}{2}}, \qquad m = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{fu}{f-u} 4\sin^2\frac{\vartheta_1}{2}, \qquad r = \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta_1}{2}};$$

u und v sind die relativen Coordinaten von P in Bezug auf den Brennpunkt des Objectivs, und zwar u parallel, v senkrecht zur Axe; f ist der Abstand des Brennpunktes von der in das Objectiv eingetretenen (kugelförmig angenommenen) Wellenfläche, ϑ_1 der halbe Oeffnungswinkel des Objectivs. Dabei ist der constante Factor von W passend gewählt, und die Glieder dritter Ordnung von $2\sin\frac{\vartheta}{2}$ sind vernachlässigt. Das

Integral W wird nun in die Differenz zweier andern zerlegt, $W = W_1 - W_2$, so dass die Grenzen von r in W_1 0 und ∞, in W_2 dagegen 1 und ∞ werden. Dann folgt

$$W_1 = 1, \quad W_2 = mi\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}im(r^2+p^2)} J_0(mpr)\, r\, dr,$$

unter J_0 die Bessel'sche Function verstanden. Durch Benutzung der ersten Glieder der semiconvergenten Reihe für J_0, die ausreichend sind, so lange nicht p sehr klein ist, d. h. so lange es sich nicht um Punkte nahe der Axe handelt, und durch teilweise Integration ergiebt sich weiter

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi mp}} \frac{e^{-\frac{1}{2}im(1-p)^2 - \frac{1}{4}\pi i}}{1-p} - \frac{1}{\sqrt{2\pi pm}} \frac{e^{-\frac{1}{2}im(1+p)^2 + \frac{1}{4}\pi i}}{1+p} + R.$$

Eine Discussion des Restes R lässt erkennen, dass R vernachlässigt werden kann, wenn nicht p nahe $= 0$ oder nahe $= 1$ ist. Eine Umformung des Integrals W_2 ergiebt ferner folgende andere Formel, die auch für grössere p, insbesondere für $p = 1$, d. h. für Randpunkte, brauchbar ist:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi mp}} \frac{e^{-\frac{1}{2}im(1+p)^2 + \frac{1}{4}\pi i}}{1+p} + \frac{1}{\sqrt{2\pi mp}} \frac{e^{-\frac{1}{2}im(1-p)^2 - \frac{1}{4}\pi i}}{1+\sqrt{p}}$$
$$+ i\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}mi(r-p)^2 - \frac{1}{4}\pi i}\, dr + R';$$

und das in letzterem Ausdruck auftretende Integral lässt sich mittels gewisser, von Lommel in der citirten Arbeit abgeleiteter Formeln berechnen. R' kann wieder vernachlässigt werden. So sind die Mittel gewonnen, um für ein grosses m, d. h. weit ausserhalb des Focus, die Intensität I des Beugungsbildes zu berechnen.

Aus den Formeln werden folgende Schlüsse gezogen, die eine einfache Deutung des anscheinend so verwickelten Verlaufs der Lichtintensität geben: Ueber die mittlere Intensität lagern sich zwei Wellenzüge, deren einzelne Windungen nahezu die Form von Sinuscurven haben. Die Schwankungen der Intensität um den Mittelwert betragen in der Nähe des halben Radius für $m = 900$ (was einer Verschiebung von 3 cm aus dem Focus bei einem Fernrohr von 30 cm Oeffnung und 3 m Brennweite entspricht) nur etwa 11 Procent. Stärker sind die Schwankungen am Rande des geometrischen Bildes. Hier beträgt die Intensität $\frac{1}{4}$ der Durchschnittsintensität, sie sinkt nach aussen, in den geometrischen Schatten hinein, beständig und schnell; nach innen wächst sie und erreicht ein Maximum. Die ganze Beugungsfigur erscheint demnach umgeben von einem hellen, durch einen relativ dunklen Zwischenraum abgetrennten Ringe, der mit wachsendem m an scheinbarer Breite und damit an Deutlichkeit zunimmt, während die Breite der Ringe, die im mittleren Gebiet der Beugungsfigur auftreten, unabhängig ist von der Grösse der Verschiebung aus dem Focus. Wn.

K. Strehl. Die Berechnung der Beugungsbilder. Pr. Gymn. Erlangen. 32 S. 8°.

Der Verf. wendet mehrere Formeln, die er teils in seiner „Theorie des Fernrohres auf Grund der Beugung des Lichtes“ (cf. F. d. M. **25**, 1663, 1893/1894), teils in mehreren Aufsätzen in der Zeitschrift für Instrumentenkunde aufgestellt hat, zur Berechnung numerischer Tabellen an. Diese beziehen sich 1. auf die Helligkeit im Mittelpunkte, 2. auf die in einem beliebigen Punkte kreisförmiger Beugungsbilder, 3. auf die Helligkeit in einem beliebigen Punkte rechteckiger Bilder, 4. auf die Lichtverteilung im aplanatischen Brennraum, 5. auf die André'schen Beugungserscheinungen, die dadurch entstehen, dass man das Objectiv des Fernrohres abwechselnd zonenweise abblendet. Zum Schluss wird ein von Fraunhofer gelegentlich ausgesprochener Satz, der sich auf die Beugung an einer ringförmigen Oeffnung bezieht, bewiesen. Wn.

H. Nagaoka. Diffraction phenomena in the focal plane of a telescope with circular aperture, due to a finite source of light. Phil. Mag. (5) **45**, 1-23.

Der Verf. giebt eine neue Entwickelung für die Theorie der Fraunhofer'schen Beugungserscheinung in einem astronomischen Fernrohr für den Fall einer Lichtquelle von endlicher Ausdehnung. Es wird zuerst die Formel für die resultirende Intensität im Mittelpunkte des Bildes entwickelt, wenn das leuchtende Object eine kreisförmige Scheibe von überall gleicher Intensität ist. Dabei erweist sich die Function $J_0^2(x)+J_1^2(x)$ (J_0 und J_1 sind die Bessel'schen Functionen) als wichtig, und zwar hauptsächlich für diejenigen Werte von x, in denen die erste und zugleich damit auch die zweite Ableitung verschwindet. Diese Function, insbesondere die gedachten Stellen, werden daher analytisch graphisch und rechnerisch untersucht. Es ergiebt sich, dass die Intensität im Mittelpunkte des Bildes fast nur von einer kleinen Zone (bis zum ersten der gedachten Werte von x) um den Mittelpunkt des leuchtenden Objectes herrührt, dass also bei einer leuchtenden Scheibe von unendlich grosser Ausdehnung die Intensität im Mittelpunkte des Bildes kaum wesentlich grösser ist als bei einer solchen vom Radius der ersten Zone. Für Objecte von geringerer Ausdehnung nimmt aber die Intensität im Mittelpunkte des Bildes ab, und zwar erst langsam, dann schneller und zum Schluss wieder langsamer. Es wird dann, und zwar wieder unter Benutzung der obigen Function, die auch hierfür von Bedeutung ist, die Intensität am Rande des Bildes untersucht. Diese nähert sich mit wachsender Ausdehnung des Objectes dem Werte $\frac{1}{2}$, wenn 1 die Intensität im Mittelpunkte des Bildes ist. Allgemein ist das Verhältnis beider Intensitäten für eine Lichtquelle vom Radius a:

$$\frac{1}{2}-\frac{\lg 4a}{\pi^2 a}-\frac{0,1654}{a}+0,016\frac{\cos 4a}{a^2}\cdots.$$

Hieran schliesst sich die Entwickelung der Intensität für einen beliebigen Punkt des Bildfeldes. Auch hier tritt die obige Function wieder auf, die Rechnung wird aber natürlich umständlicher, indessen auch bis zur Angabe von Zahlenwerten und Formeln durchgeführt, nach denen im gegebenen Falle eine mechanische Quadratur ausführbar sein würde, wenigstens für Punkte, die nicht in der Nähe des Bildrandes liegen. Für die letzteren Punkte muss eine besondere Entwickelung durchgeführt werden, deren Ergebnis ist, dass am Rande nicht eine discontinuirliche Aenderung der Intensität stattfindet, wie es die geometrische Optik annimmt, sondern eine ganz stetige, so dass ein wirklicher Bildrand nicht existirt. Man kann sich die resultirende Intensitätsverteilung veranschaulichen, indem man die Curven gleicher Intensität zieht, d. h. alle Punkte des Bildes, an denen dieselbe Intensität herrscht, verbindet und auf diese Weise ein System von Intensitätsniveaucurven (bei kreisförmigen Objecten natürlich concentrischen Kreisen) schafft. Diese Methode ist namentlich bei mehreren leuchtenden Objecten von Vorteil, weil man hier aus der Interferenz der verschiedenen Systeme graphisch die resultirenden Gesamtintensitäten ermitteln kann. Der Verf. wendet die Methode auf den Fall des Venusdurchganges an, in dem ein kleiner schwarzer Kreis einen grossen leuchtenden von innen berührt. Der schwarze Kreis wird aber als mit der Intensität $-i$ leuchtend fingirt, wenn der grosse als Vollkreis mit der Intensität i leuchtend angenommen wird. Es gelingt auf diese Art die Erklärung der sogenannten Tropfenerscheinung. Br.

H. Nagaoka. Diffraction phenomena in the focal plane of a telescope with circular aperture, due to a finite source of a light. Tokio Journ. **9**, 321-351.

S. A. Mitchell. Notes on the concave grating. Johns Hopkins Univ. Circ. **17**, 56-58.

Es handelt sich um die zuerst von Rowland (Phil. Magaz. 1883) untersuchten Erscheinungen, welche ein auf der concaven Seite einer Kugelfläche gezogenes Gitter mit äquidistanten Strichen im reflectirten Lichte zeigt. Für ein solches Gitter wird die Focallinie der von einem Punkte ausgegangenen, an dem Gitter gebeugten Strahlen ermittelt, eine Aufgabe, die schon von Rowland gelöst war. Ferner wird der Astigmatismus der in Rede stehenden Gitter untersucht, vermöge dessen das Bild einer punktförmigen Lichtquelle nicht einen Punkt, sondern eine Linie bildet. Ist diese Eigenschaft der krummen Gitter auch längst bekannt, so fehlte es bisher an einer Formel zur Berechnung der Grösse des Astigmatismus, d. h. der Länge der vorerwähnten Linie. Eine solche Formel wird hier zum ersten Male abgeleitet. Sie ergiebt, dass jene Länge bei der Rowland'schen Anordnung des Gitters vom Kugelradius unabhängig ist. Wn.

A. Schuster. Professor C. Runge and F. Paschen's researches on the spectra of oxygen, sulphur, and selenium. Nature **57**, 320-321.

Zuerst wird über die betreffende Abhandlung von Runge und Paschen aus Wiedemann's Ann. **61**, 641 berichtet. Danach begründet der Verf., warum er die Rydberg'sche Formel derjenigen von Kayser und Runge ($N = A - B/n^2 - C/n^4$) vorzieht. Lp.

J. Hartmann. Ueber eine einfache Interpolationsformel für das prismatische Spectrum. 25 S. gr. 4°. (Publicationen des astro-physikalischen Observatoriums zu Potsdam No. 42.) Leipzig: W. Engelmann in Commission.

Wawe-length tables of the spectra of the elements and compounds. Report of Committee. Brit. Ass. Rep. 1898, 313-433.

Bibliography of spectroscopy. Report of Committee. Brit. Ass. Rep. 1898, 439-519.

Die gegenwärtige Liste führt den Katalog der spectroskopischen Litteratur bis an das Ende des Jahres 1897. Gbs. (Lp.)

Lord Kelvin. The dynamical theory of refraction, dispersion and anomalous dispersion. Nature **58**, 546-547.

Auszug aus einem Vortrage in Section B der Brit. Ass. zu Bristol am 9. Septbr. 1898. Der Vortragende weist auf die hohe Bedeutung der Sellmeier'schen Arbeiten in Poggendorff's Ann. **145** und **147** hin (F. d. M. **4**, 514 ff., 1872), die durch die Rubens'schen Entdeckungen von Wellenlängen bis zur Grösse von 67 Mikrons eine glänzende Bestätigung erhalten haben. Lp.

P. H. Vincent. On the construction of a mechanical model to illustrate Helmholtz's theory of dispersion. Phil. Mag. (5) **46**, 557-563.

F. Koláček. Ueber das Lambert'sche Gesetz und die Polarisation der schief emittirten Strahlen. Wiedemann Ann. **64**, 398-408.

Der Verf. vergleicht seine Theorie (Wiedemann Ann. **39**; in den Fortschritten ist seinerzeit nur der Titel der Arbeit angegeben) mit der von Uljanin (cf. F. d. M. **28**, 757, 1897) auf Grund des Kirchhoff'schen Gesetzes entwickelten. Er bemerkt zunächst, dass die Beobachtungen der von glühendem Platin ausgesandten Lichtintensität durch seine Formeln noch etwas besser als durch die Uljanin'schen dargestellt werden, falls man nur die richtigen Werte für den Hauptbrechungs- und den Hauptabsorptionsindex, die 1890 noch nicht bekannt waren, benutzt und ausserdem einen Rechnungsfehler verbessert. Er leitet dann die Formeln

für die Intensität der aus einem absorbirenden Körper in ein durchsichtiges Medium gebrochenen Wellen nochmals her und findet für den Anteil der gesamten Strahlung an polarisirtem Lichte genau denselben Wert wie Uljanin. Für die Gesamtstrahlung selbst ergiebt sich ein etwas geringerer Wert, der aber von dem Uljanin'schen höchstens um 1 Procent sich unterscheidet. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Theorien besteht darin, dass die Kirchhoff-Uljanin'sche auf den beiden Sätzen der mechanischen Wärmetheorie beruht, sowie auf der Hypothese, dass vollkommen schwarze Körper existiren, während die Theorie des Verf. rein optisch ist und nur die eine Hypothese machen muss, dass die Amplitudenstrahlung im Innern eines glühenden Körpers vom Emissionswinkel nicht abhängt.

Nebenbei wird noch ein Satz der Beugungstheorie bewiesen. Wn.

W. Voigt. Ueber das bei der sogenannten totalen Reflexion in das Medium eindringende Licht. Götting. Nachr. 1898, 294-308.

Der Nachweis dafür, dass auch bei totaler Reflexion Licht in das zweite Medium dringt, wird gewöhnlich so geführt, dass die totale Reflexion an einer nahezu planparallelen Schicht eines optisch dünneren Mediums von sehr geringer Dicke erfolgt, die sich zwischen zwei optisch dichteren Körpern befindet. Dieser Beweis erscheint dem Verf. als umständlich, wie auch als nicht ganz befriedigend. Er hat daher folgende neue Versuchsanordnung gewählt. An ein rechtwinklig-gleichschenkliges Prisma, dessen an den spitzen Winkeln liegende Kanten mit e und f bezeichnet werden, wurde eine Fläche so angeschliffen, dass sie die Kante f abstumpfte und mit der Hypotenusenfläche einen Winkel von 20° einschloss. Eine ebene Welle, die nahezu normal auf die e gegenüberliegende Kathetenfläche fällt, wird dann an der Hypotenusenfläche, wie an der angeschliffenen Fläche total reflectirt. Schneiden sich die letztgenannten Flächen in der Kante a, so sieht infolge des bei der totalen Reflexion in das zweite Medium eingedrungenen Lichtes ein in der Nähe der Kante e befindliches, auf a eingestelltes Auge diese Kante in hellem Lichte strahlen. Die Erscheinung wird des näheren beschrieben, und dann wird gezeigt, dass sich einige der dabei gemachten Wahrnehmungen aus den bekannten Formeln für die bei der totalen Reflexion im zweiten Medium erregten Schwingungen vollständig erklären. Diese Schwingungen schreiten parallel der Grenze fort, und dabei nimmt ihre Amplitude normal zur Grenze schnell ab. Genauer discutirt werden die Werte für die Quadrate der Amplitudencomponenten der in Rede stehenden Welle, und die Abhängigkeit dieser Componenten vom Einfallswinkel wird graphisch dargestellt. Daraus ergiebt sich, dass in den im zweiten Medium fortgepflanzten Schwingungen die Farben mit grossen Wellenlängen relativ stärker auftreten als die mit kleinen. Wn.

A. PFLÜGER. Prüfung der Ketteler-Helmholtz'schen Dispersionsformeln an den optischen Constanten anomal dispergirender, fester Farbstoffe. Wiedemann Ann. **65**, 173-213.

A. PFLÜGER. Nachtrag zu vorstehender Abhandlung. Wiedemann Ann. **65**, 225-228.

A. PFLÜGER. Prüfung der Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion an den optischen Constanten des festen Cyanins. Wiedemann Ann. **65**, 214-224.

In den beiden ersten Arbeiten handelt es sich um die Prüfung der folgenden beiden Formeln:

$$n^2 - \varkappa^2 - 1 = \Sigma \frac{D\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2},$$

$$2n\varkappa = \Sigma \frac{Dg\lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2}.$$

Darin bezeichnet n den Brechungs-, $\varkappa$ den Absorptionsindex für senkrechte Incidenz; λ ist die variable Wellenlänge, λ_m, D, g sind positive Constanten, die in den verschiedenen Theorien verschiedene Benennungen haben; die Summe ist zu erstrecken über sämtliche schwingungsfähige Molekelgattungen, aus denen das Medium besteht. Bei anomal dispergirenden Körpern nimmt $\varkappa$ nur innerhalb der Absorptionsstreifen beträchtliche Werte an, ist aber ausserhalb dieser Streifen sehr klein. Da sich nun die bisherigen Messungen ausschliesslich auf die Zwischenräume zwischen zwei Absorptionsreihen beziehen, so war es von Interesse, durch Messung der Dispersion innerhalb eines Absorptionsstreifens die vollständige Formel an festen Farbstoffen zu prüfen; denn für Lösungen ist $\varkappa$ ebenfalls sehr klein. Behufs dieser Prüfung hat der Verf. für Cyanin und Fuchsin n und $\varkappa$ durch grössere Reihen sorgsamer Messungen bestimmt. Die Prüfung selbst geschah dann folgendermassen. Die Messungen ergaben direct die Curve

$$Y = \frac{2n\varkappa}{\lambda^3} = F(\lambda^2).$$

Diese Curve wurde nun in sieben Partialcurven zerlegt, d. h. $F(\lambda^2)$ wurde als Summe von sieben Gliedern der folgenden Form dargestellt:

$$F(\lambda^2) = \Sigma \frac{Dg}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2}.$$

Mit den für die Particularcurven gewonnenen Zahlen von D, g, λ_m wurde weiter die Curve

$$X_1 = \Sigma \frac{D(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2} = \Phi(\lambda^2)$$

berechnet und aus drei Punkten der letzteren unter Zuhülfenahme dreier beobachteten Wertepaare von n und $\varkappa$ die Constanten a, b, c in dem Ausdruck:

$$X_1 = \left(n^2 - x^2 - a - \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2\right)\frac{1}{\lambda^2}.$$

Endlich wurde mittels dieser Constanten a, b, c eine neue Curve

$$X_2 = \left(n^2 - x^2 - a - \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

bestimmt; und da die Curven X_1 und X_2 auch innerhalb des extrapolirten Gebietes mit genügender Genauigkeit einander anschmiegten (ausser im Rot), so wurde geschlossen, dass die obigen Formeln der Erfahrung genügen. In einem Nachtrage wird gezeigt, dass die Abweichungen im Rot sich aus fehlerhaften Messungen von x erklären. Bestimmt man x mittels der Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion, so erhält man auch hier Uebereinstimmung.

Gegen die Schlüsse des Verf. lässt sich geltend machen, dass die Zerlegung der Curve $F(\lambda^2)$ in sieben Partialcurven recht willkürlich ist, ebenso die Auswahl der oben erwähnten drei Punkte, dass ferner infolge der Ersetzung von $n^2 - x^2 - 1$ durch $n^2 - x^2 - a - \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2$, wenn diese Ersetzung auch physikalisch plausibel ist, die ursprüngliche theoretische Formel ganz den Charakter einer empirischen Formel annimmt. Nach des Referenten Ansicht sind daher die Schlüsse, die der Verf. aus seinen an sich sehr wertvollen Messungen zieht, nicht einwandfrei.

In der letzten Arbeit handelt es sich um die Prüfung folgender, von Ketteler für die Metallreflexion aufgestellter Formeln:

$$n^2 - x^2 = n_\varrho^2 - x_\varrho^2,$$
$$2 n_\varrho x_\varrho \cos\varrho = 2 n x.$$

Darin beziehen sich n, x auf senkrechten Einfall, n_ϱ, x_ϱ auf den Einfallswinkel ϱ. Da Messungen an Metallen die Richtigkeit dieser Formeln nicht bestätigt haben, wohl wegen der Schwierigkeit der Beobachtungen, so prüft der Verf. die Formeln an anomal dispergirenden Farbstoffen und findet genügende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen. Wn.

P. Drude. Die optischen Constanten des Natriums. Wiedemann Ann. **64,** 159-162.

Die Bestimmung, die nach der Reflexionsmethode geschah, ergab für den Brechungsexponenten n folgende Werte: 0,054 für die Linie D, 0,123 für Natriumlicht, 0,148 für blaues Licht. Der Verf. stellt sowohl die strengen als die Näherungsformeln zusammen, die zur Berechnung von n und x (Absorptionsindex) aus den beobachteten Grössen (Azimut des reflectirten Lichtes und relative Verzögerung) dienen. Die Formeln selbst entnimmt er teils aus einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. **22,** 1054), teils Winkelmann's Handbuch der Physik. Wn.

R. S. Bloch. **Absorption métallique de la lumière.** Journ. de Phys. (3) **7,** 69-80.

In der wesentlich experimentellen Arbeit, die den Zweck hat, die Absorption einer sehr concentrirten Fuchsinlösung zu bestimmen, wird der Effect einer speciellen Versuchsanordnung berechnet. Wn.

G. Walker. **The scattering of light by small particles.** Quart. J. **30,** 204-220.

Die Zerstreuung des Lichts durch kleine Teilchen ist auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie von Lord Rayleigh (Phil. Magaz. August 1881) behandelt. Dabei ist angenommen, dass jene Teilchen nichtleitend sind, während J. J. Thomson dasselbe Problem für den Fall vollkommener Leiter durchgeführt hat. In der vorliegenden Abhandlung, die sich dem Gange der Entwickelung nach an die von Rayleigh anschliesst, werden die Resultate der letzteren dahin modificirt, dass den Teilchen eine geringe Leitungsfähigkeit zugeschrieben wird. Die Grundgleichungen sind die folgenden:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{\mu}\right)=4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{4\pi k}{K}f\right),$$

$$4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g}{K}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{K}\right)\right\}=\frac{\partial a}{\partial t},$$

zu deren jeder noch 2 analoge hinzukommen. Darin bezeichnen f, g, h die Componenten der elektrischen Polarisation, a, b, c die der magnetischen Induction, K die specifische Inductionscapacität, μ die magnetische Durchdringbarkeit, k die Leitungsfähigkeit des Mediums. Für Wellen, die sich im freien Aether fortpflanzen, ist $k=0$, während K und μ die constanten Werte K_0 und μ_0 haben. Pflanzen sich die Wellen parallel z fort, so wird für den freien Aether obigen Gleichungen genügt durch

$$f=f_0\,e^{i(nt-\varkappa z)},\quad g=h=0;$$
$$b=b_0\,e^{i(nt-\varkappa z)},\quad a=c=0,$$

wo $\varkappa=\frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{n}{\varkappa}=V$ ist, und weiter ergiebt sich

$$b_0=4\pi V\mu_0 f_0,\quad V^2=\frac{1}{\mu_0 K_0}.$$

Sind nun zerstreuende Teilchen vorhanden, so haben für diese k und K andere Werte: $k=k_0+\delta k_0$, $K=K_0+\delta K_0$, während $\mu=\mu_0$ bleibt. Der Unterschied gegen Rayleigh besteht darin, dass dieser $\delta k_0=0$ annimmt; den Grund dafür, dass μ ungeändert bleibt, hat Rayleigh entwickelt. Infolge davon, dass k und K in den Teilchen andere Werte haben als im freien Aether, erhalten die früheren Componenten a, b, c, f, g, h Zusatzglieder $a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1$, die zunächst für den Fall entwickelt werden, dass δk_0, δK_0 kleine Grössen sind, deren

Quadrate vernachlässigt werden können. Die für die Zusatzglieder geltenden Differentialgleichungen folgen leicht aus den obigen Grundgleichungen; weiter ergeben sich durch Elimination von a_1, b_1, c_1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für f_1, g_1, h_1, deren einer durch das folgende, über das Volumen der Teilchen zu erstreckende Integral genügt wird:

$$f_1 = -\frac{1}{4\pi}\iiint dv\,\frac{e^{-i\varkappa\varrho'}}{\varrho'}\left\{\frac{4\pi in}{V^2 K_0}\left(f\,\delta k_0 + \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2(f\,\delta k_0)}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{K_0}\left(\frac{\partial^2(f\,\delta K_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(f\,\delta K_0)}{\partial z^2}\right)\right\}.$$

In diesem Integral, zu dem noch ähnliche für g_1 und h_1 treten, ist

$$\varrho'^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2;$$

ξ, η, ζ sind die Coordinaten desjenigen ausserhalb der Teilchen gelegenen Punktes, in dem die Werte von f, g, h ermittelt werden sollen; x, y, z sind die Coordinaten eines Punktes innerhalb eines der Teilchen. Das Integral wird durch teilweise Integration umgeformt, wobei die auf die Oberfläche der Teilchen bezüglichen Terme verschwinden, da dort δk_0 und δK_0 Null werden; die Oberfläche selbst wird angesehen als mit einer Uebergangsschicht bedeckt, in der δk_0 und δK_0 von ihren constanten Werten im Innern sehr schnell, aber continuirlich in Null übergehen. Eine weitere Vereinfachung ergiebt sich, wenn $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ als sehr gross gegenüber den Dimensionen der Teilchen und der Wellenlänge angenommen wird. Für den Fall, dass die Teilchen Kugeln vom Gesamtvolumen T sind, lassen sich dann schliesslich die Integrale ausführen, und man erhält:

$$f_1 = -\frac{T}{4\pi}\left\{\frac{4\pi i\varkappa}{VK_0}\,\delta k_0 - \frac{\varkappa^2\,\delta K_0}{K_0}\right\} f_0\, e^{i(nt-\varkappa\varrho)}\,\frac{\eta^2+\zeta^2}{\varrho^3},$$

$$g_1 = -\frac{T}{4\pi}\left\{\frac{-4\pi i\varkappa}{VK_0}\,\delta k_0 + \frac{\varkappa^2}{K_0}\frac{\delta K_0}{K_0}\right\} f_0\,\frac{\xi\eta}{\varrho^3}\, e^{i(nt-\varkappa\varrho)},$$

während h_1 denselben Wert hat wie g_1, nur dass ζ an Stelle von η tritt. Aus f_1, g_1, h_1 ergiebt sich die Intensität des zerstreuten Lichtes. Von diesem Lichte zeigt der von δk_0 herrührende Teil, wie die Formeln leicht erkennen lassen, kein so reines Blau wie der von δK_0 herrührende Teil.

In derselben Art, wie die Glieder erster, werden auch noch die Zusatzglieder zweiter Ordnung in Bezug auf δk_0, δK_0 entwickelt; hinsichtlich der Resultate muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Zum Schluss endlich werden die Ausdrücke für f_1, g_1, h_1 benutzt, um die Reflexion des Lichtes an einer mit einer trüben Schicht von geringer Dicke bedeckten Oberfläche zu untersuchen. Wn.

E. Hoppe. Die Aenderung der Lichtschwingungen im magnetischen Felde. Hamb. Mitt. **3**, 319-324.

Den Ausgangspunkt der Rechnung bilden die Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie in der Form, in der sie von H. A. Lorentz aufgestellt sind (cf. F. d. M. **24**, 1081, 1892; **25**, 1632, 1893/1894). Ihnen liegt die Anschauung zu Grunde, dass die Molekeln aus elektrisch geladenen Ionen bestehen, und dass deren Bewegungen die Ursache aller elektrischen und damit auch der optischen Erscheinungen sind. Auch die Lichtschwingungen sind demnach nur Schwingungen der Ionen um ihre Gleichgewichtslage. Die in Rede stehenden Gleichungen werden auf den Fall angewandt, dass die x-Axe die Wellennormale ist, die Lichtschwingungen also in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene vor sich gehen, dass ferner ein magnetisches Kraftfeld besteht, das so orientirt ist, dass die Kraftlinien parallel zur x-Axe verlaufen. Den Gleichungen wird dann genügt durch zwei circular polarisirte Strahlen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von einander und von der ohne Wirkung des Magnetfeldes vorhandenen Geschwindigkeit verschieden sind. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kann man auch direct durch Betrachtung der auf ein Teilchen in dem Magnetfeld wirkenden elektrodynamischen Kräfte ableiten. Wn.

R. Dongier. Méthode de contrôle de l'orientation des faces polies d'un quartz épais normal à l'axe. Journ. de Phys. (3) **7**, 643-648.

Die im Titel genannte Aufgabe veranlasst den Verf., den Verlauf eines durch eine beliebig orientirte Quarzplatte gehenden Lichtstrahls im Anschluss an Mascart's Traité d'Optique rechnend zu verfolgen und zu discutiren. Wn.

R. Dongier. Variation de la biréfringence du quartz avec la direction de la compression. Ann. de Chim. et Phys. (7) **14**, 448-526.

Obgleich die Abhandlung wesentlich experimenteller Natur ist, so bedarf sie doch eines nicht gering zu achtenden Aufwandes von mathematischen Entwickelungen, die den Messungen zugrunde liegen. Lp.

James Walker. On the relative retardation between the components of the stream of light produced by the passage of the stream through a crystalline plate cut in any direction with respect to the faces of the crystal. Lond. R. S. Proc. **63**, 79-90.

Das Problem wird auf eine biquadratische Gleichung reducirt, deren Lösung auf Reihenentwickelungen nach dem Sinus des Einfallswinkels führt, die eine bequemere Berechnung der höheren Glieder gestatten als die bisherigen. Der Fall, in dem die Krystallplatte senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist, macht dabei eine besondere Behandlung nötig. Die einschlägigen Formeln werden vollständig gegeben. Br.

Issaly. Optique géométrique. 7e mémoire. Propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons de nature quelconque. Bordeaux Mém. (5) **1**, 361-420 (1896).

Dass die Untersuchungen des Verf. sich überhaupt nicht, wie ihr Titel besagt, auf dem Boden der Optik, wie dieselbe von den Physikern aufgefasst wird, bewegen, ist in den Referaten über die vorangehenden Teile dieser Arbeit wiederholt ausgesprochen worden (vergl. F. d. M. **26**, 975, 1895). Die ungemein späte Zustellung der letzten Bände von den Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux seitens der Verwaltung hat es ausserdem unmöglich gemacht, ein ordnungsmässiges Referat zu beschaffen. Um nun aber die Leser des Jahrbuchs nicht in Unkenntnis über die Absichten des Verf. zu lassen, setzen wir die Einleitung der Abhandlung hierher, in welcher er selbst einen Ueberblick giebt.

„Das Studium der verschiedenen Arten von Strahlenbüscheln, das den Gegenstand unserer vorigen Abhandlung bildete, kann mit Nutzen fortgesetzt werden. Man kann nämlich zeigen, dass nicht nur jeder Büschel, sondern sogar jede Oberfläche, mag sie optisch, anoptisch oder dioptisch sein, als Gegenstück eine zweite Oberfläche hervorruft, die man (ohne irgend welche Zweideutigkeit) die inverse der ersten zu nennen berechtigt ist, weil, wenn man beide durch eine und dieselbe horizontale Ebene schneidet, die Inhalte der erzeugten Schnitte als mittlere Proportionale den Inhalt der ebenen Curve haben, die den beiden betrachteten Flächen als Directrix dient. Man hat aber noch mehr zu beachten. Von den beiden Konoiden, die, wie erkannt wurde, den allgemeinen Ort der ganzen Mannigfaltigkeit der Brennstrahlen ausmachen, gehört das eine ausschliesslich den directen Oberflächen an, das andere ihren bezüglichen Inversen, vorausgesetzt jedoch, dass die vorgegebene ebene Directrix durch den Ursprung geht.

Was die Abweichungsellipse anbelangt, die der erwähnte Ort von selbst einführt, so hat eine eingehendere Prüfung uns davon überzeugt, dass sie von höherer Wichtigkeit ist. An sie oder, was gleichbedeutend ist, an die Krümmung, aus der sie entspringt, lassen sich mühelos die Urgesetze der Licht- oder Wärme-Intensität knüpfen, und zwar weil einerseits die fragliche Krümmung (verticale Deviation) unter dem kinematischen Gesichtspunkte das Quadrat der horizontalen resultirenden Winkelgeschwindigkeit bezüglich jeder Bewegung eines starren Systems mit zwei Variabeln misst, und weil andererseits unter dem dynamischen Gesichtspunkte das Quadrat dieser selben Geschwindigkeit die lebendige Kraft des Systems misst.

Unter den zahlreichen Eigenschaften der Abweichungsellipse wollen wir sogleich die folgenden hervorheben: 1. Man kann sie als horizontalen Schnitt in einem gewissen Abstande vom Ursprunge an einem neuen Kegel zweiten Grades erhalten, den wir angeben werden, und auf dessen Oberfläche die eigentliche Antinormale (bekannt aus Abhandlung V) nur als einfache Erzeugende vorkommt. 2. Man bekommt sie auch als centralen Schnitt eines besonderen Ellipsoids, dessen Eigenschaften bei-

läufig es ermöglichen, selbst in schiefwinkligen Coordinaten auf die „normo-directive“ Oberfläche die geometrische Construction der ersten Polarisationsebene Π auszudehnen, die wir bisher auf den Fall der absoluten Wellenfläche hatten beschränken müssen. Es ist zu bemerken, dass rücksichtlich des vorigen Kegels die Ebene Π und ihre Gegenebene Π_γ ein System conjugirter Durchmesserebenen bilden. Ferner befindet sich in den beiden veränderlichen Nebenwinkeln, welche diese beiden Ebenen mit einander bilden, eine doppelte (Mittel- oder Ergänzungs-) Schar anderer Ebenen, Abweichungsebenen genannt, die ebenfalls paarweise conjugirt sind und als zugeordnete Antinormalen die verschiedenen Erzeugenden des Kegels besitzen; deshalb kommt ihm der Name „Abweichungskegel“ von Rechts wegen und aus doppeltem Grunde zu.

Dies wird uns von selbst dazu führen, den allgemeinen Ausdruck des Winkels zu suchen, den eine Abweichungsebene mit der Tangentialebene an irgend einem der Mittel- oder Ergänzungskegel von Malus bildet. Nun ist aber der Ausdruck, zu dem man kommt, nach unserer Ansicht ganz besonders interessant, weil wir aus ihm nichts Geringeres folgern als eine neue und in unserem Sinne ganz annehmbare Deutung der unter dem Namen der chromatischen Polarisation bekannten merkwürdigen Erscheinung. Um über diese letztere Theorie ein ganz neues Licht zu verbreiten, unterscheiden wir an demselben Orte zwischen der anfänglichen Polarisation eines (Wärme- oder Licht-) Büschels, die durch eine Tangentialebene wie P_i gekennzeichnet wird, und seiner späteren oder erworbenen Polarisation, die durch eine Abweichungsebene wie Π_i, der Verallgemeinerung selbst der Ebene Π, gekennzeichnet wird.

Die erstere nämlich, die ausschliesslich vom Polarisator stammt, enthält neben der Schiefe i nur noch die verhältnismässig exoterischen Parameter p'' und q'', die einzigen, deren Vorkommen man in den Gleichungen der Tangentialebenen an den verschiedenen Malus'schen Kegeln wahrnimmt, und denen man in den Rechnungen als den geodätischen Krümmungen sowohl der Oberflächen- wie der Pseudooberflächen-Netze wesentlich, wo nicht identisch begegnet. Die zweite dagegen, welche durch die Substanz, mit der man arbeitet und durch den Analysator erzeugt wird, begiebt sich zwar nicht dieser selben Elemente p'' und q'', die ihr so zu sagen als Zwischenträger dienen, verwertet aber vornehmlich neben einer Schiefe i', die gewöhnlich von i verschieden ist, die wesentlich esoterischen Componenten p, q, p', q', als deren ausschliessliche Function sich bekanntlich in der Analysis die Richtungen der Krümmungslinien sowie der Asymptotenlinien ausdrücken, mithin auch diejenigen der Doppelschar der pseudoconjugirten Linien, die in den Augen aller Geometer schon als merkwürdig gelten, besonders aber für uns, die wir sie im allgemeinen für eng verknüpft mit der netzartigen Bildungsweise der Körper und ganz besonders mit derjenigen der krystallisirten Substanzen ansehen.

Das sind im Ueberblick die Hauptfragen, mit denen wir uns in der gegenwärtigen Arbeit werden zu beschäftigen haben. Unter den übrigen

in zweiter Linie stehenden Entwickelungen wird der Leser noch finden: den Ursprung und die geometrische Bedeutung zweier Gruppen von Grundbedingungen, die Maxima und Minima benannt werden, die Entstehung zweier singularen Pseudooberflächen, eine Inhaltsdeutung der Coefficienten der beiden conjugirten Ebenen Π und Π_γ, u. s. w. Wir fügen die Bemerkung hinzu, dass der fast durchgängige Gebrauch schiefwinkliger Coordinaten von Anfang an dieser Abhandlung denjenigen Grad der Allgemeinheit geben wird, der in der vorangehenden erst allmählich auf den Schlussseiten erreicht wurde."

Man vergleiche hiermit die Referate über rein geometrische Arbeiten des Verf. in F. d. M. **16, 17, 28,** und auf S. 550 dieses Bandes.

Lp.

ISSALY. Optique géométrique. 8^e^ Mémoire. Complément aux propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons en général. Bordeaux Mém. (5) **3,** 1-40.

„Diese neue Studie ist nur ein Anhang zu der von uns kürzlich über denselben Gegenstand in der gegenwärtigen Sammlung veröffentlichten Arbeit. Die Wiederauffindung und Ergänzung der Biot'schen Formeln bezüglich des Durchganges des polarisirten Lichtes durch zwei krystallinische Platten mit Hülfe der Analysis allein; die Ausdehnung der Methode des berühmten Autors auf den Fall von drei, sogar von vier Platten unter sorgfältiger Entwickelung der geeigneten Rechnungen; die Angabe des zur Bewältigung des im allgemeinen Falle einzuschlagenden Weges: das soll der Gegenstand unserer ersten Untersuchungen sein.

Hiernach werden wir auf die Eigenschaften, die das in unserer letzten Abhandlung als Abweichungs-Parallelogramm bezeichnete Viereck auszeichnen, einen Rückblick werfen. Es wird sich zeigen, dass die Richtungen seiner Diagonalen vornehmlich über unerwartete und nach unserer Meinung sehr bemerkenswerte Zusammenhänge Aufschluss geben.

Endlich werden wir Anlass nehmen, mit unseren schiefwinkligen Coordinaten nochmals auf die Erforschung der von den Krystallen erzeugten neutralen Linien einzugehen, mit Rücksicht darauf, dass die Elemente, über die wir nunmehr verfügen, uns in den Stand setzen, diese schöne und wichtige Frage in ein ganz neues Licht zu bringen."

Lp.

LE DANTEC. La physique de la lumière. Fasc. 2: Analyse physique de la polarisation chromatique basée sur la mécanique de l'élasticité d'un ellipsoïde. Fasc. 3: Les anneaux colorés, expliqués sans interférences; théorie rationnelle des rayons X; note philosophique. Fasc. 4: Analyse critique de la théorie des ondes, ou mes interviews avec les savants au sujet de la lumière et de l'électricité. Paris: Fritsch. 96, 102, 236 S. 8°.

G. KIRCHHOFF. Abhandlungen über Emission und Absorption. I, II, III. Herausgegeben von M. Planck. Leipzig: W. Engelmann. 41 S. (Ostwald's Klassiker No. 100). — Bericht in Abschnitt XI, 4 A.

TH. THORP. A mechanical device for the solution of problems in refraction and polarisation. Manchester Mem. **42**, II-VI.

C. Geometrische Optik.

R. MEHMKE. Ueber die mathematische Bestimmung der Helligkeit in Räumen mit Tagesbeleuchtung, insbesondere Gemäldesälen mit Deckenlicht. Schlömilch Z. **43**, 41-57.

Der Verf. hat diese Untersuchungen angestellt infolge einer aus praktischen Kreisen stammenden Anregung; es zeigte sich, dass die bisherigen Behandlungen des Gegenstandes unvollständig oder irrtümlich waren; unter gewissen vereinfachenden Annahmen und unter Voraussetzung des Lambert'schen photometrischen Gesetzes kann für jeden beleuchteten Punkt in Bezug auf jedes leuchtende Flächenelement ein „Beleuchtungs-Vector" construirt werden, so dass sich die Bestimmung der Helligkeit auf geometrische Additionen zurückführen lässt. Die fraglichen Constructionen geben willkommenes Uebungsmaterial für Studirende der darstellenden Geometrie; der Verf. hat einige Curven-Tafeln beigegeben, mittels deren sich hellste Punkte empirisch bestimmen lassen.
R. M.

L. PINTO. Sulla teoria dei riflettori. Atti della Accademia Pontaniana **28** oder (2) **3**. Mem. 11. S. 24.

BERTHELOT. Nouvelles recherches sur les miroirs de verre doublé de métal dans l'antiquité. Ann. de Chim. et Ph. (7) **15**, 433-444.

C. C. HUTCHINS. Irregular reflection. Am. J. of science (4) **6**, 373-380.

J. HADAMARD. Les invariants intégraux et l'optique. C. R. **126**, 811-812.

Anknüpfend an eine Bemerkung von Bruns im „Eikonal" (F. d. M. **26**, 917, 1895) zeigt Verf., dass eine dem Malus'schen Satze gehorchende punktweise Abbildung zweier Räume nicht bloss Aehnlichkeit, sondern sogar Congruenz derselben bedingt. R. M.

R. STRAUBEL. Ueber einen Abbildungsfehler beim Prisma. Wiedemann Ann. **66**, 346-349.

Wird ein ebenes Object durch unendlich dünne Büschel abgebildet, welche ein Prisma mit minimaler Ablenkung durchlaufen, so ist das Bild

zwar wieder eben, aber die Bildebene ist zu den Strahlen und dem Prisma anders orientirt als die Objectebene, weil die zu verschiedenen Teilen des Gesichtsfeldes gehörigen Büschel das Prisma in verschiedener Entfernung von der brechenden Kante durchsetzen. Die genaue Beobachtung des Bildes durch ein Fernrohr erfordert daher den verschiedenen Stellen entsprechende Ocularverschiebung. Verf. hat diese Erscheinung rechnerisch und experimentell verfolgt. R. M.

R. A. Sampson. A continuation of Gauss's „Dioptrische Untersuchungen". Lond. M. S. Proc. **29,** 33-83.

Zur Untersuchung des Strahlenganges in einem beliebigen unsymmetrischen optischen Systeme will der Verf., im Gegensatz zu den neueren Autoren [von denen er allerdings nur Larmor (F. d. M. **21,** 1110, 1889 und **24,** 1036, 1892) citirt], den alten Gauss'schen Weg directer Durchrechnung wieder zu Ehren bringen. Dabei kommt er, unter Beschränkung auf einen engen Bündel, in dem die Quadrate der Neigungen vernachlässigt werden können, durch umfangreiche Rechnungen in der That zu einfachen und übersichtlichen algebraischen Beziehungen. Die Correspondenz des ein- und austretenden Strahles wird durch 16 Coefficienten ausgedrückt, die aber sechs identische Gleichungen erfüllen müssen, und von denen vier durch Coordinatenänderung getilgt werden können; es bleiben also nur sechs Constanten zur Verfügung, welche die Eigentümlichkeit des allgemeinsten optischen Systems ausdrücken müssen. Mit erstaunlicher algebraischer Geschicklichkeit stellt der Verf. ein Schema her, in dem nur sechs unabhängige Parameter vorkommen, und welches daher einen directen Einblick in die Aequivalenz optischer Systeme gestattet; unter anderem folgt der bekannte Satz, dass jedes System durch eine einzige (dicke unsymmetrische) Linse ersetzt werden kann.

Bei näherer Discussion zeigt sich dann, dass in dem ein- und austretenden Bündel Systeme von eindeutig zugeordneten Focallinien existiren, derart, dass die dreifach unendlichen Strahlen, welche die erste passiren, auch durch die zweite gehen, dass von den doppelt unendlichen Strahlen, die jeder Punkt der ersten Linie aussendet, stets eine einfach unendliche Schar durch jeden Punkt der zweiten geht, dass diese einfach unendlichen Scharen beiderseits eben sind und Correspondenz-Ebenen erzeugen, dass endlich durch jeden Punkt zwei solcher Focallinien gehen, deren Richtung von der Lage des Punktes und den optischen Constanten abhängig ist. Diese Abhängigkeit stellt der Verf. in Formeln dar und entwickelt daraus zum Schluss eine achtteilige Klassification optischer Systeme nach dem Grade ihrer allmählichen Annäherung an die Eigenschaften des axialsymmetrischen Systems. R. M.

S. v. Merz. Das Fraunhofer-Objectiv. Münch. Ber. **28**, 1898, 75-89.

Mitteilungen über die Glassorten des berühmten Heliometer-Objectivs der Königsberger Sternwarte und Darlegung der bei ihm von Fraunhofer befolgten Durchrechnungs- und Corrections-Methoden. R. M.

N. Jadanza. Il cannocchiale terrestre accorciato. Torino Atti **33**, 803-808.

Anweisung, hinter dem Objectiv eines Fernrohrs eine Combination zweier Linsen so anzubringen, dass das von der Objectivlinse entworfene Bild durch diese Combination umgekehrt wird, ohne Veränderung der Grösse, und dass die Gesamtlänge kürzer wird als die des astronomischen Fernrohrs. (Vergl. F. d. M. **18**, 1012, 1886.) R. M.

L. Matthiessen. Ueber elliptische Anamorphose in der dioptrischen Abbildung. Schlömilch Z. **43**, 305-311.

Die bekannte Theorie der dioptrischen Abbildung (durch centrirte sphärische Flächensysteme) sehr kleiner geradliniger, senkrecht zur Centrale stehender Objecte wird auf die Abbildung einer beliebigen geschlossenen krummen Oberfläche (einschliesslich singulärer Linien und Punkte) ausgedehnt. Nach Aufstellung der Polargleichung der Bildfläche wird gezeigt, wie die Polarcoordinaten des Objectes in die des Bildes zu verwandeln sind, wobei sich als Beziehung zwischen den beiderseitigen Radienvectoren die Gleichung eines Rotationsellipsoids ergiebt. Hierdurch rechtfertigt sich die Bezeichnung dieser Abbildung als elliptischer Anamorphose. Schg.

L. v. Seidel. Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Aus dessen Nachlasse herausgegeben von S. Finsterwalder. Münch. Ber. **28**, 1898, 395-422.

Die mathematische Theorie der Abbildungsfehler von Linsen-Systemen hat das Schicksal gehabt, dass jeder neue Bearbeiter in unvollständiger Kenntnis der vorhandenen Litteratur fast wieder von vorn anfing. So sind auch insbesondere die von Seidel schon in den fünfziger Jahren aufgestellten praktischen Formeln lange Zeit unbeachtet geblieben. Um denselben zur rechten Anerkennung zu verhelfen, und um speciell nachzuweisen, dass die von Abbe entdeckte sogenannte Sinusbedingung mit der Seidel'schen „Fraunhofer-Bedingung“ übereinstimme, schrieb Seidel 1881 die vorliegende Abhandlung, nahm aber doch von ihrer Publication Abstand. Finsterwalder fand sie im Nachlass druckfertig vor und bringt sie zu unserer Kenntnis. In einer vorausgeschickten historischen Würdigung der wichtigsten einschlägigen Arbeiten macht er u. a. die interessante Mitteilung, dass schon Hamilton 1833 eine seiner Zeit weit vorauseilende Theorie der Aberrationen ausgearbeitet hat, die

sich auf die von Thiesen (F. d. M. **22**, 1068, 1890) wieder entdeckte charakteristische Function stützt. R. M.

H. Bordier. Sur le pouvoir dioptrique d'un système centré. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 141-143.

Bemerkungen über die Anwendung der Relation $\Phi' = \delta F'_1 F''_2$, die den Schriften von Monoyer (vergl. F. d. M. **15**, 933-934, 1883) entnommen ist und die dioptrische Kraft Φ' eines aus zwei Diopteru gebildeten Systems als Function der dioptrischen Kräfte F'_1 und F''_2 jedes derselben ausdrückt, bei Aufgaben über das menschliche Auge. Lp.

R. Straubel. Theorie und Anwendung eines Instrumentes zur Messung des Astigmatismus (Astigmometer). Wiedemann Ann. **64**, 794-810.

Das Instrument besteht aus zwei astigmatisch wirkenden, in ihrer Ebene gegen einander verdrehbaren Cylinderlinsen. Aus dem Princip der gleichen optischen Länge der Lichtwege leitet der Verf. Formeln her, welche die Umwandlung eines unendlich kleinen, vom Hauptstrahl senkrecht geschnittenen Elementes einer beliebig gestalteten eintretenden Wellenfläche darstellen und die Abhängigkeit der Hauptkrümmungsradien der deformirten Wellenfläche von denen der ursprünglichen und von den Radien und der Stellung der Linsen ausdrücken. Der Astigmatismus des austretenden Bündels kann durch Drehen der Linsen continuirlich verändert werden; insbesondere kann er auch homocentrisch gemacht werden; jene Formeln liefern dann das Mittel, aus den abgelesenen Winkeln die astigmatische Differenz des eintretenden Bündels zu berechnen, eine Aufgabe, die der Augenarzt oft, aber auch der Physiker bei der Untersuchung regelmässig reflectirender Flächen zu lösen hat. R. M.

Fr. Wächter. Ein neuer Distanzmesser von Zeiss. Mitt. üb. Art. u. Genie **29**, 308-319.

Das Princip dieses Apparats ist das von Helmholtz in seinem Telestereoskop benutzte. Der Aufsatz giebt die Beschreibung und die Theorie des Instrumentes und erörtert die mit seiner Hülfe zu erzielende Genauigkeit. Lp.

W. H. Julius. Over eene methode om bij spiegelaflezing de nauwkeurigheid eenige malen te vergrooten. Amst. Versl. **6**, 481-486.

A. C. Biese. Ueber die Brechung beliebig gestalteter Wellenflächen an der Grenze zweier verschiedenen Medien, nebst Anwendung

auf einige der wichtigsten Brechungserscheinungen an isotropen und anisotropen Körpern. Berlin. 32 S. gr. 8⁰.

A. C. Biese. Ueber den Astigmatismus dünner Linsensysteme. Berlin. gr. 8⁰.

C. Winter. Dioptrische Bilder von sehr kleinen paraxialen Objecten in centrirten sphärischen Flächensystemen. Diss. Rostock. 30 S. 8⁰ (1897).

Kapitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

Carl Neumann. Die elektrischen Kräfte. Zweiter Teil. Ueber die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. Leipzig: B. G. Teubner. XXXVIII + 462 S. 8⁰.

Der Verf. giebt in der Einleitung eine so lichtvolle Darstellung des Inhaltes seines hochbedeutenden Werkes, dass wir uns beschränken können, darauf hinzuweisen, wie im ersten Teile die Arbeiten von Ampère und F. Neumann besprochen sind, so soll hier „im zweiten von den Helmholtz'schen Arbeiten die Rede sein, die sich von jenen wesentlich dadurch unterscheiden, dass Helmholtz das Ampère'sche Gesetz für eine blosse Hypothese erklärt, der man nicht das mindeste Zutrauen zu schenken habe. Es handelt sich im vorliegenden Werke weniger um eine Reproduction der H.'schen Arbeiten, als um die Aufgabe, das ganze Gebiet der Elektrodynamik und des Magnetismus in denjenigen beiden Richtungen zu durchwandern, die in den älteren und in den neueren H.'schen Arbeiten sich ausprägen. Wie verschieden diese beiden Richtungen sind, ist bekannt; wurzeln doch die älteren (1870-1875) in der Newton'schen Gravitationstheorie, die neueren hingegen (1892-1894), welche sich den Untersuchungen von Faraday, Maxwell und Hertz anschliessen, in gewisser Beziehung in der Fourier'schen Wärmetheorie“.

Nachdem C. Neumann eine Erklärung der dem Buche eigentümlichen Bezeichnungen gegeben, sich auch über die aus seinen früheren Arbeiten bekannten Hypothesen Delta und Epsilon ausgesprochen hat, giebt er, wie schon erwähnt, selbst eine 16 Seiten lange Inhaltsangabe des in 18 Abschnitte eingeteilten Werkes. Hae.

A. Gray. A treatise on magnetism and electricity. Vol. I. London: Macmillan and Co. XV + 479 S.

Der Verf. dieses Werkes (der nunmehrige Nachfolger von Lord Kelvin auf dem Lehrstuhl der Physik an der Universität zu Glasgow) ist als einer der führenden Geister auf dem in dem Buche behandelten Gebiete anerkannt. Die Kritik des Buches steht daher eher einem Physiker als einem Mathematiker zu, obschon ein nicht geringer Betrag tüchtiger mathematischer Leistung in dem Bande enthalten ist. Uebrigens ist Näheres in Nature **59**, 314 nachzulesen. Gbs. (Lp.)

E. Wiechert. Hypothesen für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Gött. Nachr. 1898, 87-106.

Die Zustandsänderungen des Feldes gestalten sich besonders einfach, wenn das betrachtete Gebiet nicht merklich sinnlich wahrnehmbare Materie enthält. Es äussern sich dann zwei elektrodynamische Felderregungen, eine „elektrische" und eine „magnetische", deren Vectoren bezüglich mit R und H, und deren Componenten mit X, Y, Z; L, M, N bezeichnet werden mögen.

Für die räumlichen und zeitlichen Variationen der Erregungen gelten die Beziehungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0,$$

$$\frac{dX}{dt}=-V\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right), \qquad \frac{dL}{dt}=V\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

und ähnliche für $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ etc. In der Arbeit selbst werden statt dieser Differentialformeln die Integralformeln benutzt:

$$\text{Flächenint. } {}^{0}R=0; \qquad \text{Flächenint. } {}^{0}H=0,$$

$$\frac{d}{dt}\text{ Flächenint. } R=-V\text{ Randint. } H,$$

$$\frac{d}{dt}\text{ Flächenint. } H=V\text{ Randint. } R.$$

Für die Felderregung ausserhalb der Materie gelten nach diesen Formeln Gesetze solcher Art, dass stets wiederum eine mögliche Erregung in ihrer räumlichen Verteilung und ihren zeitlichen Aenderungen hervorgeht, wenn beliebig viele mögliche Erregungen fortlaufend in entsprechenden Zeitmomenten superponirt werden. Von der Einwirkung der Materie auf das Feld nehmen wir nun an, dass sie diesen Satz nicht aufhebt. Durch diese Hypothese der Superposition wird es ermöglicht, die elektromagnetische Wirkung der einzelnen materiellen Körper für sich zu betrachten.

In dem zweiten Teile der Arbeit wird es erforderlich, die Körper durch Berücksichtigung der molecularen Constitution in Elemente zu zerlegen. Es wird vorläufig allein die durch e gemessene Ladung der Atome und Molecüle in Betracht gezogen, ohne eine weitere elektrische

Differentiirung oder eine besondere magnetische Erregung anzunehmen. Fast allein hiermit gelingt es, einen grossen Teil der elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen zu erklären. Nur die metallische Leitung lässt sich nicht in das System einordnen, und ferner sagt die Theorie nicht, was die Aenderung der molecularen Ladung bedeutet, die bei der Elektrolyse an den Ein- und Austrittsstellen des Stromes stattfindet.

Die einzige consequente Art, die metallische Leitung in die Theorie aufzunehmen, besteht darin, diese Leitung als eine molecular-convective anzusehen. Damit dieses möglich werde, ist es nötig, neben den Atomen der Chemie noch andere materielle Atome anzunehmen und diesen in den Metallen die Rolle der Ionen zu übertragen.

Die Ladung eines materiellen Teilchens ändert sich nicht, so lange eine Berührung mit anderer Materie nicht stattfindet. Dieser Satz wird zu der Hypothese verallgemeinert, dass die Ladung eines materiellen Teilchens sich bei den für uns in Betracht kommenden Naturvorgängen überhaupt nicht ändert. Demnach bedeutet die Aenderung der Ladung eines Körpers oder Molecüles stets eine Aenderung seines materiellen Bestandes.

Die Emissionshypothese der Kathodenstrahlen und das Zeeman'sche Phänomen werden als Stützpunkte für diese Annahmen angeführt.

Im Schlusskapitel werden einige Betrachtungen über die Begriffe von Materie, Aether und Elektricität angestellt, welche letztere definirt wird als ein besonderer Stoff, dessen Menge wir mit e proportional setzen, und welcher der Träger der elektromagnetischen Eigenschaft der Materie ist, die durch die Grösse gemessen wird. Rn.

A. V. Bäcklund. Elektrische und magnetische Theorien. Acta Lund. **34,** 58 S.

Verf. beabsichtigt, einen Bericht abzustatten über seine physikalischen Abhandlungen in den Schriften der Stockholmer Akademie während der Jahre 1886-1897, in denen er sich einerseits mit einer neuen Herleitung der Grundsätze in der Lehre von der Elektricität beschäftigt hatte, andererseits auch mit dem Versuche, seine neuen Anschauungen zur Erklärung der erdmagnetischen Erscheinungen zu verwenden (s. F. d. M. für die genannten Jahre, sowie auch Math. Ann. **34**). Bdn.

C. Delin. Några konsekvenser af Weber's lag för elektriska massor, tillämpad på materiella punkter. Acta Lund. **34,** 30 S.

Zwei materielle Punkte wirken auf einander anziehend oder abstossend nach dem Weber'schen Gesetze für elektrische Massen. Die möglichen Bewegungsformen werden etwas vollständiger untersucht als bei früheren Verfassern. Bdn.

P. Duhem. Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques. Premier Mémoire: Propriétés fondamentales des courants de déplacement. Deuxième Mémoire: Les équations générales de l'électrodynamique dans les milieux qui sont à la fois magnétiques et diélectriques. Bordeaux Mém. (5) **1**, 233-285, 287-293 (1896).

„Bekanntlich beruht die Elektrodynamik der dielektrischen Mittel, wie Maxwell sie entworfen hat, auf Hypothesen, die mit den klassischen Theorien der Elektricität unverträglich sind; dies veranlasst zahlreiche Physiker, diese Theorien aufzugeben. Helmholtz hat es versucht, die Elektrodynamik der dielektrischen Mittel mit den herkömmlichen Lehren in Zusammenhang zu bringen; allein seine Gleichungen scheinen nicht mit gewissen Gesetzen zu stimmen, die Maxwell angekündigt und das Experiment bestätigt hat. Unser Ziel ist die Fortsetzung des Helmholtz'schen Werkes und der Nachweis, auf welche Weise alle experimentell bestätigten Gesetze, die aus den Maxwell'schen Ideen fliessen, in gleicher Art aus einer Methode hergeleitet werden können, die nicht mit der Tradition bricht." Diese Worte der Einleitung zeigen, dass die vorliegende Arbeit diejenigen Betrachtungen fortsetzt, welche in früheren Abhandlungen der Toulouse Ann. **7**, **8** und **10** begonnen sind (vergl. F. d. M. **25**, 1729, 1893/94 und **27**, 729, 1896). Die formelreiche Schrift, deren Zweck ja eine „Revision der Gleichungen der Elektrodynamik" ist, umfasst ein so weites Gebiet mit allen zugrunde gelegten, genau abgewogenen Hypothesen und den aus ihnen gezogenen Folgerungen, dass es unmöglich ist, hier eine genauere Inhaltsangabe zu machen. Die Kapitelüberschriften der ersten Abhandlung lauten:

Chap. I. Induction exercée, dans les corps conducteurs, par les courants de déplacement. Chap. II. Polarisation d'un corps diélectrique sous l'influence de courants de conduction ou de déplacement. Chap. III. L'énergie interne d'un système qui renferme des courants de conduction et des courants de déplacement. Chap. IV. Les forces pondéromotrices. Chap. V. Relations diverses entre les constantes fondamentales.

Von den in den letzten Kapiteln erreichten Ergebnissen wollen wir jedoch das eine hier mitteilen. Verf. hat in seine Rechnungen drei Helmholtz'sche Constanten eingeführt, die aus verschiedenen Betrachtungen herrühren, zunächst mit λ, μ, ν bezeichnet werden, infolge einer aufgestellten Hypothese aber dann einander gleich gesetzt sind. Durch genaue Erörterung der Gleichungen, in denen diese Constante auftritt, wird (S. 283) der Satz gefolgert: „Es ist nicht möglich, die allgemeine Theorie der Elektrodynamik aufzubauen, ohne vorher den Wert festzulegen, den man der Constante λ erteilen muss." — Die zweite Abhandlung deutet kurz an, wie die aufgestellten Grundlagen auf Körper anwendbar sind, die gleichzeitig Leiter sind, welche von Strömen durchlaufen werden können, ferner magnetische Substanzen, welche magnetisirbar sind, endlich Dielektriken, welche Polarisation und Bewegungsströme zulassen. Bei der Behandlung dieses allgemeinen Falles wird nur alles vereinigt, was vorher betreffs der drei eben aufgezählten Fälle gesagt ist. Lp.

E. RIECKE. Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme. Gött. Nachr. 1898, 48-70, 137-145; Wiedemann Ann. **66**, 353-389, 545-581, 1199-1200.

Verschiedene Physiker haben im Laufe der neunziger Jahre auf die Rolle, welche die Ionen auf dem Gebiete der elektrischen Erscheinungen spielen, aufmerksam gemacht. In diesem Zusammenhange gewinnen die Vorstellungen, welche W. Weber über die Leitung der Elektricität entwickelt hat, erneutes Interesse. Nach Weber's Ansichten ist die metallische Leitung ihrem Wesen nach nicht allzu verschieden von der elektrolytischen. Da sich seine Anschauungen in diesen Punkten mit den Ansichten der neueren Zeit berühren, so liegt es nahe, Betrachtungen, welche sich auf dem Gebiete der Elektrolyse als zutreffend erwiesen haben, auf die Leitung der Elektricität und der Wärme in Metallen zu übertragen.

Die Grundlagen der Untersuchung mögen von vorn herein dahin erweitert werden, dass in dem Raume zwischen den ponderablen Molecülen nicht bloss positive, sondern auch negative elektrische Teilchen in Bewegung angenommen werden. Sofern im Innern eines Leiters keine freie Elektricität sich befindet, muss in jedem Volumenelement die Summe der positiven Ladungen ebenso gross sein wie die Summe der negativen. Das bedingt aber nicht, dass die Zahl der positiven elektrischen Teilchen, welche in dem Zwischenraume zwischen den ponderablen Molecülen frei sich bewegen, ebenso gross sei, wie die Zahl der negativen Teilchen. Selbst wenn die elektrische Ladung der einzelnen positiven und der einzelnen negativen elektrischen Teilchen ihrem absoluten Betrage nach dieselbe ist, kann eine gewisse Zahl z. B. von positiven elektrischen Teilchen gebunden sein an die ponderablen Molecüle, so dass die Zahl der beweglichen positiven Teilchen kleiner ist als die der beweglichen negativen Teilchen.

Auf Grund dieser Annahme werden im folgenden unter anderem die Gesetze und Formeln entwickelt für die Wärmeleitung, die galvanische Strömung, die Thermoelektricität, Peltier'sche Wirkung, den Thomsoneffect, die Vorgänge an der Grenze zweier Metalle, die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Wirkungen, Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen, das thermische und elektrische Verhalten des Wismuts. Rn.

A. LIAPOUNOFF. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. Journ. de Math. (5) **4**, 241-311.

Verf., der einige Resultate seiner Untersuchung bereits vorher veröffentlicht hat (vergl. F. d. M. **28**, 363 und 698-699, 1897), erörtert ausführlich die Möglichkeit des elektrostatischen Problems, nämlich die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche eines Leiters zu finden, der jeder Einwirkung von aussen entzogen ist. Bekanntlich steht dieses Problem in enger Beziehung zum Dirichlet'schen, und zwar in der Art, dass man das erstere als gelöst ansehen kann, wenn es gelingt, das zweite zu lösen. Wohl kennt man Lösungen des Dirichlet'schen

Problems unter vereinfachenden Annahmen in Beziehung auf den Leiter und im allgemeinen auch Methoden, welche die Möglichkeit der Lösbarkeit erkennen lassen. Aber darum darf man doch noch nicht versichern, dass dies in derselben Weise vom elektrostatischen Problem gilt. Denn vorher müsste man doch erst die Möglichkeit des Dirichlet'schen beweisen und zeigen, dass seine Lösung für den Fall, von dem das elektrostatische Problem abhängt, in der Form des Potentials einer Flächenschicht dargestellt werden kann. Man muss also die Existenz der Function erweisen, welche die Dichtigkeit der Schicht darstellt, und dies wieder erfordert die Betrachtung von Werten der dérivée normale auf der Oberfläche des Leiters für jene gesuchte Function. Ob aber jene Werte existiren, kann man aus den allgemeinen Methoden, mit denen man bisher das Dirichlet'sche Problem behandelt hat, nicht ersehen. Verf. stützt sich auf die einfachen Methoden von C. Neumann, und es gelingt ihm, unter ganz allgemeinen Voraussetzungen, nicht bloss die Möglichkeit des elektrostatischen Problems zu erweisen, sondern auch zu zeigen, dass die von Robin vorgeschlagene Lösungsmethode die passende ist. Hae.

A. G. Webster. Note on Stokes' theorem in curvilinear coordinates. American Ac. Proc. **33**, 383-385.

Es wird gezeigt, wie der Helmholtz'sche Beweis des Stokes'schen Satzes auf krummlinige Coordinaten übertragen werden kann (vergl. S. 520 dieses Bandes). Gt.

L. Donati. Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali. Bologna Mem. (5) **7**, 427-469.

Ausführliche mathematische Entwickelung der Eigenschaften eines Vectorfeldes, die in einigen Punkten von der Ferraris'schen (F. d. M. **28**, 763, 1897) abweicht. Hae.

E. Armanini. Sulla densità elettrica sopra un'ellissoide conduttrice isolata. Nuovo Cimento (4) **7**, 377-382.

Die Dichte h der Elektricitätsmenge e, die sich auf der Oberfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

im Gleichgewicht befindet, ist

$$h=\frac{e}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

oder

$$h=\frac{ek}{4\pi abc},$$

wenn man

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^2}{k}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{c^2}{k}\right)^2} = 1$$

setzt. Variirt k, so stellt (1) eine Schar von homothetischen Ellipsoiden dar, deren Schnittcurven mit dem gegebenen Ellipsoid die Linien constanter Dichtigkeit sind. Projicirt man diese Curven auf zwei der Meridianebenen, speciell wenn $a > b > c$, auf (a, b), bez. (a, c), so erhält man homothetische Ellipsen, bez. Hyperbeln.

Orthogonal zu diesen sind die Curven, auf denen die Dichte am stärksten variirt; ihre Gleichung ist gegeben durch

$$x^{2a^4(b^2-c^2)} \cdot z^{2c^4(a^2-b^2)} = K \cdot y^{2b^4(a^2-c^2)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hae.

R. H. Jude. Note on the application of the Gamma-Function to an electrostatical problem. Phil. Mag. (5) **46,** 254-258.

Maxwell behandelt die Verteilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln und erhält als Wert für die Ladung Q_a der einen, vom Radius a und dem Potential V, wo b der Radius der andern ist:

$$\frac{Q_a}{V} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2 b}{s(a+b)\{s(a+b)-a\}}.$$

Setzt man $n = \frac{b}{a+b}$, wo n nicht negativ sein darf, und ferner

$$\frac{d \log \Gamma(n)}{dn} - \left[\frac{d \log \Gamma(n)}{dn}\right]_{n=1} = -H(n)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots \text{ ad inf.},$$

so ist

$$\frac{Q_a}{V} = \frac{ab}{a+b} H\left(\frac{b}{a+b}\right), \qquad \frac{Q_b}{V} = \frac{ab}{a+b} H\left(\frac{a}{a+b}\right).$$

Diese Resultate werden zum Teil weiter verfolgt, zum Teil specialisirt.

Hae.

P. Sacerdote. Sur les déformations qu'éprouve un diélectrique solide lorsqu'il devient le siège d'un champ électrique. C. R. **126,** 1019-1022.

Durch die beiden Principe von der Erhaltung der Energie und der Elektricität lassen sich diese Deformationserscheinungen an die Gesetze der Elasticität knüpfen.

Die elektrische Lamelle wird als homogen und isotrop vorausgesetzt, auf beiden Seiten metallisirt, so dass ein Condensator von der Dicke e entsteht.

Es wird gezeigt, dass man hat:

1. Die Deformation in der Richtung senkrecht zu den Kraftlinien

$$\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = (k_1 + a)\left(\frac{KH^2}{8\pi}\right);$$

K bezeichnet die Dielektricitätsconstante, a den longitudinalen Verlängerungscoefficienten, k_1 den Coefficienten der Variation von K senkrecht zu den Kraftlinien.

2. Die Deformation in der Richtung der Kraftlinien

$$\frac{\Delta e}{e} = (k_2 - a - 2b)\left(\frac{KH^2}{8\pi}\right);$$

b ist der Coefficient der transversalen Contraction, k_2 der Coefficient der Variation von K parallel den Kraftlinien.

3. Variation des Volumens

$$\frac{\Delta u}{u} = \left(k + \frac{c}{3}\right)\left(\frac{KH^2}{8\pi}\right);$$

c bezeichnet den kubischen Compressibilitätscoefficienten $= 3(a - 2b)$, k den Coefficienten der Variation von K in Bezug auf die gesamte Oberfläche.

Diese drei Formeln zeigen, dass alle Deformationen proportional sind der elektrischen Energie in Bezug auf die Einheit des Volumens $\frac{KH^2}{8\pi}$.

Die Elasticitätscoefficienten a, b, c sind im allgemeinen bekannt. Dagegen sind zur Bestimmung von k, k_1, k_2, die wahrscheinlich sehr klein sind, noch keine Versuche angestellt worden. Rn.

H. Pellat et P. Sacerdote. De l'énergie d'un système électrisé, considérée comme répartie dans le diélectrique. C. R. **126**, 817-820.

Pellat hat nachgewiesen, dass der Ueberschuss an Energie, welche ein System von Conductoren und Dielektriken darstellt,

$$\Delta U_T = \frac{1}{2}\Sigma m V - \frac{T}{2}\frac{\partial \Sigma(mV)}{\partial T}$$

ist, wo die Ladung m eines jeden Teiles als unabhängig von der absoluten Temperatur T zu betrachten ist. Diese Relation setzt voraus, dass die elektrischen Kräfte des Systems im Gleichgewicht gehalten werden durch innere Kräfte, und dass jeder isolirte Conductor homogen ist.

Die Verf. transformiren diese Gleichung in die Form

$$\varDelta U_T = \int\left(1+\lambda T+\frac{T}{K}\frac{\partial K}{\partial T}\right)\frac{K\varphi^2}{8\pi}\,dv,$$

wo φ die Intensität des elektrischen Feldes in dem Volumen dv des Dielektricums ist, dessen specifisches Inductionsvermögen K ist. Diese Transformation geschieht unter der Voraussetzung, dass das Dielektricum homogen und isotrop ist und die Conductoren die gleiche Dilatation haben wie das Dielektricum, so dass eine Temperaturerhöhung weder eine Zerrung noch eine Compression hervorbringt. Dies ist nahezu der Fall bei einem Condensator. Mit dieser Transformation ist der Nachweis geliefert, dass der Ueberschuss der Energie seinen Sitz im Dielektricum hat.

Rn.

H. Pellat et P. Sacerdote. Sur l'énergie et les phénomènes électriques de contact. Journ. de Phys. (3) **7**, 24-28.

Man denke sich einen ebenen Condensator, der aus zwei verschiedenen, durch einen Metalldraht m, m' verbundenen Metallplatten M, M' gebildet wird, das Ganze in einem luftleeren Raume. Zufolge der Potentialdifferenz bei der Berührung v haben die Armaturen die Ladungen $\pm q = \pm vS/4\pi e$, wenn man mit S die Oberfläche der Platten, mit e ihren Abstand bezeichnet. Man vergrössere und verkleinere periodisch den Abstand e (innerhalb hinreichend kleiner Grenzen, so dass derselbe immer im Verhältnis zu den Dimensionen unendlich klein bleibt). Diesen periodischen Aenderungen der Capacitäten entsprechen in dem Drahte Wechselströme; also wird Joule'sche Wärme frei. Die Verf. zeigen, dass diese frei werdende Energie in aller Reinheit der zur Hervorbringung dieser Capacitätsänderungen aufgewandten Arbeit äquivalent ist. Der Contact kommt bei der Lieferung der Energie nicht in Betracht; mithin braucht man auch nicht chemische Wirkungen zu erdenken, die bei der Berührung der Metalle oder der Metalle und des Dielektricums erzeugt werden sollen. Lp.

A. Korn. Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer incompressibeln Flüssigkeit. Münch. Ber. **28**, 1898, 135-146.

Verf. kommt unter teilweiser Hinweisung auf sein Werk: Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen etc. (cf. S. 666 dieses Bandes) und unter der Annahme, dass die elektrischen Vorgänge in einem Dielektricum als sehr rasche Schwingungen einer incompressiblen Flüssigkeit aufzufassen sind, zu dem folgenden Resultat:

Haben die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} = -A\left\{\frac{dL}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}L-\frac{\partial u_0}{\partial y}M-\frac{\partial u_0}{\partial z}N\right\},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=-A\left\{\frac{dM}{dt}-\frac{\partial v_0}{\partial x}L-\frac{\partial v_0}{\partial y}M-\frac{\partial v_0}{\partial z}N\right\},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-A\left\{\frac{dN}{dt}-\frac{\partial w_0}{\partial x}L-\frac{\partial w_0}{\partial y}M-\frac{\partial w_0}{\partial z}N\right\},$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}=A\left\{\frac{dX}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}X-\frac{\partial u_0}{\partial y}Y-\frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}=A\left\{\frac{dY}{dt}-\frac{\partial v_0}{\partial x}X-\frac{\partial v_0}{\partial y}Y-\frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=A\left\{\frac{dZ}{dt}-\frac{\partial w_0}{\partial x}X-\frac{\partial w_0}{\partial y}Y-\frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}$$

Lösungen, welche den Bedingungen genügen:

$$X=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L+\frac{\partial u_0}{\partial y}M+\frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\},$$

$$Y=\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}L+\frac{\partial v_0}{\partial y}M+\frac{\partial v_0}{\partial z}N\right)\right\},$$

$$Z=\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}L+\frac{\partial w_0}{\partial y}M+\frac{\partial w_0}{\partial z}N\right)\right\},$$

$$L=\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_0}{\partial x}X+\frac{\partial u_0}{\partial y}Y+\frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\},$$

$$M=\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\frac{\partial v_0}{\partial x}X+\frac{\partial v_0}{\partial y}Y+\frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\},$$

$$N=\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}-\frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)+\frac{\partial w_0}{\partial x}X+\frac{\partial w_0}{\partial y}Y+\frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\},$$

so stellen die Geschwindigkeiten:

$$[u]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}u_0\,dt+X\cos\frac{t}{T}2\pi+L\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$[v]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}v_0\,dt+Y\cos\frac{t}{T}2\pi+M\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$[w]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}w_0\,dt+Z\cos\frac{t}{T}2\pi+N\sin\frac{t}{T}2\pi$$

einen möglichen Bewegungszustand einer incompressiblen Flüssigkeit dar, welchen wir als den dielektrischen Zustand der Flüssigkeit bezeichnen.

Befindet sich eine Flüssigkeit zu irgend einer Anfangszeit im dielektrischen Zustande, so muss dieser Zustand stets erhalten bleiben, wenn nur von der normalen Geschwindigkeitscomponente u_n der Flüssigkeit an

der Oberfläche stets die Erfüllung der Bedingung des dielektrischen Zustandes $u_n = [u]_n$ gefordert wird. Rn.

R. Swyngedauw. Sur la décharge d'une bouteille de Leyde. C. R. **126**, 1628-1630.

Eine Leydener Flasche wird durch zwei in Serienschaltung befindliche Spulen entladen. Die Potentialdifferenz an den Enden der Doppelspule zur selben Zeit t ist $V = v_1 + v_2$, gleichgültig, ob der Strom gleichförmig ist oder nicht. Wenn der Strom gleichförmig ist, gehen v_1, v_2 und V zu gleicher Zeit durch ihr Maximum. Das Potentialmaximum an den Enden der Doppelspule ist gleich der Summe der Potentialmaxima an den Enden einer jeden. Wenn der Strom ungleichförmig ist, gilt diese Relation nicht. Das Potential wurde nach der Funken-Methode gemessen und die Formel bestätigt gefunden. Hieran knüpft sich eine Erörterung über die Gleichheit des statischen und dynamischen Potentials. Rn.

J. Bergmann. Zur Bestimmung der Dauer elektrischer Schwingungen von grossen Perioden. Wiedemann Ann. **64**, 685-707.

Bekanntlich genügt bei einem Condensator die Elektricitätsmenge q bei der Stromstärke i in der Leitung zur Zeit ϑ der Gleichung

$$\frac{d^2q}{d\vartheta^2} + \frac{w}{p}\frac{dq}{d\vartheta} + \frac{q}{pc} = 0,$$

woraus folgt

$$q = e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}(A\cos\beta\vartheta + B\sin\beta\vartheta).$$

Es ist

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{pc} - \frac{w^2}{4p^2}}.$$

Setzt man $A = Q$ und $B = \frac{w}{2p\beta}Q$, so ist

$$q = Qe^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\left(\cos\beta\vartheta + \frac{w}{2p\beta}\sin\beta\vartheta\right).$$

Durch Einführung des Hülfswinkels φ, wo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2p\beta}{w},$$

wird

$$q = \frac{Q}{\beta\sqrt{pc}}e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\sin(\beta\vartheta + \varphi),$$

$$i = \frac{Q}{\beta pc}e^{-\frac{w}{2p}\vartheta}\sin\beta\vartheta.$$

Hae.

F. Lori. Studio sperimentale sopra la capacità dei condensatori. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 55-61.

Wird ein Condensator auf sinusoidales Potential

$$V = V_0 \sin(\omega t), \quad \text{Periode } \tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

geladen, so ergiebt sich für die während der Elektrisirung zerstreute Energie der Ausdruck:

$$W = \frac{\omega C V_0^2}{ke} \sin(ke),$$

wo C die Capacität, k eine Constante bedeutet. Setzt man

$$\omega = 2\pi n, \quad k = \frac{\omega}{v},$$

so geht näherungsweise W über in

$$W_1 = \frac{\pi \varepsilon V_0^2 n^2}{4 v e}.$$

Um die Veränderungen von W als Function von n genauer zu bestimmen, hat der Verf. eine neue Reihe von Experimentaluntersuchungen unternommen. Hae.

F. Pockels. Bestimmung maximaler Entladungsstromstärken aus ihrer magnetisirenden Wirkung. Wiedemann Ann. 65, 458-475.

Bezeichnet i die Stromstärke zur Zeit t nach Beginn der aperiodischen Entladung einer Batterie von der Capacität C, ferner L die Selbstinduction, w den Widerstand des Schliessungsbogens und V_0 die anfängliche Potentialdifferenz, so ergiebt die Integration der Differentialgleichung für i unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen die Gleichung

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{w}{2L}t} \left(e^{\frac{R}{2L}t} - e^{-\frac{R}{2L}t} \right),$$

wo $R = \sqrt{w^2 - \frac{4L}{C}}$ oder $R = w\sqrt{1 - \left(\frac{w_0}{w}\right)^2}$ ist, wenn man den Grenzwiderstand $2\sqrt{\frac{L}{C}}$, bei dem die oscillatorische Entladung beginnt, mit w_0 bezeichnet. Diese Gleichung für i gilt allerdings, wie Verf. hervorhebt, unter dem Vorbehalt, dass streng genommen der Bedingung $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 0$ genügt werden müsste.

Das Maximum der Stromstärke i_m und die Zeit t_m bis zu seinem Eintritt werden allgemein und in zwei besonderen Fällen entwickelt. Für sehr grosse w ist $t_m = \frac{L}{w} \log\left(\frac{w}{L} C\right)$, $i_m = \frac{V_0}{w}$, i_m also von Capacität und Selbstinduction unabhängig; ferner für $w = w_0$:

$$t_m = \frac{2L}{w_0} = \sqrt{LC},\ i_m = i = \frac{2}{e}\frac{V_0}{w_0}.$$

Zwischen diesen letzten Ausdrücken und den entsprechenden bei ungedämpfter oscillatorischer Entladung besteht eine einfache Beziehung. Vom ersten zum zweiten Grenzfall findet ein stetiger Uebergang statt.

In verschiedenen Versuchsreihen werden die hieraus berechneten Werte i_m mit den durch magnetometrische Messungen an Basaltstäben gewonnenen Werten i verglichen. Gt.

Buisson. Mesure de la vitesse des particules électrisées dans la décharge par la lumière ultra-violette. C. R. **127**, 224-226.

Für einen geladenen ebenen Condensator ist im Falle des Gleichgewichts das Potential eine lineare Function der Entfernung von einer der Platten. Unter dem Einfluss des ultravioletten Lichts wird das Gleichgewicht gestört; es tritt freie Elektricität auf, das Potential vermindert sich, und die Linie, die das Potential als Function des Abstandes von den Platten darstellt, erhält die Gestalt einer Parabel. Die Dichtigkeit der Elektricität ist durch die Gleichung $\partial^2 V/\partial x^2 = -4\pi\varrho$ bestimmt; hieraus kann man die Geschwindigkeit der elektrisirten Partikel berechnen. Gt.

H. A. Rowland and T. D. Penniman. Electric absorption in condensers. Johns Hopkins Univ. Circ. **17**, 52-53.

Die Formel für die elektrische Absorption in einem Condensator (Maxwell, § 328 ff.) wird für den Fall, dass die elektromotorische Kraft periodisch ist, entwickelt. Capacität und Absorption wirken wie Capacität und ein Widerstand in Serienschaltung. Die für den Versuch berechneten Zahlenwerte zeigen mit den gemessenen leidliche Uebereinstimmung. Gt.

A. Witting. Zur Galvanometrie rascher, stossweise erfolgender Entladungen. Wiedemann Ann. **65**, 621-628.

Verf. zeigt, dass eine sehr rasche, regelmässige Folge von Entladungsstössen galvanometrisch gemessen werden kann, und giebt eine Multiplications- und eine Zurückwerfungsmethode nebst den Formeln an, durch die sich die constante Ruhelagenverschiebung und das Dämpfungsverhältnis der Nadel bestimmen lässt. Gt.

J. A. Erskine. Ueber die gegenseitige Wirkung zweier Stromkreise und ihre Anwendung auf die Bestimmung der Dielektricitätsconstanten. Wiedemann Ann. **66**, 269-283.

Für zwei Stromkreise, deren Widerstände mit W_1 und W_2, Capacitäten mit C_1 und C_2, Inductionscoefficienten mit L_1 und L_2, Coefficient der gegenseitigen Induction M sind, gelten die Gleichungen:

$$(I)\quad \begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M_1 \frac{di_2}{dt} + W_1 i_1 - \frac{\varepsilon_1}{C_1} = 0, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + M_2 \frac{di_1}{dt} + W_2 i_2 - \frac{\varepsilon_2}{C_2} = 0. \end{cases}$$

Für den Fall der oscillatorischen Entladung haben die Lösungen die Form:

$$(II)\quad \begin{cases} i_1 = \mathfrak{A}_1 e^{-q_1 t} \sin p_1 t + \mathfrak{C}_1 e^{-q_1 t} \cos p_1 t \\ \qquad + \mathfrak{B}_1 e^{-q_2 t} \sin p_2 t + \mathfrak{D}_1 e^{-q_2 t} \cos p_2 t, \\ i_2 = \mathfrak{A}_2 e^{-q_1 t} \sin p_1 t + \mathfrak{C}_2 e^{-q_1 t} \cos p_1 t \\ \qquad + \mathfrak{B}_2 e^{-q_2 t} \sin p_2 t + \mathfrak{D}_2 e^{-q_2 t} \cos p_2 t, \end{cases}$$

wobei mit $-q_1 \pm p_1$ und $-q_2 \pm p_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) x^4 + \left(\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_2}{L_2}\right) x^3 + \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{W_1 W_2}{L_1 L_2}\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{W_1}{L_1 L_2 C_2} + \frac{W_2}{L_2 L_1 C_1}\right) x + \frac{1}{L_1 C_1 L_2 C_2} = 0$$

bezeichnet sind. Es werden die Werte von $p_1^2 + q_1^2$ und $p_2^2 + q_2^2$ bestimmt. Aus denselben folgt, dass sowohl im primären, wie im secundären Stromkreise zwei Schwingungen existiren. Sind p_1 und p_2 bekannt, so lassen sich auch q_1 und q_2 bestimmen. Um i_2 zu finden, müssen die Constanten der Gleichung (II) bestimmt werden. Es ist

$$i_2 = A \left\{ p_1 e^{-q_1 t} \sin\left(p_1 t - \frac{\alpha}{p_1}\right) - p_2 e^{-q_2 t} \sin\left(p_2 t - \frac{\alpha}{p_2}\right) \right\},$$

wobei

$$A = \left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 \int (p_1^2 - p_2^2) \qquad \alpha = \frac{\left(\frac{d^2 i_2}{dt^2}\right)_0}{\left(\frac{di_2}{dt}\right)_0} + 2 \frac{(p_1^2 q_1 - p_2^2 q_2)}{(p_1^2 - p_2^2)}.$$

Der secundäre Strom besteht also aus zwei Schwingungen, deren Amplituden ihren Schwingungszahlen proportional sind, und deren anfängliche Phasen sich fast um eine halbe Periode unterscheiden.

Hieran schliessen sich die entsprechenden experimentellen Bestimmungen. Rn.

E. Ayrton and T. Mather. Galvanometers (third paper). Phil. Mag. (5) **46**, 349-379.

In der ausführlichen Besprechung der verschiedenen Galvanometer-Typen wird die Theorie für solche mit „nicht gedämpfter" und solche mit aperiodischer Bewegung gegeben. Hae.

A. Oberbeck. Ueber die Spannung an dem Pole eines Inductionsapparates. Wiedemann Ann. **64**, 193-216.

Die von dem Verf. (Wied. Ann. **62**) beschriebene Methode, die Maximalspannung an dem Pole eines Inductionsapparates experimentell zu bestimmen, kann, wie zunächst gezeigt wird, dazu dienen, die Abhängigkeit der secundären Spannung von der Stärke des primären Stroms experimentell zu prüfen. Verf. wirft sodann die Frage auf, ob eine Berechnung der Secundärspannung aus den Bestimmungsstücken des Inductoriums durchführbar ist. Hierzu wird die von R. Colley (Wied. Ann. **44**) gegebene Formel

$$V_2 = \frac{qJ\lambda^2}{\frac{\lambda^2}{x^2}-1}\left\{\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t - \frac{1}{x}\sin xt\right\},$$

wo $x^2 = \frac{1}{p_1 c_1}$ und $\lambda^2 = \frac{1}{p_2 c_2}$ ist, in besonderen Fällen untersucht. Der Fall, in dem λ gross ist im Vergleich zu x, führt unter der Annahme $q = \sqrt{p_1 p_2}$ auf die von Walter (Wied. Ann. **62**) aufgestellte Formel, während der Fall, in dem x gross ist im Vergleich zu λ, unter derselben Annahme die Formel

$$(V_2)_{\max} = -J\sqrt{\frac{p_1}{c_2}}$$

ergiebt. Dieser Fall gilt von den untersuchten Fällen als der wahrscheinlichste, doch wird darauf hingewiesen, dass bei dem Inductionsvorgange so vielerlei Umstände in Betracht zu ziehen sind, dass eine Berechnung der Secundärspannung vorläufig noch aussichtslos ist. Der übrige Teil der Abhandlung untersucht den Zusammenhang der Spannung mit der Schlagweite bei Funkenentladung. Gt.

V. Jones. On the calculation of the coëfficient of mutual induction of a circle and a coaxial helix, and the electromagnetic force between a helical current and uniform coaxial circular cylindrical current sheet. Lond. R. S. Proc. **62**, 247-250 (Abstract); **63**, 192-205 (Paper).

Für den Coefficienten der Induction zwischen einem Strom von der Form einer Schraubenlinie und einem coaxialen kreisförmigen Strom hat der Verf. bereits früher eine unendliche Reihe abgeleitet, deren Glieder elliptische Integrale enthalten. Es wird nun eine Recursionsformel zur Berechnung der einzelnen Glieder mitgeteilt. Ferner wird durch partielle Integration ein zweiter Ausdruck für den Inductionscoefficienten in geschlossener Form gefunden, der ebenfalls auf elliptische Integrale hinausläuft. Die Induction zwischen einem Strom in Schraubenlinienform und einem Strom in Form eines coaxialen Kreiscylinders ist, wenn die Stromlinien im Querschnitt des Cylinders liegen, auf dieselben Formeln zurückzuführen. Differentialformeln für die Aenderung des Inductions-

coefficienten bei kleinen Aenderungen der Constanten werden ebenfalls gegeben. Auch Zahlenbeispiele werden angeführt. Br.

V. Spagnuolo. Sugli effetti della resistenza, dell'auto-induzione e della capacità nella distribuzione della corrente in un sistema trifase a stella. Nuovo Cimento (4) **7**, 293-319.

Aufstellung der Formeln für die Stromintensitäten in einem Dreiphasensystem mit Sternverzweigung unter Berücksichtigung der drei Grössen: Widerstand, Selbstinduction und Capacität, und Prüfung derselben an einem Gleichstromdynamo mit Gramme'schem Ring.

Hae.

G. Grassi. Studio sul calcolo delle dimensioni dell'indotto nelle dinamo a corrente continua. Napoli Rend. (3) **4**, 154-171, 195-206.

Die Beziehung zwischen Länge und Durchmesser des Ankers einer Gleichstrommaschine von zweifachem Typus wird mathematisch entwickelt und durch aus der Praxis entnommene Daten näher beleuchtet.

Hae.

G. H. Bryan. On electromagnetic induction in plane, cylindrical and spherical current-sheets, and its representation by moving trails of images. Parts II and III. Phil. Mag. (5) **45**, 381-397.

Verf. behandelt bekannte Probleme mehr geometrisch als analytisch, die Resultate der letzteren Behandlungsweise zum Teil als bekannt voraussetzend. Hae.

M. Deprez. Sur un nouvel électrodynamomètre absolu. Journ. de Phys. (3) **7**, 697-702.

Die Aufgabe, welche der Verf. sich gestellt und gelöst hat, besteht darin, ein elektrodynamisches System zu verwirklichen, bei welchem die von der Wirkung des Stromes herrührenden Kräfte einfache algebraische und in aller Strenge gültige Functionen der Abmessungen der festen und der beweglichen Stromkreise werden, ohne dass diese Abmessungen irgend einer einschränkenden Bedingung unterliegen. Die Lösung verwendet einen Ringkörper, der durch die Umdrehung einer geschlossenen Figur von beliebiger Gestalt um eine verticale Axe entsteht. Lp.

W. G. Rhodes. Contributions to the theory of alternating currents. Lond. R. S. Proc. **62**, 348-349.

Kurze Anzeige einer Arbeit. Danach soll eine elementare, die Integration von Differentialgleichungen nicht erfordernde Theorie der Berechnung constanter Wechselströme gegeben werden unter der Voraussetzung, dass diese sich durch einfache trigonometrische Functionen der Zeit darstellen lassen. In einem zweiten Teil soll eine Abänderung der

Theorie gegeben werden, für den Fall, dass die Darstellung der Ströme nicht mehr durch einfache trigonometrische Functionen, sondern nur durch Fourier'sche Reihen möglich ist. Br.

P. Bott. Graphische Darstellung elektrischer Wechselströme. Pr. (No. 60) Leibniz-Gymn. Berlin. 35 S. 4°.

Verf. zeigt auf Grund der einschlägigen wissenschaftlichen Litteratur an einer Reihe von Aufgaben, in welcher Weise man die graphisch gedeuteten Gesetze von Ohm und Kirchhoff in der Lehre von den sinusoidalen Wechselströmen verwerten kann. Der Hauptzweck dabei ist, die Darstellung so zu gestalten, dass Anfänger leicht in den Stoff eindringen können. Rn.

A. G. Rossi. Sopra uno speciale elettrodinamometro proprio alla misura della differenza di fase fra due correnti alternative. Nuovo Cimento (4) **7**, 319-333.

Beschreibung des Instrumentes und Theorie desselben, das sowohl als Phasometer wie als Wattmeter dienen kann, während Arno früher (F. d. M. **28**, 782, 1897) zu diesem Zwecke zwei verschiedene Instrumente angegeben hatte. Hae.

H. A. Rowland. Electrical measurement by alternating currents. Phil. Mag. (5) **45**, 66-85.

Verf. bespricht, zum Teil nur in Andeutungen, eine ganze Reihe von Methoden, im ganzen 27, zur Messung elektrischer Grössen, insbesondere Inductionscoefficienten, Capacitäten und Widerstände, durch Wechselströme. Die mathematischen Formeln dienen nur zur näheren Erläuterung der Methoden. Br.

M. E. Rice. Alternating currents in Wheatstone's bridge. Kansas Univ. Quart. J. **7**, 31-36.

Für Wechselströme müssen nach P. Steinmetz die Kirchhoff'schen Gesetze lauten:

$$1)\quad \Sigma J = 0,\quad 2)\quad \Sigma JZ = \Sigma E, \text{ wo}$$

$$E = e + \sqrt{-1}\cdot e',\quad [E] = \sqrt{e^2 + e'^2},$$

$$J = i + \sqrt{-1}\cdot i',\quad [J] = \sqrt{i^2 + i'^2},$$

$$Z = r - \sqrt{-1}\cdot x,\quad [Z] = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Verf. wendet diese Gesetze auf verschiedene Combinationen an, die man mit der Brücke vornehmen kann. Hae.

P. Janet. Sur le redressement des courants alternatifs. C. R. **126,** 1785-1788.

Es wird die mittlere und wirkliche elektromotorische Kraft eines einem Gramme'schen Ringe unter gewissen Bedingungen entnommenen Wechselstromes berechnet und durch Versuche eine qualitative, aber nicht quantitative Verification der Formel nachgewiesen. Rn.

A. G. Rossi. Sopra uno speciale sistema di due avvolgimenti percorsi da correnti alternative sinusoidali. Nuovo Cimento (4) **8,** 5-32, 353-405.

A. G. Rossi. Su talune proprietà di un sistema di due correnti alternative difasate qualunque, ed applicazione ad un apparecchio di misura e ad un motore a campo Ferraris. Torino Atti **33,** 647-658.

Der Apparat hat drei Spiralen, durch welche die Wechselströme

$$h_1 = \varkappa c' \sin(\omega t - \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$h_2 = \varkappa c'' \sin(\omega t + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$h_3 = \varkappa c''' \sin(\omega t + \xi)$$

geschickt werden. Es ist

$$c''' = \sqrt{c'^2 + c''^2 + c'c'' \cos\varphi},$$

$$\xi = \text{arc tg}\left(\frac{c'' - c'}{c'' + c'} \,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sin\xi = \frac{c'' - c'}{c'''} \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\xi = \frac{c'' + c'}{c'''} \cos\frac{\varphi}{2};$$

K ist eine von der Anzahl der Windungen, von der Oberfläche u. s. w. abhängige Constante. Sind L_1 und L_2 die Inductionscoefficienten der Ströme, so ist der Vector des resultirenden Feldes:

$$R = \sqrt{c'c'' L_1 L_2} \sin\varphi.$$

Amplitudenverhältnis und Phasendifferenz werden ebenfalls bestimmt.

Hae.

W. P. Boynton. A quantitative study of the high-frequency induction coil. Phil. Mag. (5) **46,** 312-338.

Die Arbeit enthält in ihrem mathematischen Teile eine weitere Ausführung der Arbeiten über die Tesla-Spule von Oberbeck (Wied. Ann. **55**), Domalip und Koláček (ibid. **57**), Blümcke (ibid. **58**) und Wien (ibid. **61**), über die bereits früher berichtet worden ist.

Hae.

H. Poincaré. La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. Paris: G. Carré et C. Naud. 80 S. 8°. (Sammlung Scientia.)

Das kleine Werk besitzt auf seinen 80 Seiten eine erstaunliche Reichhaltigkeit; nur wer den Stoff so meisterhaft beherrscht, wie Poincaré, ist imstande, ihn so übersichtlich anzuordnen. Wir müssen uns darauf beschränken, den Inhalt der einzelnen Kapitel kurz anzugeben. 1. Allgemeines über die elektrischen Erscheinungen. 2. Die Theorie von Maxwell. 3. Die Kenntnis der elektrischen Schwingungen von Hertz. 4. Der Erreger von Hertz. 5. Beobachtungsmittel, besonders der Resonator. 6. Fortpflanzung der Schwingung längs eines Drahtes. 7. Messung der Wellenlänge und die multiple Resonanz. 8. Fortpflanzung der Schwingung in der Luft. 9. Fortpflanzung im Dielektricum. 10. Erzeugung sehr schneller Schwingungen. 11. Nachahmung der optischen Phänomene. 12. Analogien zwischen dem Licht und den Strahlen von elektrischer Kraft.

Wie man sieht, ist die Kenntnis des Werkchens unerlässlich für jeden Physiker, der sich mit Hertz'schen Schwingungen beschäftigen und sich schnell einen Ueberblick über das ganze Gebiet verschaffen will.

Auf S. 24 ist ein kleiner Irrtum untergelaufen. Es heisst dort von Hertz, er sei zum „Oberlehrer“ in Karlsruhe ernannt worden und bald darauf, im Begriff, sich sein neues Laboratorium in Bonn einzurichten, gestorben. Da wenige Zeilen später auf Hertz' Principien der Mechanik hingewiesen wird, so sei an das von H. von Helmholtz herrührende Vorwort zu diesem Werk erinnert, wo es auf S. 18 heisst, dass Hertz 1885 ordentlicher Professor der Physik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe und 1889 Ordinarius der Physik der Universität zu Bonn wurde, wo er doch offenbar ein reich ausgestattetes Laboratorium und einen grossen physikalischen Apparat vorfand. Hae.

A. Ekström. Ueber die Untersuchung der Schwingungen eines Hertz'schen Oscillators durch das Abmessen interferirender Drahtwellen. Wiedemann Ann. **64**, 315-324.

Indem Verf. den von V. Bjerknes eingeschlagenen Weg betritt, zeigt er, dass die Interferenzcurve bei variabler Drahtlänge, z. B. in einer Lecher'schen Combination, die Gleichung hat:

$$J = K \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\frac{\gamma}{\lambda}y-(p-1)\frac{c}{\lambda}} \sin\left[2p\pi\frac{y}{\lambda}+2(p-1)\pi\frac{c}{\lambda}+k\right].$$

Verf. gesteht, dass die Grundlagen seiner Untersuchung nicht hinreichend allgemein genug sind, um diejenigen von Drude zu umfassen.

Hae.

M. Lamotte. Ueber elektrische Oberschwingungen. Wiedemann Ann. **65**, 92-105.

J. v. Geitler. Ueber complicirte Erreger Hertz'scher Schwingungen. III. Wiedemann Ann. **66**, 999-1008.

Unter vereinfachenden Annahmen berechnet v. Geitler die Schwingungen, die in einem Systeme von n einander beliebig beeinflussenden einfachen Hertz'schen Erregern möglich sind, bezw. werden die in der zweiten Mitteilung gegebenen Gleichungen auf Grund eines Versehens, auf das H. Lorberg aufmerksam gemacht hat, corrigirt. Der praktisch häufigste Fall eines Systems zweier einfachen Erreger, also $n = 2$, als dessen wichtigste Formen die Lecher'sche und die Blondlot'sche Combination anzusehen sind, wird vom Verf. ganz besonders eingehend discutirt, namentlich mit Rücksicht auf die Arbeiten von Koláček, Drude, Lamotte und Mazzotto.

Während nämlich Koláček, Drude und Lamotte nur die grössere Grundschwingung und deren Oberschwingungen in ihren theoretischen Untersuchungen erhalten, ist es nach Mazzotto (F. d. M. **28**, 784, 1897) und v. Geitler theoretisch und experimentell höchst wahrscheinlich, dass neben der genannten noch eine kleinere Grundschwingung vorhanden ist. Hae.

M. Abraham. Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. Wiedemann Ann. **66**, 435-472.

Die Maxwell'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik werden auf krummlinige Coordinaten transformirt, alsdann speciell der Fall eines Rotationskörpers und im besonderen der eines lang gestreckten Rotationsellipsoides ins Auge gefasst. Abgesehen von den Stetigkeits-, bezw. Grenzbedingungen hängt die Lösung der gestellten Aufgabe von particularen Integralen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(-p_n^2 + \frac{K_n}{1-x^2}\right) y = 0$$

ab. Dieser wird, soweit als nötig, eine mathematische Betrachtung gewidmet. Die Resultate werden alsdann dem Falle eines Stabes angepasst, d. h. dem eines Rotationsellipsoides, welches so gestreckt ist, dass das Quadrat des Quotienten aus der kleinen Halbaxe (b) und dem halben Abstande der Brennpunkte (1) verschwindend klein ist. Die erste und die zweite Näherung werden ermittelt, und zum Schlusse werden die auf elektrische Schwingungen sich beziehenden Resultate in 12 Sätzen ausgesprochen und discutirt. Hae.

H. Lamb. On the reflection and transmission of electric waves by a metallic grating. Lond. M. S. Proc. **29**, 523-544.

Nachdem zuerst einige elektrostatische Probleme behandelt worden sind, wird an die Berechnung der Störung herangetreten, die ein elektrischer Wellenzug durch ein ebenes Gitter erfährt, das aus parallelen und gleich weit abstehenden metallischen Streifen besteht. Die Behandlung ist eine approximative, da sie die Annahme in sich schliesst, dass die

Wellenlänge gross ist gegen den Abstand je zweier auf einander folgenden Streifen. Es handelt sich also mehr um Hertz'sche Wellenprobleme als um solche der Optik. Die durch Zeichnungen erläuterten elektrostatischen Probleme sollen die Resultate der beiden behandelten Wellenprobleme veranschaulichen. Hae.

P. Duhem. Remarques touchant les lois du résonateur hertzien établies par M. Turpain. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 64-67.

Zur Erklärung von Versuchen, die Turpain der Gesellschaft der Wissenschaften von Bordeaux vorgeführt hatte, beruft sich Duhem auf seine Erklärung der Rolle des Hertz'schen Resonators in einer Note des Éclairage électrique von 1895, wo er eine Theorie entwickelt habe, welche die Verallgemeinerung der Helmholtz'schen sei, indem sowohl longitudinale wie transversale Ströme in den Leitern angenommen werden. Danach ist der elektrische Zustand eines Metalldrahtes von schwachem Querschnitte dem Schwingungszustande einer tönenden Pfeife bei der Hypothese der Schichtbildung vergleichbar. Lp.

S. Lagergren. Ueber die Dämpfung elektrischer Resonatoren. Wiedemann Ann. **64**, 290-314.

R. Blondlot. Ueber die Selbstinductionscoefficienten elektrischer Resonatoren. Wiedemann Ann. **64**, 811-812.

Die Gesamtdämpfung δ eines geschlossenen Hertz'schen Resonators besteht aus zwei Componenten: aus dem Decrement δ_j durch Entwickelung Joule'scher Wärme und dem Decrement δ_s durch Strahlung. δ_j lässt sich in den vorliegenden Fällen mit Hülfe der alten Elektrodynamik berechnen. Bei Ableitung von δ_j macht Verf. eine kritische Bemerkung über einen Irrtum, der angeblich Blondlot bei Berechnung des Selbstinductionscoefficienten L eines Quadrates passirt ist. Dieser erwidert, dass sein Wert von Lagergren richtig abgeleitet sei, dass aber die Kürze des von Poincaré in dessen Werk „Les oscillations électriques“ über seine Arbeit gegebenen Referats wohl Anlass zur Annahme eines solchen Irrtums geben könne. In Beziehung auf die Dämpfung durch Strahlung δ_s lässt sich allgemein theoretisch nur ermitteln, dass die δ_s für alle Resonatoren abnimmt mit wachsender Capacität; im übrigen lassen sich die Hertz'schen Resonatoren in offene (geradlinige) und in geschlossene Leiter einteilen, deren Dämpfung ihren Gesetzen nach ausgeprägte Verschiedenheiten darbietet. Ueber diese Gesetze selbst lässt sich zur Zeit nur wenig aussagen. Hae.

A. Sommerfeld. Ueber die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes. Wiedemann Ann. **67**, 233-290 (1899).

Hat Drude in seiner Arbeit über die elektrischen Schwingungen in zwei parallelen Drähten sich der abgeleiteten Begriffe Selbstinduction,

Gesamtwiderstand, Gesamtstromstärke bedient, so legt Verf. die reine Maxwell'sche Theorie zu Grunde, die solche Begriffe nicht kennt; er zeigt, dass der elektrodynamische Zustand von Bessel'schen Functionen und von der transcendenten Gleichung

$$x \cdot \log x = y$$

abhängig ist. Die Discussion der letzteren nötigt, zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Im ersten Falle entspricht die Lösung den allgemein verbreiteten Vorstellungen über die Natur der Drahtwellen, vor allem ist die Abweichung der Fortpflanzung von der Lichtgeschwindigkeit, sowie die Dämpfung der Welle beim Fortschreiten längs des Drahtes nur sehr gering. Im zweiten Falle konnte die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit sehr erheblich werden, gleichzeitig wurde auch die Dämpfung viel stärker. Zwischen den Fällen 1 und 2 giebt es eine continuirliche Reihe von Uebergängen. Auch die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte entsprach im Falle 1 und widersprach im Falle 2 den darüber verbreiteten Vorstellungen. Im Falle 1 nehmen die Kräfte von der Oberfläche aus nach innen hin sehr rasch ab, nach aussen hin aber ziemlich langsam. Im Innern stehen die elektrischen Kraftlinien nahezu tangential, im Aeussern fast genau senkrecht zur Drahtoberfläche. Im Falle 2 kann sich die genannte Oberflächenschicht, weil der Draht zu dünn ist, nicht frei entwickeln; die Kraftlinien verlaufen nach aussen hin auch nicht näherungsweise senkrecht zum Drahte. Zum Schluss weist der Verf. auf eine Reihe noch nicht erledigter Fragen hin. Hae.

P. Straneo. Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.
Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_1, 346-353; 7_2, 206-213.

Nachdem Verf. in einer vorangehenden Untersuchung die gleichzeitige Bestimmung der thermischen und der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle bei verschiedenen Temperaturen geleistet hat, entwickelt er in der vorstehenden die Differentialgleichung für den stationären Temperaturzustand zweier Drähte von der Länge l_1, bez. l_2, wo das Ende von l_1 zugleich der Anfang von l_2 ist, beide aus verschiedenen Metallen bestehenden Drähte hier also zusammengelötet sind. Ein constanter Strom werde durch dieses System geschickt; die anderen Enden und die Umgebung werden auf der constanten Temperatur Null gehalten. Die gesuchten Temperaturen der beiden Drähte erscheinen als die Integrale von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösungen durch ein Näherungsverfahren ermittelt werden.

Die Formeln werden für einen besonderen Fall eingehender entwickelt, um eine Methode zur Messung des Peltier-Effects zu erhalten. Der zweite Teil der Arbeit nimmt die Temperatur der Drähte als variabel an, entwickelt die nötigen Differentialgleichungen und behandelt alsdann den besonderen Fall, dass der Thomson-Effect gleich Null ist.

Hae.

E. Warburg. Zur Theorie der capillarelektrischen Erscheinungen. Berl. Phys. Ges. Verh. **17**, 24-32.

Gegenüber einer Aensserung von Ostwald über die vom Verf. in Wiedemann Ann. **41**, 1-17 (F. d. M. **22**, 1131, 1890) aufgestellte Theorie und über die Helmholtz'sche Ladungsstromtheorie präcisirt Warburg den Gegensatz beider Theorien und stellt im Anschluss daran die Ergebnisse einiger Untersuchungen zusammen, welche aus der Leitungsstromtheorie hervorgegangen sind. Lp.

V. Volterra. Sulla scarica elettrica nei gas e sopra alcuni fenomeni di elettrolisi. Nuovo Cimento (4) **7**, 53-57.

Referat über die Abhandlungen, erschienen in Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{6}_1$, 389-401 (vergl. F. d. M. **28**, 795-796, 1897). Hae.

W. Duane. Ueber elektrolytische Thermoketten. Wiedemann Ann. **65**, 374-402.

In der Kette

$$\text{Lösung I} \;\underset{T_1}{\Big|}\; \text{Lösung II} \;\underset{T_2}{\Big|}\; \text{Lösung I}$$

werden die Trennungsflächen T_1 und T_2 auf den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 gehalten.

Für den Fall, dass die Lösungen I und II dieselbe gelöste Substanz enthalten, aber verschieden concentrirt sind, gilt an einer Trennungsfläche Nernst's Formel (Zeitschr. f. physik. Chem. **4**, 129, 1889)

$$E = \frac{u-v}{u+v} R T \log \frac{c_1}{c_2},$$

wo u und v die Wanderungsgeschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen, c_1 und c_2 die beiden Concentrationen und R die Gasconstante bedeuten. Sie wird experimentell bestätigt, insbesondere auch dann, wenn die elektromotorische Kraft ein Maximum erreicht.

Enthalten die Lösungen I und II verschiedene gelöste Substanzen, aber von derselben Concentration, so besteht für die elektromotorische Kraft an einer Trennungsfläche Planck's Formel (Wiedemann Ann. **40**, 561, 1890)

$$E = R T \log \frac{u'+v''}{u''+v'},$$

wo die Zeichen $'$ und $''$ sich auf die beiden Lösungen beziehen. Der Versuch weist das Auftreten noch anderer elektromotorischer Kräfte nach, die nicht an der Trennungsfläche ihren Sitz haben. Zu ihrer Erklärung nimmt Verf. nach Nernst das Vorhandensein von Kräften an, die in dem Falle, dass die Flüssigkeiten in einer Röhre von der Axe x enthalten sind, für das positive und negative Ion durch $k' \frac{dT}{dx}$ und

$k''\frac{dT}{dx}$ ausgedrückt werden, wo k' und k'' Constanten sind. Die Bewegungsgleichung der Ionen erhält dann, wenn J der Strom, ε die elektrische Ladung eines positiven Gramm-Molecüls, p der osmotische Druck und P das elektrische Potential ist, folgende Form:

$$J = -\varepsilon\left[u - v\frac{dp}{dx} + c(u+v)\frac{dP}{dx} - c(uk' - vk'')\frac{dT}{dx}\right].$$

Diese Formel wird in mehreren besonderen Fällen angewandt, u. a. zur Erklärung des Soret'schen Phänomens. Gt.

G. Donnan. The Thomson-effect in a binary electrolyte. Phil. Mag. (5) **45**, 529-532.

Sei e das Potential der freien Elektricität des Systems, t die Temperatur, so gilt die Gleichung $de = \sigma.dt$. Die Bestimmung des Coefficienten σ scheint noch nicht geleistet zu sein. Verf. findet

$$\sigma = \frac{R}{\omega.\varepsilon}\left(\frac{v-u}{v+u}\right)\left(1+\frac{t}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right),$$

wo v und u die Geschwindigkeiten sind, die das Anion und das Kation unter Einfluss der Krafteinheit erhalten haben, α der Grad der elektrolytischen Dissociation, ω die Valenz jedes Ions und ε die Elektricitätsmenge ist, die mit einem Gramm-Ion verbunden ist. Hae.

F. Dolezalek. Ueber die chemische Theorie des Bleiaccumulators. Wiedemann Ann. **65**, 894-916.

Für die Differenz der elektromotorischen Kräfte zweier Bleiaccumulatoren, die mit Schwefelsäure von verschiedener Concentration gefüllt sind, stellt Verf. zwei Formeln auf, die eine unter Benutzung der Wärmetönung, die andere unter Anwendung der Helmholtz'schen Theorie der Concentrationsströme. Die Uebereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen bestätigt die Umkehrbarkeit des Accumulatorenprocesses und die Theorien von Liebenow und Le Blanc. Gt.

K. F. Löwe. Experimental-Untersuchung über elektrische Dispersion einiger organischer Säuren, Ester und von zehn Glassorten. Wiedemann Ann. **66**, 582-596.

Bezeichnet man mit c das Verhältnis der elektrostatisch gemessenen Einheit der Stromstärke zur elektromagnetisch gemessenen, mit u, v, w die Componenten der resultirenden elektrischen Strömung und mit P, Q, R die Componenten der elektrischen Kraft, so gelten für das Innere des gefüllten Condensators die Gleichungen:

$$(1)\quad u = \sigma P + \frac{\varepsilon}{4\pi c^2}\frac{\partial P}{\partial t},\quad v = \sigma Q + \frac{\varepsilon}{4\pi c^2}\frac{\partial Q}{\partial t},\quad w = \sigma R + \frac{\varepsilon}{4\pi c^2}\frac{\partial R}{\partial t};$$

ε_1, resp. ε_2 ist die Dielektricitätsconstante eines Halbleiters mit der Leitfähigkeit σ_1, resp. σ_2; l_1 und l_2 sind die Abstände der entsprechenden Schichten von den Condensatorplatten; $r = \frac{l_2}{l_1}$.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man die elektrische Kraft in dem Condensator durch die Potentialdifferenz ausdrückt, die zwischen den einzelnen Schichten besteht,

$$(2) \qquad \varepsilon - 2iT\sigma' = \frac{(\varepsilon_1 - 2iT\sigma_1')(\varepsilon_2 - 2iT\sigma_2')}{(\varepsilon_1 - 2iT\sigma_1')r + (\varepsilon_2 - 2iT\sigma_2')(1-r)},$$

wo T die Periode der elektrischen Schwingung ist. Setzt man in (2) $\sigma_1' = \sigma_2' = 0$, so erhält man die für plattenförmig geschichtete Isolatorgemische geltende Gleichung

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 r + \varepsilon_2 (1-r)}.$$

Es wird nun der Wert von ε aus (3) mit dem aus (2) abzuleitenden verglichen, um so festzustellen, ob vorhandene Leitfähigkeit an sich einen Einfluss auf den beobachtbaren Wert der äquivalenten Dielektricitätsconstante ausübt. Die Rechnung ergiebt

$$(4) \quad \varepsilon_\sigma - \varepsilon = \frac{4r(1-r)\, T^2(\varepsilon_2\sigma_1' - \varepsilon_1\sigma_2')^2}{[\varepsilon_1 r + \varepsilon_2(1-r)]^3 + 4T^2[\varepsilon_1 r + \varepsilon_2(1-r)][\sigma_1' r + \sigma_2'(1-r)]^2}.$$

Diese Gleichung wird für besondere Werte von T, r, ε, σ discutirt. Besteht z. B. die zweite Schicht im Condensator aus Glas, und setzt man $cT = \lambda$, so wird

$$(5) \qquad \varepsilon_\sigma - \varepsilon = \frac{2\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left[1 + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{4\lambda^2 c^2 \sigma_1^{\prime 2}}\right]}.$$

Mit Benutzung von (5) wird an einigen Zahlenbeispielen gezeigt, dass die Differenz $\varepsilon_\sigma - \varepsilon$ für lange elektrische Wellen ganz erhebliche Werte erreichen kann, während sie für kurze Wellen verschwindend klein ist.

Rn.

E. Edser. An extension of Maxwell's electro-magnetic theory of light to include dispersion, metallic reflection, and allied phenomena. Lond. R. S. Proc. **63**, 91-92 (abstract), 374-389 (paper).

Verf. entwickelt zunächst eine von der Helmholtz'schen etwas abweichende Theorie über den Spannungszustand eines Dielektricums zwischen zwei Stellen verschiedenen Potentials unter der Voraussetzung, dass die Molecüle des Dielektricums aus zwei verschieden geladenen, aber nur in beschränkter Weise beweglichen Atomen bestehen. Es folgt dann die allgemeine Theorie der Fortpflanzung elektrischer Wellen in solchen Dielektriken, im wesentlichen analog wie bei Maxwell, jedoch unter Einführung von Correctionsgliedern, nämlich der Summen aller Producte von Ladung und Geschwindigkeit eines (durch die elektrische

Anziehung beim Spannungszustand) bewegten Atoms. Diese Glieder, die von einer Wechselwirkung zwischen Materie und Aether herrühren, ändern den Maxwell'schen Ausdruck für den Brechungsindex so, dass eine theoretische Behandlung der im Titel genannten Erscheinungen möglich wird. Die ermittelte Formel für den Brechungsindex stimmt mit den früheren von Ketteler und Glazebrook überein. Br.

J. Larmor. Note on the complete scheme of electrodynamic equations of a moving material medium and on electrostriction. Lond. R. S. Proc. **63**, 365-372.

Die Note bildet eine Ergänzung zu der früheren Arbeit des Verf.'s über dasselbe Thema (vergl. F. d. M. **28**, 792, 793). Sie giebt ausser einer Anzahl von Zusätzen und Berichtigungen hauptsächlich einen allgemeiner gültigen Ausdruck für die Einwirkungen des elektrischen und magnetischen Aethers auf die materielle, in ihm als bewegt vorausgesetzte Substanz, unter der Einschränkung, dass die inneren Aetherspannungen auf die Materie ohne Einfluss bleiben, und unter Ersetzung der magnetischen Ausdrücke durch die ihnen äquivalenten der entsprechenden Molecularströme. Br.

W. Voigt. Ueber den Zusammenhang zwischen dem Zeeman'schen und dem Faraday'schen Phänomen. Gött. Nachr. 1898, 329-344.

W. Voigt. Zur Theorie der von den Herren Macaluso und Corbino entdeckten Erscheinungen. Ibid. 349-354.

W. Voigt. Doppelbrechung von im Magnetfelde befindlichem Natriumdampf in der Richtung normal zu den Kraftlinien. Ibid. 355-359.

Die in der ersten Abhandlung entwickelte gemeinsame Theorie des Faraday'schen und des Zeeman'schen Phänomens signalisirte nach zwei Richtungen hin bis dahin noch nicht in dieser Weise beobachtete Vorgänge. Für Wellen, die parallel zu den Kraftlinien fortschreiten, kündigte sie eine abnorme Drehung der Polarisationsebene an, falls ihre Farbe einem schmalen Absorptionsstreifen nahe liegt, dagegen für Wellen, die normal zu den Kraftlinien fortschreiten, eine gewöhnliche Doppelbrechung.

Die erstere Erscheinung ist von Macaluso und Corbino ohne Kenntnis der Theorie aufgefunden worden, und wie die zweite Abhandlung zeigt, ist die von Voigt entwickelte Theorie in voller Uebereinstimmung mit den Beobachtungen. In der dritten Abhandlung berichtet Verf. über Beobachtung der vorausgesagten Doppelbrechung nach gemeinsam mit Wiechert angestellten Versuchen, zugleich die nötigen theoretischen Erläuterungen gebend. Hae.

O. M. Corbino. A proposito della interpretazione del fenomeno di Zeeman data dal Sig. Cornu. Rom. Acc. L. Rend. (5) **7**$_1$, 241-246.

A. Righi. Sull'interpretazione cinematica del fenomeno di Zeeman. Nuovo Cimento (4) **8**, 50-56.

Nach Corbino müssen zuerst zwei Fragen beantwortet werden, ehe man sich für die Cornu'sche Erklärung des Zeeman'schen Phänomens entscheiden kann. Geschieht die Beantwortung im Verdet'schen Sinne, so muss man sich gegen die Ansichten Righi's wenden, wie sehr derselbe auch die seinigen durch die mathematischen Entwickelungen der an zweiter Stelle genannten Abhandlung zu stützen sucht. Hae.

T. Preston. Radiation phenomena in the magnetic field. Phil. Mag. (5) **45**, 325-339.

Untersuchungen über den sogenannten Zeeman-Effect, d. h. die Vervielfältigung der Spectrallinien in einem magnetischen Felde. Mathematisch von Bedeutung ist nur das Resultat, dass das Verhältnis der Ionisirung zur Trägheit als eine Function der Wellenlänge angesehen werden muss. Br.

A. A. Michelson. Radiation in a magnetic field. Phil. Mag. (5) **45**, 348-356.

Verf. weist nach, dass der sogenannte Zeeman-Effect complicirter ist, als man gewöhnlich annimmt, da auch die Mittellinie wieder mehrfach geteilt ist. Die Formeln dienen nur zur Illustration der Beobachtungen und ihrer Verwertung. Br.

W. Voigt. Lässt sich die Pyroelektricität der Krystalle vollständig auf piëzoelektrische Wirkungen zurückführen? Gött. Nachr. 1898, 166-194; Wiedemann Ann. **66**, 1030-1060.

Das Ergebnis der theoretisch und experimentell an einem Turmalinkrystall durchgeführten Untersuchung ist folgendes.

Von der durch eine Erwärmung unter Atmosphärendruck hervorgerufenen elektrischen Erregung sind rund 80 % auf die Wirkung der die Erwärmung begleitenden Deformation, d. h. auf Piëzoelektricität, zurückzuführen; die übrigen 20 % stellen dagegen eine directe Wirkung der Erwärmung und somit wahre Pyroelektricität dar.

Bei allen Krystallen mit einzelnen krystallographisch ausgezeichneten Richtungen darf eine vollständige Zurückführung der Pyroelektricität auf piëzoelektrische Wirkungen nicht erwartet werden.

Dagegen zeigt die Theorie, dass bei allen Krystallen, die einzelner ausgezeichneter Richtungen entbehren, die Erwärmung nur in soweit elektrisch wirksam ist, als sie Deformationen veranlasst; dass bei ihnen also scheinbare Pyroelektricität sich stets und vollständig auf Piëzoelektricität zurückführen lässt. Hae.

P. Zeeman. De l'influence d'un champ magnétique sur la lumière émise par un corps. Arch. Néerl. (2) **1**, 44-54, 217-220.

P. Zeeman. Sur des doublets et des triplets, produits dans le spectre par des forces magnétiques extérieures. Arch. Néerl. (2) **1**, 383-391.

Dies sind die ausführlichen Abhandlungen, in denen Zeeman über seine Versuche berichtet, durch welche er die Verbreiterung oder Vervielfältigung der Spectrallinien leuchtender Gase zwischen den Polen eines Elektromagneten dargethan hat; zugleich enthalten diese Aufsätze seine theoretischen Ansichten über die Entstehung des Phänomens. Vergl. die Referate über Zeeman, Lorentz und Larmor in F. d. M. **28**, 791 ff., 1897. Lp.

C. H. Wind. Étude théorique des phénomènes magnéto-optiques et du phénomène de Hall. Arch. Néerl. (2) **1**, 119-216.

Der Verf. versucht zu zeigen, wie es möglich ist, eine Theorie aufzustellen, die in befriedigender Weise von allen bisher in dem Gebiete der Magnetooptik bekannten Thatsachen Rechenschaft geben kann. Zu diesem Zwecke geht er von den Maxwell'schen Gleichungen aus, indem er zwischen der Stromstärke und der elektrischen Kraft in einem Magnetfelde eine Relation zulässt, die das Hall'sche Phänomen schon ganz umfasst. Diese Theorie, welche ausserdem zu gewissen, durch neue Versuche zu bestätigenden Folgerungen führt, ist aus der Lorentz'schen hervorgegangen durch eine Umgestaltung und Vervollständigung, die dieser Gelehrte selbst dem Verf. angeraten hat. Als besondere Fälle ergeben sich aus ihr die Erklärungen der gewöhnlichen optischen Erscheinungen bei der Spiegelung oder Brechung durch ein Dielektricum oder ein Metall. Zwischen dieser Theorie und denen von Goldhammer und Drude bestehen gewisse Beziehungen, die besprochen werden. Verf. zeigt ferner, wie gewisse Besonderheiten bezüglich der Reflexion des Lichtes an magnetischen oder unmagnetischen Metallspiegeln unabhängig von jeder Theorie aus allgemeinen Principien hergeleitet werden können. Endlich wird auch der Versuch gemacht, zu der hypothetischen Beziehung zwischen der Stromstärke und der elektrischen Kraft zu gelangen, wobei von einer gewissen Vorstellung über die Natur der Bewegung der Elektricität ausgegangen wird. Lp.

P. Zeeman. Comparaison des mesures relatives à la réflexion de la lumière sur la surface polaire d'un aimant avec les théories de Goldhammer et Drude. Arch. Néerl. (2) **1**, 354-357.

In dem wissenschaftlichen Streite zwischen Drude und Goldhammer (vergl. F. d. M. **25**, 1760, 1893/94) haben die holländischen Physiker sich auf die Seite des Letzteren gestellt; die von Drude vor-

gebrachten Einwände gegen die Beweiskräftigkeit der Versuche dieser Gelehrten werden von Zeeman als unzulässig hingestellt. Lp.

D. A. Goldhammer. Ueber die modernen Theorien der magnetooptischen Erscheinungen am Eisen, Nickel und Kobalt. Wiedemann Ann. **65,** 111-115.

Goldhammer hatte ursprünglich in seiner Theorie einer Constante b einen complexen Wert gegeben, Drude nur einen reellen. Nachdem Letzterer auch zu einem complexen b übergegangen ist und gezeigt hat, dass seine Theorie mit der von Leathem übereinstimmt (F. d. M. **28,** 794, 1897), gelingt Goldhammer der Nachweis, dass alle drei Theorien und eine vierte von Wind (vergl. das Referat auf S. 746) zu vollkommen identischen Resultaten führen. Hae.

E. Wiedemann und A. Wehnelt. Ueber Lichtknoten in Kathodenstrahlenbündeln unter dem Einfluss eines Magnetfeldes. Wiedemann Ann. **64,** 606-610.

Geht von einer ebenen Kathode ein Bündel paralleler Kathodenstrahlen entgegen einem Kraftlinienbündel, das von einem Pol ausgeht oder zu ihm hinläuft, so wird dasselbe zu einem convergirenden Kegel gesammelt, dessen Spitze bei dem Pole liegt. Die Verf. ziehen aus der Theorie von Poincaré (C. R. **123,** 530, 1896), der diese Erscheinung discutirte, den Schluss: „Die Vereinigungspunkte der Strahlen rücken mit abnehmendem Druck und mit abnehmender Stärke des Magnetfeldes nach dem Magnetpole hin.“ Sie bestätigen diese aus der Theorie gezogene Consequenz durch den Versuch. Rn.

W. Kaufmann. Die magnetische Ablenkbarkeit elektrostatisch beeinflusster Kathodenstrahlen. Wiedemann Ann. **65,** 431-439.

Ist das Potential Φ längs der Fortpflanzungsrichtung des Strahles constant, und ist ein magnetisches Feld nur innerhalb dieser Strecke vorhanden, so ist für kleine Ablenkungen

$$y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2mV'}} \int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx, \quad y_0 = \text{const}\, J/\sqrt{V'},$$

wo Φ_0 das Potential der Kathode, $V' = \Phi' - \Phi_0$, H die magnetische Feldstärke in Richtung der Z-Axe, ε/m die Ladung pro Masseneinheit.

Die im folgenden beschriebenen Versuche bestätigen die in obigen Gleichungen ausgesprochenen Folgerungen aus der Emissionshypothese. Rn.

E. Riecke. Ueber den Reactionsdruck der Kathodenstrahlen. Gött. Nachr. 1898, 195-203; Wiedemann Ann. **66,** 954-979.

Bei einem elektrischen Radiometer bezeichne p den Druck, welcher von den Kathodenstrahlen auf 1 qcm der Flügelfläche, Q die gesamte Fläche der Flügel, $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Kreuzes, l den Abstand der Drehungsaxe von dem Mittelpunkt der Scheiben, ϱ den Coefficienten der Reibung, φ den Drehungswinkel. Es besteht die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho\frac{d\varphi}{dt} = pQl.$$

Das Integral derselben ist, wenn $\alpha = \frac{pQl}{\varrho}$ als die constante Geschwindigkeit angesehen wird, mit welcher das Radiometer sich schliesslich herumdreht:

$$\text{(1)} \qquad \varphi = \alpha t - \alpha\frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\left(1 - e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}\right)$$

und für sehr grosse Werte von t:

$$\varphi = \alpha\left(t - \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\right).$$

Es wird somit

$$\text{(2)} \qquad \varphi = 0 \text{ für } t_0 = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho},$$

$$\text{(3)} \qquad t = 0 \text{ für } \varphi_0 = -\alpha\frac{\mathfrak{M}}{\varrho},$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\varrho}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{t}\log\text{nat}\frac{\alpha\mathfrak{M}/\varrho}{\alpha\mathfrak{M}/\varrho + \varphi - \alpha t}.$$

Wird der Entladungsstrom unterbrochen, und berücksichtigt man ausser der dynamischen auch noch eine statische Reibung P, so ergiebt sich

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho\frac{d\varphi}{dt} + P = 0.$$

Daraus folgt, wenn P klein gegen ϱ ist, für nicht zu grosse Werte von t:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\alpha\left(1 - e^{-\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}t}\right), \\ t = \infty, \quad \varphi_\infty = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}\alpha. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\text{(6)} \qquad \frac{\varrho}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{t}\log\text{nat}\frac{\varphi_\infty}{\varphi_\infty - \varphi}.$$

Für den Druck der Kathodenstrahlen findet sich nun

$$\text{(7)} \qquad p = \alpha\frac{\varrho}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{M}}{Ql}.$$

Im folgenden wird gezeigt, dass die Beobachtungen der Reactionsbewegung zusammen mit denen über die verschwindende Drehung im ganzen vier verschiedene Werte für $\varrho/\mathfrak{M}$ und zwei verschiedene Werte für α liefern. Die ersteren beruhen auf der Benutzung der Gleichungen (6), (5), (4), (2); von den letzteren ist der eine unmittelbar aus der Beobachtung abgeleitet, der andere berechnet mit Hülfe der Gleichung (3). Zur Berechnung des Reactionsdruckes p dient Gleichung (7). Rn.

M. Wien. Ueber die Magnetisirung durch Wechselstrom. Wiedemann Ann. **66**, 859-953.

In der Einleitung werden die älteren Versuche und die Theorie besprochen. In dem ersten Abschnitte wird eine Darstellung der Methode und Versuchsanordnung gegeben, im weiteren werden die Einwirkung von Foucaultströmen und Oberströmen, sowie Versuche mit Sinusströmen erörtert. Die mathematische Entwickelung ist soweit durchgeführt, wie sie zur Verwertung der Beobachtungsresultate erforderlich ist. Rn.

L. Arons. Einfache analytische Behandlung eines schematischen Falles elektromagnetischer Schirmwirkung. Wiedemann Ann. **65**, 590-594.

Verf. integrirt die allgemeinen Gleichungen für die Stromintensitäten zweier im Felde eines Magneten befindlichen Stromkreise in dem besonderen Falle, dass die beiden Leiterkreise gleichen Selbstinductionscoefficienten, aber verschiedenen Widerstand besitzen und einander annähernd decken. Der erhaltene Ausdruck wird für zwei verschiedene Versuchsanordnungen discutirt. Unter der Annahme der Faraday'schen, bei der das magnetische Feld sich aperiodisch ändert, zeigt sich, dass durch Verringerung des Widerstandes w_1 im ersten Stromkreise das Maximum der Stromintensität i_2 im zweiten Stromkreise herabgedrückt und verzögert wird, und für die Henry'sche, bei der das Magnetfeld ein periodisches ist, ergiebt sich, dass bei abnehmendem w_1 die Amplitude von i_2 sich vermindert und, ohne Aenderung der Periode, sich die Phase verschiebt. Gt.

H. du Bois. Ueber magnetische Schirmwirkung. Wiedemann Ann. **65**, 1-37.

Die im ersten Teile der Abhandlung (Wiedemann Ann. **63**, 348 ff.; F. d. M. **28**, 800, 1897) aufgestellten Gleichungen für den kugelförmigen und den cylindrischen Doppelpanzer:

$$\text{(I)}\qquad \mathfrak{g}-1=\tfrac{2}{9}\frac{(\mu-1)^2}{\mu}\left\{(1-\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)+\frac{2\mu^2+5\mu+2}{9\mu}\mathfrak{m}_{12}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\right\},$$

$$\text{(I*)}\qquad \mathfrak{g}-1=\tfrac{1}{4}\frac{(\mu-1)^2}{\mu}\left\{(1-\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)+\frac{(\mu+1)^2}{4\mu}\mathfrak{n}_{12}\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2\right\},$$

wo $\mathfrak{g}$ das Verhältnis der Intensität des offenen Aussenfeldes $\mathfrak{H}_e$ zu derjenigen des geschützten Innenfeldes $(\mathfrak{H})_i$ bedeutet, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{n}$ von den Verhältnissen der Dimensionen des Panzers abhängen und die Indices 1 und 2 sich auf die innere und äussere Schale, der Index 12 auf die dazwischen liegende Luftschicht beziehen, führen in dem Falle einer einzigen Hohlkugel oder eines einzigen Hohlcylinders auf Ausdrücke für $\mathfrak{g}_1$, die schon von Maxwell und Stefan aufgestellt sind. Die Betrachtung des besonderen Falles, dass sich die Aussenschale, sich selbst ähnlich bleibend, ausdehnt, führt dann auf folgende Umformung der Gleichungen (I) und (I*):

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 - \tfrac{2}{81} \frac{(\mu-1)^2 (2\mu^2+5\mu+2)}{\mu^2} \mathfrak{p}_{12} \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2,$$

$$\text{(II*)} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 - \tfrac{1}{16} \frac{(\mu^2-1)^2}{\mu^2} \mathfrak{q}_{12} \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2.$$

Das „innere Schutzverhältnis“ des Doppelpanzers ergiebt sich also durch Multiplication der Schutzverhältnisse der einzelnen Schalen; das subtractive Glied misst deren Wechselwirkung. Aus diesen Gleichungen wird unter gewissen Annahmen das günstigste Radienverhältnis des Doppelpanzers gewonnen. Im übrigen ist die Abhandlung wesentlich experimenteller Natur. Gt.

H. du Bois. Ueber vermeintliche tangentiale Schirmwirkung. Wiedemann Ann. **65**, 403-407.

Verf. unterzieht die Annahme des Vorhandenseins einer tangentialen Schirmwirkung einer Kritik und schliesst aus theoretischen und experimentellen Gründen auf das Nichtvorhandensein derselben. Gt.

Ch. Maurain. Recherches sur les écrans électromagnétiques et l'influence de la fréquence sur l'énergie dissipée dans l'aimantation. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13**, 208-288.

Eine Experimentaluntersuchung mit einzelnen eingestreuten mathematischen Ableitungen. Lp.

H. Pellat. De la variation dans les transformations isothermes de l'énergie électrique. Journ. de Phys. (3) **7**, 18-24.

H. Pellat. Énergie du champ magnétique. Modification du raisonnement classique conduisant à la formule de Neumann. Ibid. 702-708.

In dem ersten Artikel wird gezeigt, dass der gebräuchliche Ausdruck für die Energie eines elektrischen Feldes modificirt werden muss, weil der Wärme Rechnung zu tragen ist, die das System aufnehmen oder an das umgebende Medium abgeben muss während der Elektrisirung, um seine Temperatur constant zu halten. Ferner wird nachgewiesen, wie die Schlüsse abzuwandeln sind, um ebenso einfach zu dem gewünschten

Resultate zu gelangen, falls man die Auswertung der Energie unterlässt, die in vielen Fällen nur ein untergeordnetes Interesse hat. Der zweite Aufsatz behandelt die entsprechende Aenderung des Ausdrucks für die Energie eines magnetischen Feldes, indem drei Fälle betrachtet werden: 1. das Feld wird einzig durch permanente Magnete gebildet, 2. das Feld wird bloss durch Ströme in einem Medium gebildet, dessen Permeabilität von der Feldstärke unabhängig ist, 3. das Feld wird gleichzeitig durch Ströme und durch permanente Magnete gebildet. Lp.

H. Pellat. De l'énergie d'un champ magnétique. C. R. **127**, 507-510.

Verf. erinnert an seinen Hinweis (C. R. **125**), dass in dem Ausdruck für die Energie eines elektrischen Feldes die Wärmeabgabe und -aufnahme nicht unberücksichtigt bleiben darf, und findet denselben Ausdruck für das Magnetfeld im Falle permanenter Magnete. Von demselben Gesichtspunkt aus behandelt er dann zwei Fälle, in denen das Magnetfeld durch geschlossene Ströme erzeugt wird. Gt.

L. Houllevigue. Champ axial d'une bobine tronc-conique. Journ. de Phys. (3) **7**, 466-468.

Magnetisirende Spulen in Form von Kegelstumpfen hat schon Gaugain gebraucht, ohne jedoch das von ihnen erzeugte Feld genau auszuwerten. Diese Berechnung holt der Verf. für seine Versuchszwecke an dem angeführten Orte nach. Lp.

R. de Saussure. Sur la géométrie des champs magnétiques et le mouvement à deux degrés de liberté dans le plan ou sur la sphère. C. R. **126**, 325-328.

R. de Saussure. The geometrical constitution of magnetic fields. John Hopkins Univ. Circ. **17**, 47-48.

Als Typus für die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene gilt bei einem Freiheitsgrade die Rotation; durch zwei Lagen der Figur ist die Bewegung bestimmt. Um für zwei Freiheitsgrade die typische Bewegung zu definiren, stellt Verf. ein Kreissystem auf, nämlich die Schar von Kreisen, die eine Axe OX im Pole O berühren. Wenn man bei diesem System eine Figur (etwa einen Punkt auf der Peripherie eines der Kreise nebst der zugehörigen Tangente) aus einer Lage in eine andere überführt, so gehören auch bei der durch die Anfangs- und Endlage bestimmten Rotation alle Zwischenlagen der Figur der durch das System definirten Bewegung an. Drei Lagen der Figur bestimmen ein System vollständig. Diese Betrachtung lässt sich auf das magnetische Feld und die topographische Fläche anwenden; sie ist auch auf die Kugelfläche und den Raum übertragbar. Gt.

E. Bouty. Nouvelle méthode pour la mesure de l'intensité des champs magnétiques. Journ. de Phys. (3) **7**, 253-261.

Der Aufsatz ist ein Auszug aus einer grösseren, in l'Éclairage électrique erschienenen Abhandlung und enthält hauptsächlich die theoretischen Grundlagen der Methode, welche die reciproke Induction der von Lippmann in seinem Quecksilber-Galvanometer gebrauchten elektromagnetischen Wirkung benutzt. Eine leitende Flüssigkeit, die Flusswasser sein kann, strömt senkrecht zu den Kraftlinien des zu messenden Feldes. Mit Hülfe des Capillarelektrometers misst man die zwischen der oberen und der unteren Seite der Ader inducirte elektromotorische Kraft. Kennt man die Flussmenge, so kann man daraus die Feldstärke ableiten.

Lp.

C. Schürr. Sur les pôles d'un aimant. Journ. de Phys. (3) **7**, 282-285.

Wenn ein Magnet der Einwirkung eines Stromes ausgesetzt wird, so fallen die Angriffspunkte der Resultante der Elementarwirkungen nicht mit den Polen des Magneten zusammen. Nach einer kurzen Zusammenstellung der betreffenden Formeln folgt eine experimentelle Verification.

Lp.

G. Moreau. De la torsion magnétique du fer et de l'acier. Journ. de Phys. (3) **7**, 125-131.

Zuerst leitet der Verf. auf theoretischem Wege die folgenden drei Sätze ab: 1. In einem Punkte eines tordirten Drahtes, der ausserhalb des magnetischen Feldes liegt, ist die magnetische Torsion der Torsion des Drahtes in dem betrachteten Punkte und dem Quadrate der Feldstärke, wenn sie schwach ist, proportional, dagegen unabhängig von dem Durchmesser des Drahtes. 2. Für Punkte zu beiden Seiten des Feldes hat die magnetische Torsion gleiche Werte von entgegengesetztem Vorzeichen, wenn die Drahtenden in Bezug auf das Feld symmetrisch liegen. 3. Längs dem Drahte wächst die magnetische Torsion proportional dem Abstande des betrachteten Punktes von dem nächsten Ende. Sie durchschreitet ein Maximum an den Rändern des Feldes und verschwindet für einen inneren Punkt. Im zweiten Teile des Aufsatzes wird über die zur Bestätigung der Sätze angestellten Versuche berichtet. Lp.

A. Lutteroth. Ueber die Abhängigkeit der Magnetisirbarkeit der Krystalle in verschiedenen Richtungen von der Temperatur. Wiedemann Ann. **66**, 1081-1106.

Unter der W. Weber'schen Annahme drehbarer Molecularmagnete und ganz besonders 1. sehr kleiner Drehwinkel der Molecüle, und 2. dass das auf einen abgelenkten Molecularmagneten ausgeübte rücktreibende Drehmoment dem Ablenkungswinkel, bez. dessen Sinus proportional ist, wird das Drehmoment berechnet, welches ein in drei auf einander senkrechten Richtungen verschieden stark magnetisirbarer Krystall

in einem homogenen Felde erfährt, und dafür wird bei variabler Temperatur t^0 der Ausdruck gefunden:

$$D_t = \frac{N}{3}\mathfrak{H}^2 m^2 [(\eta_{z_0}(1+ct) - \eta_{y_0}(1+bt))^2 \cos^2\beta \cos^2\gamma$$
$$+ (\eta_{z_0}(1+ct) - \eta_{x_0}(1+at))^2 \cos^2\alpha \cos^2\gamma$$
$$+ (\eta_{y_0}(1+bt) - \eta_{x_0}(1+at))^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta]^{\frac{1}{2}},$$

der für t = 0 in einen von Lord Kelvin schon früher gegebenen übergeht. Hae.

A. Korn. Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie. Münch. Ber. 28, 1898, 129-134.

Mit Hülfe der hydrodynamischen Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen wird die Erdrotation mit der Erscheinung des Erdmagnetismus in einen causalen Zusammenhang gebracht. Eine Kautschukkugel in einer incompressibeln Flüssigkeit wird eine gewisse Drehungsgeschwindigkeit um eine Axe zu jeder Zeit beibehalten, solange der Druck auf der Flüssigkeitsoberfläche constant bleibt und keine Reibung stattfindet. Ist dieser Druck jedoch periodisch, so pulsirt die Kautschukkugel, und durch diese Pulsation wird die Constanz der Drehungsgeschwindigkeit so abgeändert, dass zu letzterer noch eine vibratorische Drehungsgeschwindigkeit hinzutritt, welche die Periode der Pulsationsschwingungen besitzt.

Unter Annahme der hydrodynamischen Gravitationstheorie, dass das gesamte Sonnensystem unter der Einwirkung eines äusseren periodischen Druckes stehe und somit die Erde wie eine Kautschukkugel in einer incompressibeln Flüssigkeit sehr rasche Pulsationsschwingungen ausführt, gelangt Verf. zu dem Resultat:

„Die Erdpulsation zusammen mit der Erdrotation liefert in den leitenden Teilen der Erde elektrische Strömungen, welche Magneten mit lauter unter sich parallelen und gleichgerichteten, zugleich der Erdaxe parallelen Axen äquivalent sind, wenn die Schwingungen der Pulsation mit den magnetischen Schwingungen in der hydrodynamischen Theorie gleiche Perioden und gleiche Phasen haben.“ Rn.

W. Ellis. Magnetic results at Greenwich and Kew. Discussed and compared, 1889 to 1896. Brit. Ass. Rep. 1898, 80-108.

W. G. Adams. Account of the late professor John Couch Adams's determination of the Gaussian magnetic constants. Brit. Ass. Rep. 1898, 109-136.

Diese beiden Mitteilungen wurden dem Ausschusse der Association für die Vergleichung und Reduction der magnetischen Beobachtungen überreicht. Der erste Artikel enthält zwölf Tabellen. Der Hauptzweck des Verf. besteht in der hinreichend weit ausgedehnten Discussion der fünftägigen Resultate für Greenwich zum Behufe der Vergleichung mit

den von Chree für Kew gefundenen Resultaten, ferner auch damit man für Greenwich allein die täglichen Ungleichheiten und den täglichen Gang, so wie diese sich aus den fünftägigen Tabellen ergeben, mit denen vergleichen kann, die durch die gewöhnlichen Greenwicher Tabellen gegeben werden, in denen nur Tage extremer Störung fortgelassen sind.

Die zweite Abhandlung giebt einen kurzen Bericht über die von dem verstorbenen Adams in der Theorie des Erdmagnetismus geleistete Arbeit und über seine Bestimmung der Gauss'schen magnetischen Constanten. Die Schrift enthält eine grosse Menge von Einzelheiten, die nicht gut in Kürze wiederzugeben sind. Unter ihnen befinden sich einige recht einfache und bequeme Relationen, die zwischen auf einander folgenden Legendre'schen Coefficienten und ihren als Functionen des Complements der Breite $\theta = \arccos \mu$ betrachteten Ableitungen bestehen.

Gbs. (Lp.)

International conference on terrestrial magnetism and atmospheric electricity. Brit. Ass. Rep. 1898, 733-763.

Bericht über verschiedene in der Conferenz vorgetragene Abhandlungen, von denen einzelne in extenso abgedruckt sind. Die Arbeiten haben jedoch mehr physikalisches als mathematisches Interesse.

Gbs. (Lp.)

Weitere Litteratur.

W. A. Anthony. Lecture-notes on the theory of electrical measurements; prepared for the third-year classes of the Cooper Union night-school of science. New York: Wiley & Sons. VI + 90 S. 12mo.

A. Bajo. Del potenziale elettrico. Napoli. 38 S.

A. V. Bäcklund. Inledning till Theorien for de elektriska Strömmarne. Lund. 112 S. 8°.

C. Barus. A curious inversion in the wave mechanism of the electromagnetic theory of light. Am. J. of science (4) **5**, 343-348.

F. H. Bigelow. Comments on Bulletin No. 21 „Solar and terrestrial magnetism in their relations to meteorology". Am. J. of science (4) **5**, 455-462.

L. Décombe. Résonnance multiple des oscillations électriques. Ann. de Chim. et Phys. (7) **15**, 156-202.

E. Dreher und K. F. Jordan. Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Berlin: J. Springer. 18 S. 8°.

P. Drude. Zur Theorie der anomalen elektrischen Dispersion. Wiedemann Ann. **64**, 131-158.

Aus Leipz. Ber. 1897; vergl. F. d. M. **28**, 789, 1897.

H. du Bois. The magnetic circuit. Translated by E. Atkinson. London, Longmans, Green and Co. XVIII + 362 S. 8° (1896). [Nature 57, 385-386.]

H. V. Gill. A theory to explain the stratification of the electric discharge in Geissler tubes. Am. J. of science (4) 5, 399-417.

W. Grosse. Der Aether und die Fernkräfte. Mit besonderer Berücksichtigung der Welttelegraphie. Leipzig. VIII + 89 S. 8°.

W. Hentze. Analytische Berechnung elektrischer Leitungen. Berlin: J. Springer. V + 81 S. 8°.

Fr. Kerntler. Die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen. Nachtrag zu der Abhandlung: „Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz“. Budapest: Selbstverlag. 18 S. 8°.

Ch. Lagrange. Magnétisme terrestre. La déclinaison d'une boussole, libre et à l'état statique, est-elle indépendante de son moment magnétique? Belg. Mém. in 4° 53, 40 S.

G. Lippmann. Unités électriques absolues. Leçons professées à la Sorbonne en 1884-1885. Paris. 230 S. 8°.

H. A. Lorentz. Beschouwingen over den invloed van een magnetisch veld op de uitstraling van licht. Amst. Versl. 7, 113-122.

H. A. Lorentz. Optische verschijnselen, die met de lading en de massa der ionen in verband staan. Amst. Versl. 6, 506-519, 555-565.

C. Mandoli. Raccolta di problemi sulla elettricità risoluti e spiegati. Napoli. 171 S. 8°.

H. v. Mangoldt. Die Entladung einer Leidener Flasche. Festrede bei der Uebergabe des Rectorates am 1. Juli 1898. Aachen. S. 12-28. 8°.

J. E. Moore. Electrical discharge from the point of view of the kinetic theory of matter. Am. J. of science (4) 6, 21-40.

F. E. Nipher. Electricity and magnetism; a mathematical treatise for advanced undergraduate students. Second edition, revised with additions. St. Louis: J. L. Roland Bock and Stationary Co. XI + 430 S. 8°.

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

R. Clausius. Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. (1850.) Herausgegeben von M. Planck. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften No. 99). Leipzig: W. Engelmann. 55 S. 12°.

Die im 79. Bande von Poggendorff's Annalen veröffentlichte Abhandlung erscheint hier besonders und ist mit einigen Anmerkungen des Herausgebers versehen. Sbt.

G. Kirchhoff. Abhandlungen über Emission und Absorption. Herausgegeben von M. Planck. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften No. 100.) Leipzig: W. Engelmann. 41 S. 12°. Mit dem Bildnis von Kirchhoff.

Die in den Jahren 1859 bis 1862 in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften und in Poggendorff's Annalen (Band 109) erschienenen klassischen Abhandlungen: I. Ueber die Fraunhofer'schen Linien (1859). II. Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme (1859). III. Ueber das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht (1860-1862) werden hier wieder gedruckt und mit einigen Anmerkungen versehen. Sbt.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. Aufl. von L. Pfaundler unter Mitwirkung von O. Lummer. In 3 Bänden. 2. Band, 2. Abteilung. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. XIV + IX + 768 S. 8°.

Mit der vorliegenden zweiten Abteilung des zweiten Bandes findet das Erscheinen der neunten Auflage des bekannten Werkes seinen Abschluss. Die frühere Anordnung der Teile ist in der Wärmelehre im wesentlichen beibehalten, dagegen ist der Inhalt dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft entsprechend ergänzt. Sbt.

P. Duhem. Sur l'équation des forces vives en thermodynamique et les relations de la thermodynamique avec la mécanique classique. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 23-27.

Durch Betrachtung der Gleichungen der Thermodynamik gelangt Verf. zu der Ansicht, dass die „klassische Dynamik“ nur einen ganz besonderen Fall der Thermodynamik darstellt; sobald man an das Studium anderer Systeme gehen will, kann man die Dynamik und die Theorie der Wärme nicht mehr als zwei von einander unabhängige Lehrgebiete ansehen, muss sie vielmehr in ein einziges Gebiet, die Thermodynamik, verschmelzen (vergl. weiter unten die Referate über Duhem). Lp.

K. Schreber. Die absolute Temperatur. Wiedemann Ann. **64**, 163-185.

In einer eingehenden kritischen Untersuchung bespricht der Verf. die von Galilei, von Dalton und die beiden von Lord Kelvin herrührenden Temperaturscalen und kommt zu dem Resultat, dass nur die erste der beiden theoretischen Definitionen von Lord Kelvin, die im

Jahre 1848 gegebene, als wirklich „absolute" Scala gelten kann. Er charakterisirt die einzelnen Scalen folgendermassen:

Die Galilei'sche Wasserstoffdruckscala bedarf zur Definition der Temperatur des Wasserstoffs, als thermoskopischer Substanz, eines Instrumentes zum Messen des Drucks des Wasserstoffs bei constant gehaltenem Volumen, als des Kriteriums der Temperaturzahl, der Temperatur des schmelzenden Eises zur Festlegung des Anfangspunktes der Scala und endlich der Differenz der Temperaturen des schmelzenden Eises und des siedenden Wassers zur Bestimmung der Gradlänge.

Die Dalton'sche Wasserstoffdruckscala bedarf ebenso des Wasserstoffs und eines Manometers und der Temperaturdifferenz zwischen schmelzendem Eis und siedendem Wasser zur Bestimmung der Gradlänge, dagegen nicht des schmelzenden Eises zur Festlegung des Anfangspunktes der Zählung.

Die zweite, „thermodynamische" Scala von Lord Kelvin (1854) bedarf entweder der Temperatur des Schmelzpunktes des Eises oder der Differenz zwischen dieser und der des Siedepunktes des Wassers; dagegen ist sie von Wasserstoff und Manometer unabhängig.

Die erste von Lord Kelvin gegebene, vom Verf. vervollständigte „absolute" Scala bedarf überhaupt keiner Substanz, sie ist vollkommen durch thermodynamische Principien festgelegt.

Die Definition dieser absoluten Scala giebt der Verf. mit folgenden Worten:

Die Differenz der Temperaturen zweier Körper A und B, von denen A die höhere Temperatur habe, soll 1° betragen, unabhängig in welchem Teile der Scala diese Differenz liegt, wenn mit dem Uebergange der Wärmeeinheit auf den Körper B vermittelst eines umkehrbaren Kreisprocesses zwischen A und B die Umsetzung der Wärmeeinheit in Arbeit verknüpft ist. — Die Differenz der Temperaturen zweier Körper, zwischen denen ein umkehrbarer Kreisprocess stattfindet, bei welchem vom wärmeren Körper die Wärmeenergie Q_1 aufgenommen und dem kälteren die Wärmeenergie Q_2 abgegeben wird, ist gegeben durch die Gleichung

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Die von Zeuner und von Budde gegebenen Definitionen fallen nahe zusammen mit der thermodynamischen Scala von Lord Kelvin.

Sbt.

F. Auerbach. Bemerkungen über die absolute Temperatur. Wiedemann Ann. **64**, 754-758.

Der Verf. wendet sich gegen die Schreber'schen Schlussfolgerungen (s. das vorstehende Referat) und führt aus, dass die Schreber'sche (der Dalton'schen analoge) geometrische Temperaturscala den Namen einer absoluten Scala nicht mit grösserem Rechte verdiene als die Galilei'sche arithmetische Scala; wirklich absolut, d. h. unabhängig von der Natur eines Stoffes, könne keine Scala sein. Sbt.

K. Schreber. Zur absoluten Temperatur. Wiedemann Ann. **65**, 648-654.

K. Schreber. Nochmals zur absoluten Temperatur. Ibid. **66**, 1186-1190.

Der Verf. benutzt die Erwiderung auf die Bemerkungen Auerbach's (s. das vorangehende Referat) als willkommene Gelegenheit zur Zurückweisung der Einwände, die von den Anhängern der arithmetischen Scala der geometrischen gemacht werden, und hebt nochmals die Vorzüge der von ihm vorgeschlagenen „absoluten", d. h. von irgend einer Substanz unabhängigen Temperaturscala hervor. Sbt.

J. Rose-Innes. Absolute method of graduating a thermometer. Phil. Mag. (5) **45**, 227-234.

Lord Kelvin hat bekanntlich die abkühlende Wirkung untersucht, die das Hindurchpressen eines Gases durch einen Wattepfropfen mit anschliessender freiwilliger Ausdehnung zur Folge hat, und gefunden, dass diese Wirkung dem Quadrat der absoluten Temperatur umgekehrt proportional sei. Diese Formel stimmte aber nicht für alle Gase. Der Verf. stellt deshalb die neue Formel für die Abkühlung auf: $\frac{\alpha}{T} - \beta$, worin α und β Constanten bedeuten und T die absolute Temperatur. Es wird des weiteren gezeigt, dass die Annahme dieser Formel die thermodynamischen Gleichungen verhältnismässig einfach gestaltet, und angedeutet, wie auf dieser Formel eine absolute Temperaturscala aufgebaut werden könnte. Br.

J. Rose-Innes. Concerning the thermodynamic correction for an air-thermometer. Nature **58**, 77-78.

Kritisirt die Ableitung für die betreffende Formel in den üblichen Lehrbüchern als nicht einwurfsfrei. Lp.

R. A. Lehfeldt. A numerical evaluation of the absolute scale of temperature. Phil. Mag. (5) **45**, 363-379.

Anknüpfend an die Versuche Lord Kelvin's über die Abkühlung eines durch einen Wattepfropfen gepressten Gases, versucht der Verf. die Grundlagen für einen Uebergang von der willkürlichen Thermometerscala, die auf der Ausdehnung des Wasserstoffs basirt, auf die absolute, die die Temperatur in Beziehung zu geleisteter Arbeit bringt, theoretisch durchzuführen, wobei aber das Kelvin'sche Resultat, dass die Abkühlung dem Quadrat der absoluten Temperatur umgekehrt proportional zu setzen sei, vernachlässigt wird. Es ergiebt sich, dass zu einer numerisch brauchbaren Durchführung noch genügend reichhaltige Beobachtungsdaten fehlen. Br.

C. CHREE. Notes on thermometry. Phil. Mag. (5) **45,** 205-227, 299-325.

Der Verf. entwickelt die Theorie des in einer Glasröhre eingeschlossenen Quecksilberthermometers mit allen Einzelheiten, d. h. unter Berücksichtigung der regelmässigen Quecksilber- und Glasausdehnung, der Depression, der Teilungs- und Kaliberfehler, der Correctionen für inneren und äusseren Druck, der Correction für herausragenden Faden u. s. w., ohne, abgesehen von einigen neuen Ausgestaltungen der Formeln, sachlich etwas Neues zu bieten. Br.

A. STANSFIELD. On some improvements in the Roberts-Austen recording pyrometer with notes on thermo-electric pyrometry. Phil. Mag. (5) **46,** 59-82.

Die Arbeit enthält einen Vergleich des Thermoelementes Platin-Platinrhodium oder Platin-Platiniridium mit dem Luftthermometer. Der Verf. findet im Gegensatz zu anderen Forschern, dass die elektromotorische Kraft an der Erhitzungsstelle sich nicht als quadratische, sondern als lineare Function der absoluten Temperatur darstellen lässt. Br.

L. BOLTZMANN. Ueber vermeintlich irreversible Strahlungsvorgänge. Dritte Mitteilung. Berl. Ber. 1898, 182-187.

Es wird nachgewiesen, dass der von Planck in seiner dritten Mitteilung über irreversible Strahlungsvorgänge (s. F. d. M. **28,** 808, 1897) behandelte Vorgang in Wahrheit nicht irreversibel ist, da die dort aufgestellten Gleichungen mit einer vollkommenen Umkehrbarkeit des Vorganges keineswegs im Widerspruch stehen. Sbt.

M. PLANCK. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. Vierte Mitteilung. Berl. Ber. 1898, 449-476.

Im vierten Abschnitt dieser Untersuchungen (s. F. d. M. **28,** 808, 1897) wird die Intensität der nach innen und der nach aussen fortschreitenden Strahlung und die Energie des Resonators bestimmt. Dann wird in einem fünften Abschnitt die „Strahlungsintensität einer bestimmten Schwingungszahl“, also eine spectrale Zerlegung der gesamten Strahlungsintensität einer Welle eingeführt. Ferner werden in einem sechsten Abschnitt die Beziehungen zwischen der Schwingung des Resonators und den Intensitäten der nach innen und nach aussen fortschreitenden Strahlung untersucht. Dabei wird der Begriff der „natürlichen Strahlung“ eingeführt, d. i. eine Strahlung, die bestimmten Gleichungen Genüge leistet, während jede andere Strahlung als „auf den Resonator abgestimmt“ bezeichnet wird. Jeder Strahlungsvorgang, der die Eigenschaften der natürlichen Strahlung besitzt, verläuft notwendig irreversibel, indem die den Resonator passirenden Wellen hinterher stets geringere Schwankungen ihrer Strahlungsintensität aufweisen als vorher. Die Zulässigkeit der physikalischen Hypothese, dass die in der Natur vorkommenden irrever-

siblen Strahlungsprocesse, also insbesondere die Wärmestrahlung, die zum Ausgleich verschiedener Temperaturen dient, unter allen Umständen und für alle Zeiten, auch in abgeschlossenen Räumen, die Eigenschaften der natürlichen Strahlung besitzen, wird besonders begründet. — Das allgemeine Kennzeichen irreversibler Processe ist die Existenz einer durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmten Grösse, deren Wert sich im Laufe der Zeit stets in demselben Sinne ändert. Solcher Functionen existiren bei den hier behandelten Strahlungsvorgängen mehrere. Aus ihnen wird eine besondere Function von einfacher Form herausgegriffen und Entropie des Systems genannt; für sie wird der Nachweis geführt, dass ihr Wert notwendig mit der Zeit wächst.

Zum Schluss werden die von Boltzmann erhobenen Einwände (s. S. 759) als berechtigt anerkannt, und mit Rücksicht darauf wird der vom Verf. früher aufgestellte Satz durch folgenden Satz ersetzt: Wenn ein Resonator zu irgend einer Zeit durch natürliche Strahlung von veränderlicher Intensität erregt wird, so ist der Eintritt des umgekehrten Vorgangs für alle späteren Zeiten absolut ausgeschlossen, so lange die erregende Welle die Eigenschaften der natürlichen Strahlung behält.

Sbt.

W. Voigt. Thermodynamisches zu den Wechselbeziehungen zwischen Galvanismus und Wärme. Gött. Nachr. 1898, 113-136.

Der Verf. hat früher eine Behandlung der thermoelektrischen Vorgänge mit Hülfe eines Analogons zu dem thermodynamischen Potential veröffentlicht. (Gött. Nachr. 1895; F. d. M. **26,** 1036; vergl. auch W. Voigt, „Compendium der theoretischen Physik“, Bd. II, S. 323.) Am Schluss jener Darstellungen sind Andeutungen darüber gegeben, auf welche Weise mit den entwickelten Hülfsmitteln eine Theorie der v. Ettinghausen-Nernst'schen thermomagnetischen elektromotorischen Kräfte und deren Umkehrung, der galvanomagnetischen Wärmeströmung, zu gewinnen ist.

Hier werden an Stelle jener Andeutungen ausführliche Formeln gegeben, und gleichzeitig werden die Grundlagen der Theorie ausführlicher entwickelt als früher. Von besonderem Interesse ist die Vergleichung der erhaltenen Formeln mit denjenigen, zu denen Riecke in seinem Entwurf einer molecularen Theorie der ganzen Wechselwirkung zwischen elektrischer und Wärmeströmung (Gött. Nachr. 1898; s. S. 723 dieses Bandes) gelangt ist. Sbt.

O. Wiedeburg. Ueber nicht-umkehrbare Vorgänge. III. Die Stellung der Wärme zu den anderen Energieformen; Gesetze der specifischen Wärme. Wiedemann Ann. **64,** 519-548.

Die Abhandlung enthält eine nähere Ausführung der schon früher ausgesprochenen Gedanken des Verf.'s (Wiedemann Ann. **61,** 705 ff.; F. d. M. **28,** 806, 1897), wonach die Wärmeerscheinungen sich vollkommen analog den Erscheinungen anderer Gebiete behandeln lassen,

und bringt weiter eine Darstellung der Gesetze der specifischen Wärme. Die Hauptpunkte seiner Darlegungen fasst der Autor selbst zusammen, wie folgt:

In der von Black und Fourier aufgestellten „reinen" Wärmelehre hat man unter „Wärmeinhalt", bez. „Wärmemenge" eine Quantitätsgrösse im Sinne der vom Verf. gegebenen Definition zu verstehen. Soll der thatsächlich stets bestehende Zusammenhang der rein thermischen Erscheinungen mit andersartigen berücksichtigt werden, so empfiehlt sich oft die Einführung von Energiegrössen. Insbesondere sind auch die calorimetrisch beobachteten Vorgänge genügend nur durch Gleichungen zwischen Energiegrössen dargestellt. Die von Clausius eingeführte Entropie erweist sich als identisch mit dem alten Begriff des Wärmeinhalts.

Die specifische Wärme eines Körpers erscheint nach Auffassung des Verf.'s als abhängig von seinem Zustand und dessen Aenderungsweise. Für die specifische Wärme reiner fester Metalle insbesondere kann man einige nähere Gesetze in Uebereinstimmung mit der Erfahrung herleiten. Zur Ausdehnung solcher Betrachtungen auf andere Körper und andere Aggregatzustände würde die Einführung neuer Zustandsseiten, etwa einer als Constitution zu bezeichnenden, nötig sein.

Die Gleichungen des Verf.'s geben auch Anleitung, wie man eine Zerlegung thermischer Grössen und der Gesamtenergie in verschiedenartige Teile vorzunehmen hat. Sbt.

L. Marchis. Les modifications permanentes du verre et le déplacement du zéro des thermomètres. Bordeaux Mém. (5) **4,** 1-442.

L. Marchis. Étude expérimentale de quelques déformations permanentes du verre. Journ. de Phys. (3) **7,** 573-591.

Die vorliegende grosse Arbeit enthält neben den in erster Linie verfolgten experimentellen Untersuchungen so viele theoretische Betrachtungen, dass es gerechtfertigt erscheint, die vom Verf. am Schlusse zusammengestellten Folgerungen hier aufzunehmen.

1. Wir haben zum ersten Male einen besonders merkwürdigen Charakter der permanenten Modificationen experimentell ans Licht gezogen. Alle Zustandsänderungen, denen man in der chemischen Mechanik begegnet, gehen mit einer Geschwindigkeit vor sich, die eine Function des Zustandes des Systems, der äusseren auf dasselbe einwirkenden Actionen, der bei der Umwandlung herrschenden Temperatur sind. Dem ist aber nicht so bei den permanenten Modificationen der festen Körper. Wenn man mit x die Variable bezeichnet, welche die permanente Deformation charakterisirt, mit X die dieser Variable entsprechende äussere Action und mit T die Temperatur, auf welche das System gebracht wird, so können die Transformationen dieses Systems nicht als Function der Zeit durch eine Gleichung von der Form $dx/dt = f(x, X, T)$ dargestellt werden.

Diese aus dem Versuche gefolgerte Eigenschaft schliesst also alle Theorien aus, die darauf abzielen, den permanenten Deformationen der festen Körper dadurch Rechnung zu tragen, dass die Gleichungen der klassischen Thermodynamik durch Glieder ergänzt werden, die zu $(dx/dt)^2$ oder zu dx/dt proportional sind. Dieser in jüngster Zeit von einigen deutschen Physikern eingeschlagene Weg (cf. O. Wiedeburg. „Ueber nicht umkehrbare Vorgänge“ in Wiedemann Ann. **61**, 705 u. **62**, 652; F. d. M. **28**, 806, 1897) muss also verlassen werden; die einzige Methode, welche bis jetzt am besten von den Versuchsthatsachen Rechenschaft giebt, ist diejenige, die darin besteht, in die Gleichungen der Thermodynamik ein zur absoluten Variation derjenigen Variable proportionales Glied einzuführen, welche die permanente Deformation darstellt und ihre verschiedenen Stufen markirt.

2. Wir haben an zweiter Stelle gezeigt, dass es zur Rechenschaftslegung von den permanenten Deformationen des Glases nicht genügt, sie einer einzigen Variable beizulegen. Es ist also unzulänglich, wenn man zur Erklärung dieser Erscheinungen eine einfache permanente elastische Modification oder eine permanente chemische Modification herbeizieht. Es ist im Gegenteil die Annahme notwendig, dass diese beiden Modificationen neben einander bestehen, und dass ihre Wirkungen in der Mehrzahl der Fälle sich über einander lagern. Nur unter besonderen Umständen gewinnt die eine einen vorherrschenden Einfluss, und dann ist es möglich, sie für sich zu erforschen und ihre Gesetze zu entdecken. . . . Ebenso wie bei dem der Untersuchung unterworfenen Glase wird es bei den permanenten elastischen Deformationen der Metalle sein. . . . Mindestens zwei Variabeln der Nachwirkung wird man heranziehen müssen, wenn man die Beobachtungsthatsachen darstellen will.

3. Voraussichtlich werden im allgemeinen bei der Definition des repräsentativen Systems der Körper, welche permanente Deformationen darbieten, noch viel mehr Variabeln auftreten. . . . Die schematische Darstellung eines derartigen Systems wird daher verwickelt sein. Aber diese Verwickelung braucht nicht Erstaunen zu erregen, wenn man die schwer entwirrbaren Ergebnisse des Versuchs beachtet, die man mit Glas erhält, bei welchem bis jetzt nur die Betrachtung einer elastischen Variable und zweier chemischen Variabeln nötig geworden ist. Man betrachte alle Fälle, in denen wir den Auf- und Abstieg des Nullpunktes eines Thermometers studirt haben, und man wird sich leicht die ausserordentliche Verwickelung der Erscheinung vorstellen können, sowie den sicheren Misserfolg eines Experimentators, der ohne die Leitung einer beliebigen Theorie es unternehmen wollte, in die Gesamtheit der oft scheinbar sich widersprechenden Versuchsthatsachen Licht zu bringen.

4. Wie in allen Fragen der Physik, bedurfte es einer vorgefassten Idee, die als Führerin diente, die es gestattete, die schon bekannten Thatsachen zu ordnen und zu deuten, die zu neuen Thatsachen leitete. Dies war die Rolle der Theorie, deren wir uns in dieser Arbeit bedient haben; welches daher auch das Schicksal sein mag, das ihr einst in der Entwickelung der physikalischen Theorien beschieden ist, wir müssen

bekennen, dass sie uns von grossem Nutzen gewesen ist. Sie hat uns eine systematische Forschungsmethode geliefert, die Methode der Oscillationen, deren Anwendung in der Erforschung der Mehrzahl der permanenten Modificationen ungemein nützlich werden zu sollen scheint. Sie hat uns ermöglicht, die Bedingungen fest zu umschreiben, unter denen eine Glasmasse gekühlt oder ausgeglüht werden kann. . . . Kurz, diese Theorie hat uns zur Formulirung einiger auf die Präcisionsthermometer bezüglichen Regeln geführt. Um alles zusammenzufassen, sämtliche Thatsachen, die bei der Untersuchung der Verrückung des Nullpunktes der Thermometer auftreten, sind auf eine möglichst systematische Weise angeordnet worden. Diese Anordnung wird bleiben, wenn die Theorie, die uns als Führerin gedient hat, aufgegeben werden sollte, und wird für jeden Theoretiker höchst nützlich sein, der die aus einem theoretischen Studium der permanenten Deformationen abgeleiteten Sätze mit dem Versuch vergleichen will. Das muss die Rolle sein, die der Experimentator immer sich zuweisen soll; wir glauben sie in dieser Arbeit zum Teil ausgefüllt zu haben. Lp.

P. Duhem. Sur les aciers au nickel irréversibles. Bordeaux Mém. (5) **4,** 443-464.

In einem Nachtrage zu der im vorangehenden Referate besprochenen Arbeit zeigt Marchis, dass die von ihm bei der Untersuchung von Glas gewählte Methode völlig ausreicht, um von den Erscheinungen Rechenschaft zu geben, die Ch. Ed. Guillaume an Nickelstahl beobachtet und in mehreren Veröffentlichungen beschrieben hat. Gleich hinter der Marchis'schen Abhandlung beweist Duhem, dass alle diese Erscheinungen sich mit Hülfe derjenigen Theorie erklären lassen, die er in der Schrift entwickelt hat: „Sur les déformations permanentes et l'hystérésis, 4ᵉ Mém. (Referat unten S. 768). Lp.

A. Ponsot. Sur le potentiel thermodynamique. C. R. **126,** 226-228.

Wenn zwei Gefässe A und B in wässeriger Lösung einen und denselben Körper enthalten, so kann man annehmen, dass dieser Körper durch durchlässige Wände und ein Zwischenmittel, in dem er bei einem specifischen Volumen v den osmotischen Druck π erfährt, von einem Gefässe zum anderen übergehen wird. Das thermodynamische Potential ist dann für die Masseneinheit des mit einer elastischen Kraft F von A ausgehenden Körpers gegeben durch den Ausdruck $[Fv-(TS-U)]_0^F$. Je nachdem F für den Uebergang von A nach B und von B nach A gleiche oder verschiedene Werte hat, besteht osmotisches Gleichgewicht oder nicht.

Wenn für ein System und andere damit verbundene Systeme bezüglich der Componenten osmotisches Gleichgewicht herrscht, so ist das thermodynamische Potential $\Sigma(m+m_1)[Fv-(TS-U)]$, wo m und m_1 die Massen eines Körpers in dem Hauptsystem und in dem damit zusammenhängenden System bedeuten. Sbt.

A. Ponsot. Transformations isothermiques irréversibles d'un mélange. Développement de la relation conditionnelle de l'équilibre. C. R. **127**, 49-52.

Anknüpfend an die vorher erwähnte Arbeit, zeigt der Verf., dass für nicht-umkehrbare isothermische Processe in einem Gemisch bei constantem Druck die nicht-compensirte Arbeit gleich ist der Verminderung des thermodynamischen Potentials $\Sigma m\varphi$ oder $\Sigma m\int_0^F V dF$.

Es wird dann die Gleichgewichtsbedingung aufgestellt für Körper, die in dem Gemisch chemische Verbindungen mit einander eingehen, und es werden einige Folgerungen daraus gezogen. Sbt.

C. W. Waidner and F. Mallory. A recalculation of Rowland's values of the mechanical equivalent of heat. Johns Hopkins Univ. Circ. **17**, 55-56.

Durch Untersuchung der Ursachen für die Abweichungen der nach mechanischen und nach elektrischen Methoden bestimmten Werte des Wärmeäquivalents kommen die Verf. zu dem Schluss, dass die Erklärung der vorhandenen Differenzen möglicher Weise in einem noch unentdeckten Irrtum in dem Systeme der benutzten elektrischen Einheiten zu suchen sei. Sbt.

F. A. Wolff. A recalculation of Griffiths' mechanical equivalent of heat, based on Kahle's determination of the absolute electromotive force of a Clark cell and of the electrochemical equivalent of silver. Johns Hopkins Univ. Circ. **17**, 54-55.

Wenn man die von Kahle an der physikalisch-technischen Reichsanstalt neuerdings bestimmten Werte (s. Wiedemann Ann. **59**, 532) für die Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents nach der elektrischen Methode von Griffiths und von Schuster und Gannon zu Grunde legt, so ergeben sich die Werte: nach Griffiths $4185{,}6.10^4$ (statt $4193{,}2.10^4$), nach Schuster und Gannon $4185{,}9.10^4$ (statt 4191) mgs; nach Rowland wird der berichtigte Wert 4183.10^4 mgs. Sbt.

G. Tammann. Ueber die Grenzen des festen Zustandes. II. Wiedemann Ann. **66**, 473-498.

Die früheren Untersuchungen fortsetzend (F. d. M. **28**, 814, 1897), berichtet der Verf. zunächst über frühere Messungen, die den Einfluss des Druckes auf den Schmelzpunkt betrafen, beschreibt dann den Apparat und die Methode, die er zu seinen Messungen angewandt hat, und teilt die Resultate der Untersuchung von verschiedenen Stoffen mit.

Er zeigt dann durch theoretische Untersuchung der Schmelzdruckcurve, dass ein kritischer Punkt für die Verwandlung aus dem flüssigen in den krystallisirten Zustand nicht existiren kann, dass (entgegen den Anschauungen von Poynting, Planck und Ostwald) ein continuirlicher

Uebergang aus dem flüssigen in den krystallisirten Zustand nicht möglich ist, und macht kritische Bemerkungen zu der Deutung, die Heydweiller einem von ihm beobachteten Phänomen (der Krystallisation von unterkühltem geschmolzenem Menthol) gegeben hat. [Diese Bemerkungen haben indessen den Widerspruch Heydweiller's hervorgerufen (Wiedemann Ann. **66**, 1194-1195).] Endlich macht er darauf aufmerksam, wie sich rein empirisch die Stabilität eines Systems, speciell einer unterkühlten Flüssigkeit, bestimmen lässt. Sbt.

A. Dahms. Trennungswärme in Lösungen, Gefrierpunktserniedrigung, Löslichkeit. Wiedemann Ann. **64**, 507-518.

Wenn die für verdünnte Lösungen geltenden Formeln

$$\left(\frac{\partial \log c_0}{\partial \vartheta}\right)_p = -\frac{r}{R \cdot \vartheta^2} \quad \text{und} \quad \vartheta - \vartheta_0 = \frac{R}{r} \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \vartheta^2$$

auch auf stärker concentrirte Lösungen angewandt werden sollen, so bedarf es der Kenntnis der Grösse r, der Wärmetönung, unter der ein Molecül des Lösungsmittels in eine hinreichend grosse Menge der Lösung übertritt. Diese Grösse lässt sich streng bestimmen für den Fall des vollständig heterogenen Gleichgewichts, wo die Zahl der Phasen um 1 grösser ist als die Zahl der unabhängigen Bestandteile, wie z. B. für das Gleichgewicht zwischen der Lösung eines nicht flüchtigen Salzes, dem Salze selbst und dem Dampfe der Lösung. Bestimmt man für das vollständig heterogene Gleichgewicht die Zusammensetzung der Lösung $\left(C_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2},\ C_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)$, untersucht man, wie in der Nähe des dreifachen Punktes die Gleichgewichtstemperaturen ϑ mit der Concentration sich ändern, so erhält man das Verhältnis der Wärmetönungen $\frac{r_2}{r_1}$, unter denen der Uebertritt der einzelnen Bestandteile in die Lösung vor sich geht, nach der Gleichung: $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial C_2}\right)_p : \left(\frac{\partial \vartheta'}{\partial C_2}\right)_p = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{M_2}{M_1}$. Die (auf die Masseneinheit des Stoffes bezogene) Wärmetönung r_{12}, die beim gleichzeitigen Uebertritt der beiden Bestandteile in die Lösung vorkommt, kann direct gemessen werden. und dann ist

$$r_{12} = r_1 + \frac{M_2}{M_1} \cdot r_2.$$

Aus beiden Gleichungen können r_1 und r_2 berechnet werden. Die Formeln werden auf verschiedene Beispiele angewandt.

Wenn die Gefrierwärme des Lösungsmittels sich nicht merklich mit der Concentration ändert, so wird in der Gleichung $\left(\frac{\partial \log c_0}{\partial \vartheta}\right)_p = -\frac{r}{R\vartheta^2}$ r eine Constante r_0, und man erhält, wenn ϑ_0 den Gefrierpunkt des

reinen Lösungsmittels bedeutet: $\log c_0 = \frac{r_0}{R} \cdot \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_0}\right)$. An mehreren Beispielen wird gezeigt, dass diese Formel in vielen Fällen die Gefrierpunktserniedrigung eines Stoffes durch einen anderen oder seine Löslichkeit in diesem für ein grösseres Concentrationsgebiet befriedigend darstellt. Setzt man r nicht constant, sondern $r = r_0 + a(\vartheta_0 - \vartheta)$, so erhält man:

$$\log c_0 = \frac{r_0 + \frac{a}{2}(\vartheta_0 - \vartheta)}{R} \cdot \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_0}\right).$$

Die Formel $\left(\frac{\partial \log c_0}{\partial \vartheta}\right)_p = -\frac{1}{R\vartheta^2}$ selbst wird, wie der Verf. näher ausführt, in vielen Fällen versagen müssen. Sbt.

C. DEL LUNGO. Della densità dei liquidi e dei vapori saturi come funzione della temperatura. Rom. Acc. L. Rend. (5) **7**$_1$, 353-358.

Wenn nach Guglielmo („Sulla velocità molecolare dei liquidi." Rom. Acc. L. Rend. (5) **6**$_2$; F. d. M. **28**, 713, 1897) die Geschwindigkeit der Molecüle einer Flüssigkeit gleich ist derjenigen der Molecüle ihres Dampfes, so ist weiter die Hypothese zulässig und sehr wahrscheinlich, dass die Geschwindigkeiten der Molecüle in der Flüssigkeit wie in dem Dampfe nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilt sind.

Auf Grund dieser Hypothese lässt sich theoretisch eine Beziehung zwischen der Dichtigkeit einer Flüssigkeit, derjenigen ihres gesättigten Dampfes und der Temperatur ableiten. Der Verf. findet:

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot z \cdot e^{-z^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

D ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit, d diejenige des gesättigten Dampfes, t ist gleich $\frac{u}{a}$, wo u die Moleculargeschwindigkeit und a eine der Wurzel aus der absoluten Temperatur T proportionale Grösse ist; z bedeutet eine unbestimmte Function von T, die gleich 0 wird, wenn T den Wert der kritischen Temperatur annimmt, und unendlich wird für $T = 0$. Innerhalb gewisser Grenzen kann der Wert von z dargestellt werden durch den Ausdruck $z = \frac{k}{T^m}$, wo k und m constant sind, und dann erhält man

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k}{T^m} \cdot e^{-\frac{k^2}{T^{2m}}}.$$

Bezeichnen s und σ die specifischen Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit $\left(s = \frac{1}{d},\ \sigma = \frac{1}{D}\right)$, so folgt hieraus:

$$\log s - \log \sigma = \log\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right) + m \log T + \frac{k^2}{T^{2m}}.$$

Da σ innerhalb der angenommenen Temperaturgrenzen als constant betrachtet werden kann, so ergiebt sich, wenn K, a, b, n bestimmte Constanten bedeuten:

$$\log s = K + \frac{a}{T^n} + b \log T.$$

Eine Gleichung von dieser Form und mit dem besonderen Werte $n = 1$ lässt sich aus der Gleichung von Clapeyron und Clausius $r = \frac{T}{E}\cdot(s-\sigma)\frac{dp}{dT}$ ableiten, wenn das Temperaturgebiet so beschränkt wird, dass das Boyle-Gay-Lussac'sche Gesetz als gültig angesehen, dass σ neben s vernachlässigt und für die Verdampfungswärme der Wert $r = \alpha - \beta T$ gesetzt werden kann. Sbt.

E. Mathias. Sur les propriétés thermiques des fluides saturés. C. R. **126**, 1095-1097; Journ. de Phys. (3) **7**, 397-408.

Calorimetrische Untersuchungen der schwefligen Säure bestätigen die theoretischen Schlussfolgerungen, dass adiabatische Ausdehnung eines gesättigten Dampfes immer eine Erniedrigung der Temperatur herbeiführt.

Sie bestätigen ferner die Raveau'sche Hypothese, dass für gesättigte Flüssigkeiten die specifische Wärme bei constantem Volumen bis zur kritischen Temperatur endlich bleibt. Sbt.

J. A. Groshans. Ueber die latente Verdampfungswärme (L oder) *ldw*. Wiedemann Ann. **64**, 778-788.

Durch Vergleich einer vom Verf. abgeleiteten und einer von Trouton herrührenden Formel ergiebt sich: Eine Calorie, die zur Verdampfung irgend eines chemischen Körpers verbraucht wird, entwickelt dabei stets die gleiche Anzahl Kubikcentimeter Dampf, bei 76 cm und bei der Siedetemperatur gemessen; die Anzahl Kubikcentimeter ist 3,8687. Mittels dieser Zahl lässt sich die latente Dampfwärme aller Körper leicht finden, und sie giebt Aufschluss über den Zusammenhang der beiden Constanten in der Trouton'schen Formel. Sbt.

J. A. Groshans. Ueber die Expansion, auch mit Bezug auf die latente Dampfwärme. Wiedemann Ann. **64**, 789-793.

Das Resultat der Division von Dampfvolumen und flüssigem Volumen beim Siedepunkt ist immer dasselbe: $\text{Exp.} = \frac{568,4}{\sqrt{xsd}}$; xsd ist eine für die betreffende Substanz constante Grösse 1, 2, 3 etc. Sbt.

W. Sutherland. Latent heat of evaporation of zinc and cadmium. Phil. Mag. (5) **46**, 345-346.

Auf Grund älterer Beobachtungszahlen von Barus berechnet der Verf. die Verdampfungswärmen von Zink und Cadmium. Br.

J. Rose-Innes. On the isothermals of ether. Phil. Mag. (5) **45**, 102-106.

Der Verf. findet, dass die von ihm früher für Isopentan abgeleitete Modification des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes auch für Aether gilt. Die Formel, die in der ersten Abhandlung (Phil. Mag. (5) **44**, 76 ff.) nicht ganz correct wiedergegeben war, wird zugleich berichtigt in:

$$p=\frac{R\cdot T}{v}\left\{1+\frac{e}{v+k-gv^{-2}}\right\}-\frac{l}{v(v+k)}.$$

Hierin bedeuten R, e, k, g, l Constanten, die für jedes Gas charakteristisch sind; p, T, v haben die gewöhnliche Bedeutung. Br.

G. Bakker. Théorie des liquides à molécules simples (2e mémoire). Journ. de Phys. (3) **7**, 511-515.

Ueber die erste Abhandlung ist in F. d. M. **28**, 713, 1897 berichtet worden. Aus den dort aufgestellten Formeln werden jetzt mit Hülfe neuer Betrachtungen weitere Relationen abgeleitet, von denen wir die Sätze wiedergeben: Das Virial der Molecularkräfte ist gleich dem mit $\frac{3}{2}$ multiplicirten Producte des Moleculardruckes und des Volumens ($A=\frac{3}{2}Kv$). Das Virial der Molecularkräfte ist gleich der mit $-\frac{3}{2}$ multiplicirten potentiellen Energie ($A=-\frac{3}{2}W$). Die Kräftefunction $f(r)$ der Molecularkräfte wird in der Form f/r^4 bestimmt, wo f eine absolute Constante ist. Lp.

P. Duhem. Sur les déformations permanentes et l'hystérésis. Étude de divers systèmes dépendant d'une seule variable (quatrième mémoire). Étude de divers systèmes dépendant de deux variables (cinquième mémoire). Belg. Mém. c. et sav. étr. **56**, 199 S.

Abhandlung IV. Der Verf. beabsichtigt, einige Punkte derjenigen Untersuchungen weiter zu führen, denen die erste und zweite Abhandlung gewidmet waren (vergl. F. d. M. **27**, 762, 1896). In dem ersten Kapitel vertieft er gewisse Eigenschaften der geschlossenen Kreiswege. Der geschlossene Kreisprocess, welcher zwei Grenzwerten der äusseren Einwirkung (oder der Temperatur) entspricht, kann stabil oder instabil sein, wenn man zwischen diesen Grenzen für die äussere Einwirkung (oder die Temperatur) cyklische Aenderungen vornimmt; die cyklischen Aenderungen der normalen Variable führen immer zu einem stabilen Kreise; diese Sätze verallgemeinern die Eigenschaften der natürlichen Zustände.

Verf. wendet dieses auf die Erforschung des Einflusses an, den die Hysteresis auf die Schwingungen eines tordirten Drahtes ausübt.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit einem gespannten elastischen Drahte unter der Annahme, dass die natürlichen Zustände dieses Drahtes zum Teil stabil, zum Teil instabil sind. Die im Vorangehenden gegebenen Theoreme liefern eine Theorie der Erscheinungen, die ein derartiger Draht zeigen kann, besonders der Bildung der Einschnürung, die dem Reissen vorangeht. Eine analoge Theorie erklärt die Wirkungen des Hämmerns auf einen Körper.

Das dritte Kapitel zielt darauf ab, in ähnlicher Art den Einfluss der Temperatur auf einen chemisch veränderlichen Körper, der mit Hysteresis behaftet ist, zu behandeln; hierbei wird von den Haupteigenschaften der Eisen- und Stahlsorten Rechenschaft gegeben: Anlassen, Ausglühen, Verbrennen, Recalescenz, Härten. Der Begriff „Gebiet der säcularen Variationen der Härte", der in diesem Kapitel eingeführt ist, hat es dem Verf. an einem anderen Orte ermöglicht (Bordeaux Mém. (5) **1**, 286, 1896), die irreversiblen Eigenschaften der genickelten Stahlsorten zu erklären (vergl. oben S. 763).

Im vierten Kapitel gestattet die Vertauschung der Temperatur mit einer äusseren mechanischen Einwirkung in der vorangehenden Theorie, die Erscheinungen des Kalthämmerns zu behandeln.

Abhandlung V. Nachdem der Verf. in der Abhandlung III die Theorie eines durch n mit Hysteresis behaftete Variabeln definirten Systems aufgestellt hat, beabsichtigt er jetzt, eine ausgedehnte Anwendung derselben auf den Fall zu machen, wo $n=2$ ist.

Im ersten Kapitel beweist er gewisse Sätze, die auf derartige Systeme streng Anwendung finden.

Im zweiten Kapitel wird von diesen Sätzen Gebrauch gemacht zur Erforschung eines Drahtes, der gleichzeitig gestreckt und einer Magnetisirung in der Richtung der Axe unterworfen wird; dadurch erhält man Rechenschaft von Erscheinungen, die von Villari, W. Thomson, Ewing und anderen Beobachtern studirt sind.

Das dritte Kapitel ist der Aufstellung verschiedener angenäherter Sätze gewidmet. Zuerst wird ein System betrachtet, das durch zwei Variabeln definirt ist, deren eine mit einem sehr kleinen Coefficienten der Hysteresis behaftet ist. Ein solches System kommt in erster Annäherung auf ein fictives System zurück, in welchem eine einzige Variable mit Hysteresis behaftet ist; die zweite Annäherung legt den Linien, welche dieses fictive System kennzeichnen, eine langsame Deformation auf. Sodann wird ein System behandelt, das durch zwei Variabeln definirt ist, deren Hysteresis-Coefficienten sehr klein sind. Die Erforschung eines solchen Systems kommt auf die Untersuchung zweier Systeme zurück, deren jedes von einer einzigen mit Hysteresis behafteten Variable abhängt.

Diese verschiedenen angenäherten Sätze werden im vierten Kapitel benutzt, um von den bleibenden Modificationen des Glases Rechenschaft zu geben und insbesondere von den durch die Untersuchungen von L. Marchis begründeten Gesetzen (vergl. oben S. 761). Mn. (Lp.)

P. Duhem. Sur les déformations permanentes du verre (Étude théorique). Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 45-50 (1897).

Der Verf. macht hier eine Anwendung derjenigen Betrachtungen, welche er in seinen drei ersten Abhandlungen „Sur les déformations permanentes et l'hystérésis“ (vergl. F. d. M. **27**, 762, 1896) angestellt hat, um die Einwirkung zu beleuchten, welche die kleinen Temperatur-Schwankungen auf die scheinbar von selbst eintretenden Verrückungen des Nullpunktes des Thermometers ausüben. Lp.

P. Duhem. Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques. Bordeaux Mém. (5) **2**, 1-208 (1896).

P. Duhem. Sur les faux équilibres chimiques. Bordeaux Procès-verbaux 1896/97, 75-84 (1897).

P. Duhem. Théorèmes sur la distillation. Ibid. 112-115 (1897).

P. Duhem. Sur le problème de la statique chimique. Ibid. 118-124. (1897).

P. Duhem. Sur la formation des hydrates et les points quadruples. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 2-8.

Die Verwaltung der Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux hat ihre Schriften während der letzten Jahre zurückbehalten und dann alle auf einmal geschickt; dadurch sind manche der vorliegenden Arbeiten durch anderweitige Publicationen des Verf. überholt. Besonders sind viele Ergebnisse in das Werk des Verf. über chemische Mechanik übergegangen, dessen ersten uns zugesandten Band wir in F. d. M. **28**, 819, 1897 angezeigt haben. Wir verzichten daher auf ein ausführliches Referat über die erste, ausführliche Arbeit und über die kleineren Artikel, die zum Teil Auszüge, zum Teil Ergänzungen jener Hauptarbeit sind. Doch soll hier aus der Einleitung derselben diejenige Stelle mitgeteilt werden, in welcher der Verf. die Einführung des Ausdrucks „faux équilibre“ rechtfertigt. „Wenn die Sätze der klassischen Thermodynamik es voraussehen lassen, dass ein System unter gewissen Bedingungen im Gleichgewichte sein wird, so bleibt es wirklich im Gleichgewichte, wenn man es in diese Bedingungen versetzt; allein es kann auch geschehen, dass es thatsächlich im Gleichgewichte bleibt unter Bedingungen, in denen es nach der klassischen Thermodynamik gewisse Umwandlungen erfahren müsste. Diese allgemeine Regel lässt sich auch noch wie folgt aussprechen: Jedes Mal, wenn die klassische Thermodynamik uns für einen Körper die Unmöglichkeit ankündigt, eine gewisse Modification einzugehen, kann die fragliche Modification in der That nicht experimentell verwirklicht werden; allein wenn die klassische Thermodynamik ankündigt, dass ein Körper notwendig von einem Zustande in einen anderen übergeht, ereignet es sich oft, dass die angekündigte Modification sich nicht verwirklicht. Diese Regel ist mit einer bemerkenswerten Klarheit von J. Moutier ausgesprochen worden. Wir haben den

Vorschlag gemacht (Introduction à la mécanique chimique, Gand 1893, Chap. XII), den Namen falsches Gleichgewicht den Gleichgewichtszuständen zu geben, die experimentell zu verwirklichen sind, obgleich die klassische thermodynamische Theorie sie für unmöglich erklärt; im Gegensatz dazu haben wir wahres Gleichgewicht die von dieser Theorie vorausgesehenen Fälle genannt; der Versuch verwirklicht immer diese letzteren Gleichgewichtszustände. Wir nehmen uns im Folgenden vor, die thermodynamischen Theorien derartig zu entwickeln und zu vervollständigen, dass sie durch eine und dieselbe Analysis von den Zuständen des falschen und des wahren Gleichgewichts Rechenschaft geben."

Eingehendere Referate über diese Arbeiten findet man in den bezüglichen Bänden der Fortschritte der Physik. Lp.

P. Duhem. L'intégrale des forces vives en thermodynamique. Journ. de Math. (5) **4,** 5-19.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung der Abhandlungen „Commentaire aux principes de la thermodynamique", 1892 (F. d. M. **24,** 1096), und „Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques", 1896 (s. das vorangehende Referat). Es wird ein System untersucht, dessen verschiedene Teile verschiedene Temperaturen haben, und der Einfachheit halber wird angenommen, dass nur zwei solche Teile vorhanden sind, die durch die absolute Temperatur T_1 und durch die normalen Veränderlichen $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \lambda_1$, resp. $T_2, \alpha_2, \cdots, \lambda_2$ bestimmt sind. Bezeichnen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ die inneren thermodynamischen Potentiale der beiden Teile, so ist es für die Existenz eines Integrals der lebendigen Kräfte notwendig und hinreichend, dass der Ausdruck $\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2} dT_2$ — entweder von selbst oder vermöge ergänzender Beziehungen — das totale Differential einer Function von $T_1, T_2, \alpha_1, \cdots, \lambda_1, \alpha_2, \cdots, \lambda_2$ ist.

Diese Bedingung ist zunächst erfüllt bei Systemen, die der Verf. „klassische Systeme" nennt, und die den Gleichungen genügen:

$$\mathfrak{F}_1(\alpha_1, \cdots, \lambda_1, T_1) = \mathfrak{G}_1(T_1) + E \cdot \psi_1(\alpha_1, \cdots, \lambda_1),$$
$$\mathfrak{F}_2(\alpha_2, \cdots, \lambda_2, T_2) = \mathfrak{G}_2(T_2) + E \cdot \psi_2(\alpha_2, \cdots, \lambda_2).$$

Von welcher Form auch die ergänzenden Beziehungen sein mögen, für ein System, das äusseren, durch die Derivirten eines Potentials bestimmten Wirkungen unterworfen ist, existirt ein Integral der lebendigen Kräfte, wenn jene Bedingungen erfüllt sind. Ein Beispiel erläutert näher, was der Verf. unter klassischen Systemen versteht. Durch das Studium dieser Systeme werden die Beziehungen aufgedeckt, die die alte Mechanik mit der neueren Thermodynamik verknüpfen (vergl. oben S. 756).

Danach folgt eine kurze Betrachtung von solchen Systemen, denen vermöge ergänzender Beziehungen ein Integral der lebendigen Kräfte zukommt. Sbt.

J. P. Kuenen. Sur la condensation d'un mélange de deux gaz. Arch. Néerl. (2) **1,** 331-353.

„In einer vor kurzem veröffentlichten Abhandlung von Duhem (Travaux et Mém. des Facultés de Lille **3,** 1894) über die Mischungen zweier Substanzen wird im III. Kapitel das Problem der Condensation eines Gemenges zweier Gase erörtert. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden an den Figuren 16 und 17 der Abhandlung dargestellt. Ich beabsichtige, mich der Theorie von van der Waals zu bedienen, um die von Duhem gegebene Darstellung der Erscheinungen zu vervollständigen und einige von diesem Autor begangene Irrtümer zu berichtigen. Ausserdem werde ich einige experimentelle Daten mitteilen, die sich zur Bestätigung der theoretischen Ergebnisse eignen." Lp.

J. P. Kuenen. Sur la condensation et les phénomènes critiques des mélanges d'éthane et de protoxyde d'azote. Arch. Néerl. (2) **1,** 22-43.

Diese experimentelle Arbeit hat deswegen theoretisches Interesse, weil sie die Bestätigung einiger Erscheinungen bezweckt, welche aus der Theorie von van der Waals folgen, und zu diesem Behufe in einer ausführlichen Einleitung die bezüglichen Schlussfolgerungen zusammenstellt. Lp.

A. Ponsot. Étude des équilibres physiques et chimiques par la méthode osmotique. C. R. **126,** 335-338.

Nach der von van't Hoff gegebenen osmotischen Methode, die der Verf. etwas verallgemeinert, wird ein Gemisch von Körpern untersucht, das in einem Gefäss mit durchweg gleicher Temperatur enthalten ist und ein im Gleichgewicht befindliches homogenes oder heterogenes System darstellt. Es kommt darauf an: 1. die Körper zu finden, die wirklich in dem Gemisch existiren, 2. das System Aenderungen des Druckes, der Temperatur und der Zusammensetzung zu unterwerfen und Beziehungen zu finden, die diesen Aenderungen entsprechen, 3. die Gleichgewichtsbedingungen des Systems aufzustellen. Sbt.

A. H. Bucherer. Ueber osmotischen Druck. Wiedemann Ann. **64,** 549-554.

Enthält eine Lösung n Molecüle Zucker in N Molecülen Wasser, und beträgt der Dampfdruck des Wassers über der Lösung p, der des reinen Wassers bei derselben Temperatur T aber π, so gilt für die Dampfdruckerniedrigung, wie der Verf. zeigt, die Gleichung: $\frac{n}{N} = \log_e \frac{\pi}{p}$. Diese Gleichung soll statt der empirischen Regel von Raoult $\frac{\pi - p}{\pi} = \frac{n}{N}$ gelten, mit der sie sich praktisch für verdünnte Lösungen annähernd deckt.

Durch Multiplication mit $R \cdot T$ entsteht die Gleichung:

$$n \cdot R \cdot T = N \cdot R \cdot T \cdot \log_e \frac{\pi}{p},$$

d. h.: Sind in einer Lösung n Molecüle der gelösten Substanz und N Molecüle des Lösungsmittels vorhanden, so ist die bei der Verdampfung von n Molecülen der gelösten Substanz geleistete äussere Arbeit gleich der Arbeit, die geleistet wird, wenn sämtliche Molecüle des Lösungsmittels, die dampfförmig beim Sättigungsdrucke π vorhanden sind, sich bis auf den Dampfdruck p der Lösung ausdehnen. Sbt.

J. D. van der Waals. Sur le mélange des gaz. Extrait d'une lettre de M. van der Waals à M. H. Becquerel. C. R. **126,** 1856-1857.

D. Berthelot. Sur le mélange des gaz. Ebenda 1857-1858.

A. Leduc. Sur le mélange des gaz. Ebenda 1859.

Van der Waals macht kritische Bemerkungen zu der Formel

$$\left(p + \frac{A}{v^2}\right)(v - B) = R_1 \cdot T,$$

die Berthelot in seiner früheren Notiz „Sur le mélange des gaz" (C. R., 13. Juni) für die Compression eines Gasgemisches aufgestellt hat; er beanstandet die Form, die dort der Grösse A gegeben ist.

Berthelot giebt die Richtigkeit dieses Einwandes im allgemeinen zu, bemerkt aber, dass unter beschränkenden Voraussetzungen — wie es gemeint gewesen wäre — die von ihm gebrauchte Form zutreffend wäre, was die Erfahrungen bestätigten.

Leduc findet die Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der Berthelot'schen Rechnung und seinen Versuchsergebnissen fast zu vollkommen und macht auf einen bei der Rechnung vielleicht nicht genügend berücksichtigten Punkt aufmerksam. Sbt.

J. D. van der Waals. De l'équilibre d'un corps solide complexe en présence de gaz et de liquide. Arch. Néerl. (2) **1,** 78-88.

Bringt man einen einfachen Körper in einen leeren Raum und erhöht die Temperatur, bis der Körper schmilzt, so befinden sich in demselben Raume, wofern auch Dampf vorhanden ist, drei Phasen bei derselben Temperatur und unter demselben Drucke. Die bestimmte Temperatur, bei welcher die drei Zustände neben einander bestehen, heisst der Tripelpunkt. In der vorliegenden Arbeit wird gefragt, ob es in dem Falle eines zusammengesetzten Körpers ebenfalls einen solchen Tripelpunkt giebt. Die theoretischen Ueberlegungen führen zu folgendem Resultate. Es giebt eine höchste Temperatur τ_1 für die Coexistenz des festen Körpers mit dem Dampfe allein, die Maximaltemperatur der Sublimation. Dieser Temperatur folgt eine Reihe anderer, bei denen der feste Körper mit Flüssigkeit und Dampf zugleich besteht. Die höchste dieser Temperaturen

ist diejenige, bei der die Flüssigkeit dieselbe Zusammensetzung hat wie der feste Körper. Diese Temperaturfolge ersetzt also bei einem zusammengesetzten Körper den Tripelpunkt einer einfachen Substanz. Die höchste Temperatur ist als eine eigentliche Schmelztemperatur zu betrachten; sie kann die Minimaltemperatur τ_2 des Schmelzens heissen. Bei höheren Temperaturen giebt es keinen Dampf mehr, und die Coexistenz des flüssigen und des festen Zustandes muss durch einen höheren äusseren Druck aufrecht erhalten werden. Die höchste Temperatur x_t, bei welcher die drei Zustände neben einander bestehen können, ist nicht erreichbar. Wenn jedoch der feste Körper ein grösseres Volumen hat als der flüssige, so treten Modificationen der vorstehenden Sätze ein. Lp.

F. A. H. Schreinemakers. De l'équilibre dans les systèmes de trois constituants, avec deux phases liquides possibles. I. Partie théorique. Arch. Néerl. (2) **1**, 411-454.

Die vorliegende rein theoretische Arbeit bildet einen Teil aus einer Folge von Veröffentlichungen, die Verf. auch in der Zeitschrift für physikalische Chemie hat erscheinen lassen. Ueber den Zweck der Untersuchung lässt sich die Einleitung so aus: „Was die Isothermen und Gleichgewichte dreier Körper betrifft, so wissen wir davon noch recht wenig. Es bleibt noch ein ausgedehntes und völlig unbekanntes Gebiet zu erforschen, dasjenige der Gleichgewichte, in denen neben einander zwei oder mehr flüssige Phasen gleichzeitig mit Phasen anderer Art bestehen. Wir verfügen bis jetzt nur über einige vereinzelte Experimentaluntersuchungen, die unmöglich von den zu erwartenden Erscheinungen eine Vorstellung geben können. Deshalb stellt sich diese erste Abhandlung die Aufgabe, einen zusammenfassenden Ueberblick über die Isothermen und Gleichgewichte bei den zwei flüssige Phasen enthaltenden Systemen zu geben." Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: B. Gleichgewicht zwischen zwei flüssigen Phasen. C. Gleichgewicht mit einer festen Phase. D. Einige Bemerkungen über die Bitangentialebene, die durch einen Punkt geht. E. Der Tangentialkegel. F. Wenig stabile und instabile Teile der Isotherme. G. Einige besondere Fälle.

Lp.

H. Pélabon. Sur la dissociation de l'acide sélénhydrique. Bordeaux Mém. (5) **3**, 141-255.

Die Arbeit beruht auf den theoretischen Vorstellungen, welche Duhem in seinem „Traité élémentaire de mécanique chimique" entwickelt hat (vergl. F. d. M. **28**, 819, 1897). In dem Schlussworte lässt sich Verf. über sein Verfahren so aus: „Um zusammenzufassen, so haben wir versucht, die vollständige Erforschung eines einzelnen Falles der Dissociation auszuführen und zu zeigen, wie wichtig bei einer solchen an der Hand der Principien der Thermodynamik entstandenen Monographie die Unterscheidung der falschen und der wahren Gleichgewichte ist. Aus

unseren Untersuchungen geht nämlich hervor, dass man im allgemeinen eine Reaction nicht als durch die inverse Reaction begrenzt ansehen darf; eine Reaction und die inverse Reaction hören bei verschiedenen Grenzen auf, und zwischen diesen Grenzen befindet sich eine mehr oder weniger breite Zone indifferenter oder falscher Gleichgewichte. Dieses bei den tiefen Temperaturen klar erkennbare Gesetz wird bei den hohen Temperaturen im Gegenteil unkenntlich; die Zone der falschen Gleichgewichte wird zu eng, um dem Versuche die Auffindung zu gestatten, und jede der beiden zu einander inversen Reactionen scheint durch die andere begrenzt. Wenn das Studium der Bildung und der Dissociation der Selenwasserstoffsäure uns ein zur Beleuchtung dieser Ideen besonders geeignetes Beispiel liefert, so werden andere Untersuchungen, die zum Teil schon veröffentlicht sind, zum Teil der baldigen Veröffentlichung entgegensehen, die Behauptung rechtfertigen, dass dieses Beispiel durchaus nicht einzig in seiner Art ist." Lp.

A. WITZ. Moteurs à combustion et haute compression. C. R. **126**, 957-959.

Die Erfindung des Diesel'schen Motors lenkt die Aufmerksamkeit neuerdings wieder auf die Vorteile hin, die eine allmähliche Verbrennung gewährt, und erinnert wieder an die genialen Erfindungen eines Siemens etc., die durch die Explosions-Gasmotoren fast in Vergessenheit geraten waren. Der Verf. will zeigen, dass die älteren Maschinen gleiche Erfolge aufweisen wie der Diesel'sche Motor, wenn nur die anfängliche Compression des Gasgemisches eine recht beträchtliche ist. Durch Verfolgung des Kreisprocesses berechnet er den Wirkungsgrad $\varrho = 1 - \frac{t}{\Theta}$, wo t und Θ die Temperaturen des Gasgemisches vor und nach der Compression sind. Hieraus ergiebt sich z. B. für eine Compression bis 250 Atmosphären $\varrho = 0{,}719$, und schon für 35 Atmosphären (was Diesel erreicht hat) $\varrho = 0{,}557$, was im Vergleich zu den Dampfmaschinen einen glänzenden Erfolg bedeutet. Sbt.

Weitere Litteratur.

E. ARIÈS. Thermodynamique des systèmes homogènes. Paris: Gauthier Villars. 175 S. 16mo.

M. BRILLOUIN. Théorie de la fusion complète et de la fusion pâteuse. Ann. de Chim. et Phys. (7) **13**, 264-275.

P. DUHEM. Traité élémentaire de mécanique chimique fondée sur la thermodynamique. Tome III: Les mélanges homogènes; les dissolutions. Paris: Hermann. 384 S. 8°.

W. FOX. Graphics of the thermodynamic function. Journ. Franklin Inst. Philad. **145**, 214-237.

G. Gross. Die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik) unter besonderer Berücksichtigung der Moleculartheorie und der sich daraus ergebenden Erweiterung des Anwendungsgebietes der Thermodynamik; nebst Anwendungen auf die Wärmemotoren, Kältemaschinen und andere technische Einrichtungen. Leichtfasslich behandelt. I. Band. Jena: H. Costenoble. XIII + 254 S. gr. 8°.

J. H. van't Hoff. Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie. Heft I: Die chemische Dynamik. Braunschweig: Vieweg. XI + 252 S. 8°.

J. Kessler. Berechnung der Dampfmaschinen. Kurzgefasste Theorie der Wärme, der Gase und des Wasserdampfes; Theorie der Dampfmaschinen und Anleitung zur Berechnung derselben. Hildburghausen. 56 S. Lex. 8°.

E. Maiss. Aufgaben über Wärme einschliesslich der mechanischen Wärmetheorie und der kinetischen Theorie der Gase. Für Studirende an Mittel- und Gewerbeschulen, zum Selbststudium für angehende Techniker, Physiker und andere. Wien: Pichler. V + 118 S. 8°.

J. Nadal. Théorie mathématique de la machine à vapeur; action des parois. Paris: Dunod. 114 S. 8°.

C. H. Peabody. Thermodynamics of the steam-engine and other heat-engines. 4th edition, rewritten and reset. New York: Wiley and Sons. VI + 522 S. 8°.

J. D. van der Waals. Een benaderde regel voor den loop der plooipuntslijn van een mengsel. Amst. Versl. **6**, 279-303.

J. D. van der Waals. Eenvoudige afleiding van de toestandsvergelijking voor stoffen met uitgebreide en samengestelde molekulen. Amst. Versl. **7**, 160-165.

B. Gastheorie.

S. H. Burbury. On the general theory of stationary motion in an infinite system of molecules. Lond. M. S. Proc. **29**, 225-248.

Nach Verbesserung eines kleinen Fehlers in dem Aufsatze: „On Boltzmann's law of the equality in an infinite system of molecules" (vergl. F. d. M. **27**, 773, 1896) giebt der Verf. selbst eine Uebersicht über seine gegenwärtige Arbeit.

Boltzmann, Watson und andere Autoren machen zur Begründung ihrer Gastheorie eine gewisse Annahme, die man folgendermassen ausdrücken kann. Die Wahrscheinlichkeit irgend einer Molekel, welche Geschwindigkeiten in den Grenzen $u_1 \cdots u_1 + du_1$ etc. hat, ist unabhängig von den Geschwindigkeiten, die irgend eine andere Molekel haben mag, wofern die beiden Molekeln nicht innerhalb der Actionssphäre von einander sind oder jüngst gewesen sind. Verf. nennt diesen angenommenen Zustand der Dinge die „Bedingung A".

Wird die Wahrscheinlichkeit einer Gruppe von n Molekeln, deren Geschwindigkeiten bezw. $u_1 \cdots u_1 + du_1, \cdots, w_n \cdots w_n + dw_n$ sind, mit $e^{-hQ} du_1 \cdots dw_n$ bezeichnet, so darf Q bei dieser Annahme nur Quadrate enthalten oder muss die Gestalt haben: $Q = \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2)$. Die Bedingung A schliesst dies ein, und dies schliesst umgekehrt die Bedingung A ein. Durch den unter dem Namen H-Theorem bekannten Satz ist bewiesen, dass dies die einzige Verteilung ist, die als vereinbar mit dem dauernden Bestande der Bedingung A bestehen kann. Nicht ist bewiesen, sondern wird immer angenommen, dass der durch die Bedingung A beschriebene Zustand zu bestehen fortfahren kann und wirklich fortfährt.

In der letzten Abhandlung (F. d. M. **28**, 822, 1897) wurde gezeigt, dass, wenn die Molekeln gleiche elastische Kugeln von endlichem Durchmesser sind, die Bewegung nicht stationär sein kann, wofern Q nicht nur die Producte, sondern auch die Quadrate der Geschwindigkeiten enthält; mit anderen Worten: die Bedingung A kann nicht fortfahren zu bestehen. Verf. giebt natürlich zu, dass, wenn sie thatsächlich besteht (wenn sie beispielsweise künstlich aufrecht erhalten würde), das H-Theorem und alle seine Folgen daraus fliessen würden.

In der vorliegenden Arbeit wird nun nachgewiesen (Artikel 1—10), dass die Annahme der Bedingung A nicht nötig ist, weil alle theoretischen Ergebnisse, die durch ihre Annahme erzielt werden, durch die allgemeinere Annahme aus Art. 2, nämlich:

$$Q = \Sigma a (u^2 + v^2 + w^2) + \Sigma\Sigma b (uu' + vv' + ww')$$

erhalten werden können. Dieselbe ist auch deshalb nicht nötig (Art. 11), weil alle praktischen, durch jene Voraussetzung erhaltenen Ergebnisse, wie z. B. betreffs der Diffusion, der Viscosität u. s. w., auf der Berechnung des mittleren freien Weges beruhen, der für Gase in der gewöhnlichen Lage mit grosser Annäherung denselben Wert hat, mögen die Coefficienten b vorhanden sein oder nicht. In den übrigen Artikeln (12—25) wird die obige allgemeine Annahme durch Ausdehnung der Methode der vorigen Abhandlung auf andere Gestalten der Molekeln als die von gleichen elastischen Kugeln gerechtfertigt. Lp.

L. Boltzmann. Ueber die sogenannte H-Curve. Math. Ann. **50**, 325-332.

Zur Versinnlichung gewisser gastheoretischer Sätze hat der Verf. eine Curve benutzt, welche in Wiedemann's Ann. **60** abgebildet ist und unter anderen merkwürdigen Eigenschaften diejenige hat, in keinem ihrer Punkte eine Tangente zu besitzen. An der vorliegenden Stelle behandelt er die Eigenschaften der Curve in Anknüpfung an ein elementares Beispiel der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aus einer Urne, die gleich viel weisse und schwarze Kugeln enthält, werde eine ungerade Anzahl $2N+1$ von Zügen Z_ν ($\nu = -N, -N+1, \cdots, 0, 1, \cdots, N$) gemacht; nach jedem Zuge wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgeworfen. Es sei n eine gerade Zahl, kleiner als $2N+2$, a_k die Anzahl der weissen

Kugeln, die bei den n Zügen Z_k, Z_{k+1}, $\cdots$, Z_{k+n-1} gezogen sind, wobei $-N \overline{\underset{<}{=}} k \overline{\underset{<}{=}} N-n+1$. Man construire nun denjenigen Punkt, dessen Coordinaten die Werte haben $x=k/n$, $y=|1-2a_k/n|$, wo die Verticalstriche, wie üblich, den (positiven) absoluten Betrag andeuten sollen. Man lasse jetzt n und N sehr gross werden, aber so, dass N/n ebenfalls sehr gross wird (d. h. beliebig gross, aber endlich, nicht unendlich gross). Der Ort des Punktes ist die betrachtete Curve. — Nachdem der Verf. den Verlauf der Curve erörtert hat, kommt er auf die Bedeutung der angestellten Ueberlegungen für die kinetische Gastheorie zurück. Lp.

L. Boltzmann. Sur le rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz. C. R. **127**, 1009-1014.

Anknüpfend an eine Arbeit von A. Leduc (C. R., **127**, 659-662), discutirt der Verf. die Schlüsse, die man über den Wert von k, dem Verhältnis der specifischen Wärmen, aus der kinetischen Gastheorie ziehen kann, und spricht die Resultate seiner Betrachtungen in folgenden Sätzen aus:

1. Das Molecül eines vollkommenen Gases, für das $k=1^1/_3$ ist, muss sich hinsichtlich der molecularen Stösse wie eine starre Kugel verhalten, was wahrscheinlich nur für einatomige Gase möglich ist.

2. Das Molecül eines vollkommenen Gases, für das in einem ausgedehnten Temperaturintervall $k=1{,}4$ ist, verhält sich wie zwei unter einander verbundene starre Kugeln, was wahrscheinlich nur für zweiatomige Gase zutrifft.

3. Jedes Molecül und sogar jedes Atom ist fähig, in inneren oder elektrischen Partien zu schwingen. Folglich vermindert sich k und wird auch für vollkommene Gase bei hohen Temperaturen veränderlich. Für die drei- und vielatomigen Gase findet das schon bei den gewöhnlichen Temperaturen statt.

4. Für ein unvollkommenes Gas, das dem Gesetze von van der Waals gehorcht, ist k immer kleiner als für ein vollkommenes Gas, dessen Molecül von derselben Constitution ist und dieselben inneren Eigenschaften hat. Aber da das Gesetz von van der Waals nur eine erste Annäherung ist, so können wir nicht wissen, ob diese Theorie allgemein zutreffend ist, und die Theorie der unvollkommenen Gase ist noch gänzlich unsicher. Sbt.

A. Leduc. L'équivalent mécanique de la calorie et les chaleurs spécifiques des gaz. C. R. **127**, 860-862.

Der Verf. sucht die Ursachen festzustellen, aus denen die nach der R. Mayer'schen Methode bestimmten Werte des mechanischen Wärmeäquivalents von den auf andere Weise bestimmten Werten abweichen. Ausgehend von der Formel

$$C-c=\frac{T}{E}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}.$$

leitet er einen complicirten Ausdruck für das mechanische Wärmeäquivalent ab:

$$E = \frac{R}{MC'} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{10^4 - y}{10^4 + (2e-1)\cdot z + (3e-1)(e-1)u}$$

$$\times \left[1 + \chi \cdot \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \chi}}{10^4 - y} + \frac{(e-1)\frac{\partial z}{\partial \chi} + (e-1)^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \chi}}{10^4 + (e-1)z + (e-1)^2 \cdot u} \right) \right]^2.$$

C ist die specifische Wärme bei constantem Druck, M die Molecularmasse des betrachteten Gases, R eine für alle Gase constante Grösse $8319 \cdot 10^4\, C \cdot G \cdot S$, γ das Verhältnis der specifischen Wärmen, e ist gleich $\frac{76p}{\pi}$; y, z und u sind empirische Functionen von $\chi = \frac{\Theta}{T}$, π und Θ aber bedeuten den kritischen Druck und die kritische Temperatur des Gases.

Die Formel wird angewandt auf atmosphärische Luft und Kohlensäure. Für Luft von 0° ergiebt sich $419{,}4 \cdot 10^5$, für Luft von 100° $418{,}4 \cdot 10^5\, C \cdot G \cdot S$ oder im Mittel 427 mkg. Für Kohlensäure sind die Resultate sehr viel mehr verschieden und weichen beträchtlich von einander ab, je nachdem die von Regnault oder die von Wiedemann bestimmten Werte von C zu Grunde gelegt werden. Sbt.

A. Leduc. Densités, volumes moléculaires, compressibilité et dilatation des gaz aux diverses températures et aux pressions moyennes. Journ. de Phys. (3) **7**, 1-17, 189-209.

Verf. hat unter dem Namen des Gesetzes der Molecularvolumina ein Grenzgesetz aufgestellt, das dazu bestimmt ist, das ganz unbestimmte Gesetz von Avogadro-Ampère zu ersetzen. Dasselbe lautet: „In correspondirenden Zuständen haben die Gase einer und derselben Gruppe dasselbe Molecularvolumen“ (vergl. F. d. M. **28**, 825, 1897). Dieses Gesetz wird auf die Berechnung der Dichtigkeiten und der Ausdehnungscoefficienten einer grossen Zahl von Gasen angewandt. Jedesmal, wenn eine genaue experimentelle Bestimmung ausgeführt ist, hat sich eine Uebereinstimmung mit der Rechnung herausgestellt, was vom Verf. als eine Bestätigung seines Gesetzes der correspondirenden Zustände angesehen wird, auf das er sich gestützt hat. Lp.

A. Leduc. Recherches sur les gaz. Ann. de Chim. et Phys. (7) **15**, 1-114.

Dies ist die ausführliche Arbeit, deren wesentliche Resultate vom Verf. schon in den C. R. veröffentlicht sind (vergl. F. d. M. **28**, 825 bis 826, 1897). Lp.

H. Staigmüller. Versuch einer theoretischen Ableitung der Constanten des Gesetzes von Dulong und Petit. Wiedemann Ann. **65,** 670-672.

Indem der Verf. davon ausgeht, dass bei festen Körpern der durch das Thermometer angegebene Zustand bestimmt ist durch die mittlere lebendige Kraft des um eine gewisse Gleichgewichtslage schwingenden Atoms, leitet er die Formel ab: $\alpha \cdot C_r = 5{,}93$, d. i. das Gesetz von Dulong und Petit; α bedeutet das Atomgewicht, C_r die Energiemenge, die zur Erwärmung eines Gramms des Elementes um 1° erforderlich ist.

Für feste Verbindungen von der Formel $A_a\ B_b\ C_c$ ergiebt sich: $\mu C_v = a \cdot \alpha \cdot \mathfrak{A} + b \cdot \beta \cdot \mathfrak{B} + c \cdot \gamma \cdot \mathfrak{C}$. Sbt.

H. Staigmüller. Beiträge zur kinetischen Theorie mehratomiger Gase. Wiedemann Ann. **65,** 655-669.

Die Bewegung eines aus n Atomen bestehenden Gasmolecüls ist durch $3n$ von einander unabhängige Veränderliche bestimmt. Haben im Falle des Temperaturgleichgewichts die lebendigen Kräfte, die diesen Veränderlichen einzeln entsprechen, denselben Mittelwert ε, so ist die Gesamtenergie des Gases $6(n-1)\varepsilon$. Die Grösse $6(n-1) = \vartheta$, die eine für die thermischen Eigenschaften des Gases charakteristische Constante ist, nennt der Verf. Wärmedimension des Gases. Sie ist $\vartheta = a + 2i$, wo a, die Anzahl der äusseren Coordinaten, entweder gleich 6 oder gleich 5 ist, und für i, die Anzahl der inneren Coordinaten, die Relation gilt: $0 \leqq i \leqq (3n - a)$. Ist ϑ bekannt, so ergiebt sich die specifische Wärme aus der Formel $c_p = \frac{(\vartheta + 2)\lambda}{\mu}$, wo μ das Moleculargewicht ($H_2 = 2$) und λ eine Constante (0,98835) bedeutet. Für das Verhältnis der specifischen Wärmen aber gilt die Gleichung $k = \frac{\vartheta + 2}{\vartheta}$.

Die Formeln werden angewandt auf die mehratomigen Gase bis zur Atomzahl 5. In einer ausführlichen Tabelle werden am Schluss für 30 Gase angegeben das Moleculargewicht μ, die Wärmedimension ϑ, die berechneten und die beobachteten Werte der specifischen Wärme c_p und das Verhältnis k der specifischen Wärmen. Sbt.

G. Bakker. Relation entre les lois caractéristiques des gaz parfaits. Journ. de Phys. (3) **7,** 152-154.

Von den drei Grundgesetzen für die idealen Gase von Mariotte, Gay-Lussac und Joule sind nur zwei unabhängig von einander, das dritte dagegen eine Folge der beiden als unabhängig angenommenen.

Lp.

D. BERTHELOT. Sur la détermination rigoureuse des poids moléculaires des gaz en partant de leurs densités et de l'écart que celles-ci présentent par rapport à la loi de Mariotte. C. R. **126,** 954-956.

Die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac gelten streng nur für sehr geringe Druckkräfte; nur unter dieser Voraussetzung sind auch die Molecularvolumina aller Gase gleich. Setzt man nun für Druckkräfte, die in der Nähe von einer Atmosphäre liegen, und für constante Temperatur die Abweichung vom Mariotte'schen Gesetze

$$\varepsilon = \frac{p_0 v_0}{pv} - 1 = a\,(p - p_0),$$

so ergiebt sich, dass das Moleculargewicht eines Gases proportional ist mit dem Producte $(1 - a)\,d$, wenn der Druck p in Atmosphären angegeben ist. Hier bedeutet d die Dichtigkeit beim Atmosphärendruck und a einen Coefficienten, der nach Regnault innerhalb der Grenzen 1 und 6 Atmosphären constant ist.

In einer kleinen Tabelle giebt der Verf. für Wasserstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd und Sauerstoff 1. den Wert des Coefficienten a, der nach Leduc genau bekannt ist bis auf einen Fehler von $\pm$ 0,00004; 2. das Molecularvolumen für die Temperatur 0^0 und den Druck von einer Atmosphäre; 3. die Dichtigkeit des Gases in Bezug auf Sauerstoff; 4. das nach der angegebenen Formel berechnete Moleculargewicht in Bezug auf Sauerstoff; 5. das Atomgewicht; dessen Wert ist, wenn $O = 16$ gesetzt wird, für H 1,0074, N 14,007, C 12,007. Sbt.

G. H. BRYAN. The kinetic theory and radiant energy. Nature **57,** 536.

Unter Bezugnahme auf die Erörterungen, über welche in F. d. M. **26,** 1059, 1895 berichtet ist, will der Verf. zeigen, dass die darauf folgende Entdeckung der Röntgen-Strahlen eine Theorie der Wärmestrahlung vermittelt, die vielleicht bezüglich der damals besprochenen Schwierigkeiten Aufklärung schaffen kann, indem sie eine Antwort auf die Frage liefert: Wenn die Temperatur eines Gases der mittleren translatorischen kinetischen Energie der Molekeln proportional ist, wie kommt es da, dass diese kinetische Energie von einem System von Molekeln auf ein anderes vermittelst Strahlung durch den Aether übertragen werden kann? Lp.

C. DIETERICI. Kinetische Theorie der Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. **66,** 826-858.

In der Ueberzeugung, dass es gelingen muss, die Anschauungen der neuen Theorie der Lösungen mit denen der kinetischen Gastheorie in Einklang zu bringen, versucht der Verf. eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten auszubilden. Er behandelt die Flüssigkeiten zunächst als ideale Gase und wendet auf sie die aus der kinetischen Theorie der

Gase bekannten Berechnungen an; dabei ergeben sich aber für den Dampfdruck und die Verdampfungswärme Folgerungen, die mit der Erfahrung nicht übereinstimmen. Von den verschiedenen Möglichkeiten einer Erweiterung erweist sich nur die von van der Waals eingeführte Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung der Molecüle im Stande, weiter zu führen. Der Ausdruck, der sich nun für die Verdampfungswärme einer homogenen Flüssigkeit ergiebt, hat einen deutlichen, leicht verständlichen Sinn und stimmt mit der Erfahrung wenigstens annähernd überein. Er lässt eine Anwendung auf Lösungen zu und führt damit zu einer kinetischen Deutung des osmotischen Druckes. Eine numerische Berechnung der entwickelten Ausdrücke und die Anwendung auf Beobachtungen stösst auf Schwierigkeiten und ist mit genügender Sicherheit erst dann ausführbar, wenn über die Grösse der Molecüle sowohl des lösenden wie des gelösten Stoffes näherer Aufschluss gewonnen ist. Sbt.

L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. Teil II: Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molecülen; Gasdissociation. Leipzig. X + 265 S. 8°.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

E. le Roy. Sur l'intégration des équations de la chaleur (suite). Ann. de l'Éc. Norm. (3) **15**, 9-178.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung der in den Annalen von 1897 (**14**) begonnenen Untersuchungen (s. F. d. M. **28**, 830). Erst werden das Dirichlet'sche Problem und die an eine geschlossene Oberfläche gebundenen fundamentalen harmonischen Functionen, dann wird die Erkaltung der festen Körper und das Problem von Fourier behandelt. Sbt.

W. Stekloff. Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. C. R. **126**, 1022-1025.

Wenn ein Raum (D) von einer Oberfläche (S) begrenzt ist, die in jedem Punkte eine bestimmte, endliche Krümmung hat, so existiren unendlich viele positive Zahlen μ_s und entsprechende Functionen V_s, die den Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_s}{\partial z^2}+\mu_s\cdot V_s=0 \text{ für das Innere von } (D)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial n}+h\cdot V_s=0 \text{ für die Oberfläche } (S).$$

n bezeichnet die Richtung der Normale, h ist eine positive Constante.

Bedeutet nun f eine Function, die mit ihren Ableitungen erster Ordnung im Inneren von (D) endlich und continuirlich ist, so wird

$$\int f^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2,$$

wo $A_s = \int f \cdot V_s d\tau$ und $d\tau$ das Volumenelement von (D) bezeichnet. Die Function f lässt sich in eine absolut convergente Reihe entwickeln, die nach den Functionen V_s fortschreitet, wenn sie mit ihren Ableitungen erster bis dritter Ordnung im Inneren von (D) endlich und continuirlich ist und an der Oberfläche (S) der Strahlungsgleichung genügt. Sbt.

G. Lauricella. Sulla propagazione del calore. Torino Atti **33**, 969-983.

Der am Schlusse des vorstehenden Referats angeführte Satz von Stekloff ist nach dem Verf. einer Verallgemeinerung fähig. Immer nämlich kann eine beliebige Function, die für das Innere eines Körpers mit ihren Ableitungen erster bis dritter Ordnung, für die Oberfläche aber mit ihrer Ableitung nach der Normale endlich und stetig ist, in zwei Functionen zerlegt werden, von denen die eine die Bedeutung einer stationären Temperatur hat, die andere aber der Wärmegleichung für die Grenzen genügt. Für die Reihenentwickelung der zweiten Function giebt der Verf. einen anderen (einfacheren) Beweis als Stekloff und gelangt zu dem folgenden allgemeinen Theorem: Die veränderliche Temperatur eines Körpers, die einen beliebigen Anfangswert hatte, kann immer betrachtet werden als die „Superposition einer stationären Temperatur und einer begrenzten oder unbegrenzten Zahl von elementaren Temperaturen“.
Sbt.

F. A. Schulze. Ueber eine Methode zur Bestimmung der Wärmeleitung fester Körper. Wiedemann Ann. **66**, 207-223.

Ein Stab aus dem zu untersuchenden Material und von hinreichender Länge besitze die Temperatur (0) der umgebenden Luft. In der Entfernung von einigen Centimetern von der einen Endfläche befinde sich in einer feinen Durchbohrung ein mit einem empfindlichen Galvanometer in Verbindung stehendes Thermoelement. Wird diese Endfläche von der Zeit $t = 0$ an durch einen starken Wasserstrahl bespült, dessen Temperatur ϑ_1 ist, so zeigt sich nach t_1 Sek. ein Ausschlag von n Scalenteilen; derselbe Ausschlag zeigt sich nach t_2 Sek., wenn die Temperatur des Wassers ϑ_2 ist. Aus ϑ_1, ϑ_2, t_1 und t_2 lässt sich der Temperaturleitungscoefficient $\varkappa^2 = \frac{k}{c \cdot \varrho}$ berechnen (c die Dichte, ϱ die specifische Wärme, k die innere Leitungsconstante der Substanz), wenn man voraussetzt, dass die Endfläche des Stabes momentan die Temperatur des bespülenden Wassers annimmt, und dass gleichen Winkelausschlägen des Galvanometers stets gleiche Temperaturänderungen an der Stelle des Thermoelementes entsprechen. Sbt.

M. Ascoli. Sulla determinazione della temperatura e dei coefficienti di conduttività termica interna ed esterna di un conduttore. Nuovo Cimento (4) 7, 249-263.

Die Temperatur eines horizontalen Drahtes von unbestimmter Länge, durch den ein Strom von der Stärke i Amp. fliesst, ist gleichförmig und gegeben durch die Gleichung des thermischen Gleichgewichts

$$0{,}234 \cdot i^2 r = h \cdot S \cdot (T_1 - t).$$

r ist der Widerstand (in Ohms) eines Drahtstückes von der äusseren Oberfläche S qcm, T_1 ist die Temperatur des Drahtes, t die seiner Umgebung, h der Coefficient des äusseren Leitungsvermögens.

Wenn D der Durchmesser des Drahtes (in cm), r_0 der Widerstand bei der Temperatur t von einem Centimeter des Drahtes, α der Temperaturcoefficient des Widerstandes, $A = 0{,}234$, so kann die Gleichung geschrieben werden:

$$A \cdot i^2 r_0 \, [1 + \alpha (T_1 - t)] = h \cdot \pi D \cdot (T_1 - t).$$

Daraus folgt:

$$T_1 - t = \frac{A \cdot i^2 \cdot r_0}{h \pi D - \alpha \cdot A i^2 r_0}.$$

Wenn die Temperatur längs des Drahtes den veränderlichen Wert T, an dem Ende aber den festen Wert T_0 hat, so folgt — wenn noch l die Länge des Drahtes bezeichnet — für einen Punkt in der Entfernung x vom Ende:

$$T - t = (T_1 - t) \left[1 - \frac{1 - \frac{T_0 - t}{T_1 - t}}{e^{al} - e^{-al}} \left(e^{ax} - e^{-ax} + e^{a(l-x)} - e^{-a(l-x)} \right) \right].$$

Dabei ist gesetzt $a^2 = \frac{4h}{cD} - \alpha \cdot \frac{A i^2 r_0}{\frac{1}{4} c \pi D^2}$, und c bedeutet den Coefficienten des inneren Leitungsvermögens.

Der Mittelwert des Temperaturüberschusses des Drahtes im Vergleich zur Umgebung wird

$$T_m - t = (T_1 - t) \cdot \left[1 - \frac{2}{a \cdot l} \left(1 - \frac{T_0 - t}{T_1 - t} \right) \right].$$

Misst man nun die Verlängerung $\Delta = k \cdot l \, (T_m - t)$, wo k der Mittelwert des linearen Ausdehnungscoefficienten, für zwei verschiedene Längen l_1 und l_2, so ergeben sich aus den beiden Gleichungen $T_1 - t$ und a. Danach folgen die Werte von c und h aus den für $T_1 - t$ und a^2 angegebenen Gleichungen, nämlich

$$h = \frac{A i^2 r_0}{\pi D} \cdot \frac{1 + \alpha (T_1 - t)}{T_1 - t}$$

und

$$c = \frac{A i^2 r_0}{\pi D} \cdot \frac{4}{D} \cdot \frac{1}{a^2 (T_1 - t)}.$$

Die Experimente werden beschrieben und ihre Resultate für zwei Kupferdrähte von verschiedenem Durchmesser mitgeteilt. Sbt.

R. Ferrini. Sulla trasmissione del calore attraverso i muri. Lomb. Ist. Rend. (2) **31,** 479-496.

Es handelt sich um die Berechnung der Wärmemenge, die in einer gegebenen Zeit durch die Wände eines Zimmers etc. hindurchgeleitet wird, insbesondere in dem Falle, wo die Abkühlung mit Unterbrechungen erfolgt. Man begnügt sich in solchem Falle meistens damit, dass man der für gleichmässig andauernde Erkaltung berechneten Wärmemenge einen empirischen Coefficienten hinzufügt, der von der Dauer der Unterbrechung abhängt. Der Verf. prüft, wie weit diese Methode anwendbar ist; seine Folgerungen sind besonders praktisch von Interesse. Sbt.

F. Morano. La conduttività termica nelle rocce della campagna romana. Misura dei calori specifici e delle densità. Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 61-88.

Zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens der hauptsächlichsten Gesteine der Campagna hat der Verf. Stücke davon in Gestalt von Scheiben untersucht. Theoretisch ergiebt sich die Temperatur in einem bestimmten Punkte der Scheibe, in der die Wärme sich symmetrisch zur Axe fortbewegt. Aus der Beobachtung der Temperaturen folgt das Leitungsvermögen des Stoffes. Zu dessen Bestimmung ist aber noch nötig die Kenntnis der specifischen Wärme, der Dichtigkeit und des äusseren Leitungsvermögens. — In der vorliegenden Mitteilung werden die Formeln für die specifische Wärme und die Dichtigkeit gegeben und die Werte dieser Grössen für acht verschiedene Gesteinsarten angeführt. Sbt.

J. Benetti. La legge empirica della trasmissione del calore attraverso la superficie riscaldata delle caldaje a vapore. Bologna Mem. (5) **7,** 123-175.

Eine historisch-kritische Untersuchung des Gegenstandes, der bei seiner hohen Bedeutung für die Technik seit Péclet (1829) vielfach in physikalischen Arbeiten behandelt worden ist. Sbt.

B. O. Peirce and R. W. Willson. On the thermal conductivities of certain poor conductors. I. American Ac. Proc. **34,** 1-56.

Auf die analytische Behandlung des Problems der Wärmeleitung durch ein gerades, regelmässiges Prisma, dessen Grundflächen zwei verschiedene, constant bleibende Temperaturen haben, folgt die Beschreibung

der Apparate, mit denen die Verf. in jahrelanger Arbeit für gewisse, verhältnismässig schlecht leitende Stoffe das Leitungsvermögen und dessen Veränderlichkeit mit der Temperatur bestimmt haben; zuletzt werden die Resultate für 16 verschiedene Marmorsorten angegeben, die erhaltenen Zahlen wachsen von 0,00501 bis 0,00761. Sbt.

D. Straneo. Sulla conducibilità termica del ghiaccio. Nuovo Cimento (4) **7**, 333-340.

Auszug aus den in F. d. M. **28**, 831 besprochenen Arbeiten. Sbt.

Ch. H. Lees. On the thermal conductivities of single and mixed solids and liquids and their variation with temperature. Phil. Trans. A **191**, 399-440.

Der Verf. bestimmt die Wärmeleitungsfähigkeit von Substanzen, indem er zwei ringförmige Scheiben aus ihnen bildet, die er zwischen eine innere, auf constanter Temperatur gehaltene Scheibe aus gut leitendem Material und zwei äussere Scheiben ebenfalls aus gut leitendem Material einschaltet und nach eingetretenem stationärem Zustande die Temperatur der äusseren Scheiben misst. Die mathematischen Grundlagen dieser Versuchsanordnungen, Messung der zugeführten Energie, Verluste durch Strahlung etc., der Fehler, der aus vorzeitiger Annahme des in Wahrheit erst unendlich spät eintretenden stationären Zustandes resultirt, das Princip der Messung durch Thermoelemente etc. werden discutirt, naturgemäss nur in Hinsicht auf die specielle Versuchsanordnung. Von den Resultaten der Versuche sei als mathematisch von Bedeutung nur mitgeteilt, dass die Leitungsfähigkeit einer Mischung keineswegs eine lineare Function der Leitungsfähigkeit der Componenten darstellt. Der Verf. leitet für sie theoretisch eine nicht ganz einfache, aus Producten von Facultäten gebildete Formel ab, für die er eine Tabelle berechnet. Br.

M. Smoluchowski de Smolan. On conduction of heat by rarefied gases. Phil. Mag. (5) **46**, 192-206.

Die Poisson'sche Theorie der Wärmeleitung setzt voraus, dass an der Grenze zweier Körper von verschiedener Leitungsfähigkeit ein Temperatursprung stattfindet, dessen Grösse dem Temperaturabfall in jedem der beiden Medien in unmittelbarer Nähe der Grenze proportional ist. Dies Gesetz lässt sich, mit leicht verständlicher Zeichenbedeutung, schreiben: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \gamma \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n_1}$, wo γ eine Constante bedeutet. Ist das Poisson'sche Gesetz falsch und die Fourier'sche Annahme der stetigen Wärmeleitung

richtig, so muss $\gamma = 0$ sein. Der Verf. giebt nun eine Versuchsanordnung für die Wärmeleitung von erwärmtem Glas als Wärmequelle durch verdünnte Gase an, die es gestattet, γ durch Beobachtungsgrössen zu messen, entwickelt die nötigen Formeln und findet, dass γ thatsächlich von 0 verschieden, und zwar dem Gasdrucke umgekehrt proportional, also der freien Weglänge direct proportional ist. Das Resultat wird für die Berührung verdünnter Gase und einer starren Wand auch theoretisch auf Grund der kinetischen Gastheorie abgeleitet. Qualitativ ergiebt sich der Temperatursprung leicht aus der Unwahrscheinlichkeit der Annahme, dass ein gegen die Wand anprallendes Gasmolecül im Augenblicke des Anprallens seine Energie völlig mit der der Wand austauschen soll; aber auch quantitativ wird eine Lösung durch Formeln gegeben, und zwar sowohl nach der Theorie von Clausius wie nach der von Maxwell.

Br.

M. Smoluchowski Ritter von Smolan. Ueber Wärmeleitung in verdünnten Gasen. Wiedemann Ann. **64**, 101-130.

Kundt und Warburg haben gezeigt, dass bei der Bewegung von stärker verdünnten Gasen an einer festen Wand eine Gleitung stattfindet, und dass für den in der Gleichung $\zeta \frac{\partial v}{\partial n} = v - v'$ auftretenden Gleitungscoefficienten ζ die Beziehung besteht $\zeta = k \cdot \lambda$, wo λ die mittlere Weglänge der Gasmolecüle und k eine Constante bedeutet, deren Wert zwischen 1,3 und 1,0 schwankt. Nach denselben Forschern müssen der kinetischen Gastheorie zufolge bei der Wärmeleitung an der Grenzfläche von verdünnten Gasen und festen Körpern Erscheinungen sich zeigen, die der Gleitung der Gase analog sind; es muss an der Grenzfläche ein endlicher Temperatursprung stattfinden; der „Temperatursprungcoefficient“ $\gamma = \frac{\varkappa}{q}$, der in der Poisson'schen Gleichung

$$\frac{\varkappa}{q} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\varkappa'}{q} \frac{\partial \Theta'}{\partial n'} = \Theta - \Theta'$$

auftritt (Θ und Θ' die Temperaturen, $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Wärmeleitungscoefficienten), muss von 0 verschieden sein.

Auf Anregung von Warburg hat der Verf. diese Verhältnisse näher untersucht und ist zu folgenden Resultaten gekommen:

Bei niedrigem Druck wird der Temperatursprung von Einfluss, der auch hier gleich dem Product aus der mittleren Weglänge des Gases und dem constanten Temperatursprungcoefficienten ist. Der Wert dieses Coefficienten ist nach den Versuchen

für Luft: $\gamma = 1{,}70\,\lambda$ oder $= 0{,}0000171 \text{ cm} \cdot \frac{760}{p}$,

$$\text{für Wasserstoff: } \gamma = 6{,}96\,\lambda \text{ oder} = 0{,}000129 \quad \text{cm} \cdot \frac{760}{p}.$$

Der Temperatursprung kann beträchtlich werden; er betrug für Wasserstoff bei dem einen der benutzten Apparate bei 1 mm Druck 7°, $^1/_4$ der ganzen Temperaturdifferenz. Sbt.

W. Muhle. Ueber den stationären Temperaturzustand in einem sphärischen Flächenstück. Leipzig. 83 S.

S. Tereschin. Ueber die Abhängigkeit der Gesamtstrahlung fester Körper von der Temperatur. Diss. St. Petersburg.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

N. Jadanza. Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie. Torino Atti **33,** 883-902.

Die von Gauss in die Geodäsie eingeführte und vom General Schreiber bis in die letzten Consequenzen ausgearbeitete Methode der Stations-Winkelbeobachtungen in allen Combinationen ist seit Ende der siebziger Jahre auch für die Triangulationen erster Ordnung in Italien eingeführt worden. Der Verf. will diese Methode an der Hand der officiellen italienischen Publicationen erläutern, hat jedoch gerade den Hauptvorzug der Schreiber'schen Methode merkwürdigerweise nicht erkannt; wenigstens erwähnt er darüber nichts. Es handelt sich hierbei nicht allein um die dem Schreiber'schen Verfahren eigentümliche, ausserordentlich einfache Methode der fast ohne Rechnung zu ermittelnden plausibelsten Werte der beobachteten Richtungen, sondern besonders um die Berechnung des aus der Stationsausgleichung sich ergebenden mittleren Fehlers der Gewichtseinheit und der ausgeglichenen Richtungen. Der Verf. macht sich über die aus der Schreiber'schen Methode in den untersuchten Fällen gefundenen mittleren Fehler in fast nicht mehr erlaubter Weise lustig. Sie sind ihm zu klein, und ihre Berechnungsart ist ihm zu künstlich und nicht streng; deshalb entwickelt er eine Methode, die sie bedeutend grösser ergiebt. Nun beruht aber der Wert der fraglichen Methode gerade darauf, dass jeder Winkel an solcherart symmetrisch verteilten Kreisstellen beobachtet ist, dass die Mittelwerte dieser Winkelbeobachtungen von dem Einfluss der periodischen Teilungsfehler befreit sind, und dass ferner jede Einstellung auf eine Richtung (also auch für jeden Winkel, in den sie eingeht) an einer anderen Kreisstelle geschieht,

wodurch der Einfluss der zufälligen Teilungsfehler möglichst unschädlich wird. Wenn man daher, wie es Schreiber thut, zur Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (der einfachen oder doppelten Beobachtung einer Richtung) von den Mittelwerten der beobachteten Winkel ausgeht, so ist das verständig, weil auf diese Weise die periodischen Teilungsfehler, die im Resultat unschädlich gemacht sind, auch für die Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit ohne Einfluss sind. Wenn also der Verf. bei seiner Berechnung des mittleren Fehlers wieder auf die Resultate der einzelnen Winkelbeobachtungen zurückgeht, so macht er einen Rückschritt, zumal da von dem Urheber dieser Methode selbst diese Umstände ausführlich auseinandergesetzt und veröffentlicht worden sind. Auf diese Weise erhält der Verf. natürlich viel grössere und ihn mehr befriedigende Werte für die verschiedenen mittleren Fehler.

Bö.

E. Hammer. Zur Ausgleichung eines durch Längenmessung bestimmten Punktes. Schlömilch Z. **43**, 105-115.

Es kommen Fälle vor, wo es praktisch sein kann, einen neu zu bestimmenden Punkt einer Vermessung nicht durch Winkelmessungen (Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden), sondern durch directe Längenmessungen gegen gegebene Punkte festzulegen. Die bei mehr als zwei gegebenen Punkten hierbei auftretende Ausgleichungsaufgabe ist analytisch bereits mehrfach behandelt worden. Der Verf. legt Wert auf die von ihm hier ausserdem gegebene graphische Lösung, weil sie die etwaigen constanten Fehler der Längenmessung eher erkennen lasse und unschädlich mache. Schliesslich wird noch hervorgehoben, dass auch für diese Art der Punktbestimmung die Benutzung Gauss'scher conformer Coordinaten günstiger sei, als die der Soldner'schen Coordinaten. Bö.

C. Runge. Ueber die Ortsbestimmung auf See. Jordan Z. f. V. **27**, 258-262.

Ist weder Breite noch Länge bekannt, geben jedoch die Chronometer in zuverlässiger Weise Greenwicher Zeit an, so folgt aus der Höhenbeobachtung eines Gestirns, dass man sich auf einem gewissen Kreise befindet. Da man immer einigermassen über den Schiffsort unterrichtet ist, so handelt es sich nur um ein kleines Stück dieses Kreises, und wenn der Radius des Kreises, d. h. also die beobachtete Zenithdistanz nicht zu klein ist, so kann man ein kleines Stück von ihm als geradlinig betrachten. So erhält man für den Schiffsort eine gerade Linie, die Standlinie, deren Azimut gleich dem um 90° vermehrten Azimut des Gestirns ist. Dieses war es, worauf vor mehr als 50 Jahren Kapitän Sumner aufmerksam machte. Hat man an demselben Ort zwei Höhenbeobachtungen, so ist der Schnittpunkt der beiden entsprechenden Standlinien der gesuchte Ort. Der Verf. giebt nun Vorschriften und Beispiele für

die rechnerische (nicht graphische) Behandlung dieser Aufgabe unter Benutzung der vorhandenen Azimuttafeln, wobei auch noch darauf Rücksicht genommen wird, wenn das Schiff in der Zeit zwischen den beiden Beobachtungen seinen Ort geändert hat. Auch wird der Fall, dass mehr als zwei Beobachtungen vorliegen, behandelt. Bö.

J. BISCHOFF. Umwandlung sphärischer Coordinaten. Jordan Z. f. V. **27**, 169-172.

Die Umwandlung sphärischer Coordinaten von einem System in ein anderes, was besonders an ihren Grenzen häufiger eintreten wird, kann, sobald nur für einen Punkt die Coordinaten in beiden Systemen vorliegen, statt durch eigene Formeln viel leichter dadurch bewerkstelligt werden, dass man für einen beliebigen weiteren Punkt des einen Systems Entfernung und Richtungswinkel ableitet und unter Berücksichtigung der Meridianconvergenzen den Richtungswinkel und damit die Coordinaten im anderen System berechnet. Für diesen Richtungswinkelunterschied zwischen dem 1. und 2. System in einem beliebigen Punkte entwickelt der Verf., an Stelle der doppelten Berechnung der Meridianconvergenz, eine ganz einfache Formel. Die Rechnung nach dieser Formel wird dann sehr bequem sein, wenn, wie in Bayern, geographische Coordinaten für geodätische Zwecke nicht vorliegen und auch nicht benutzt werden. Bö.

J. H. FRANKE. Coordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecksnetzen. Münch. Ber. **28**, 1898, 19-36.

Die Resultate der bayerischen Landesvermessung sind einheitlich in rechtwinklig-sphärischen Soldner'schen Coordinaten festgelegt. Bei den heutigen Methoden der praktischen Geodäsie und bei den jetzigen Ansprüchen an die Genauigkeit geodätischer Resultate und wegen der Querausdehnung des Landes bis zu Ordinaten von ± 180 km sind diese Resultate im allgemeinen nicht mehr direct verwertbar. Da aber in absehbarer Zeit eine Aenderung in der Beschaffenheit dieser geodätischen Grundlagen nicht zu erwarten und eigentlich auch nicht nötig ist, so empfiehlt der Verf. die Einführung kleinerer, specieller ebener Coordinatensysteme, für welche er die nötigen, übrigens einfachen Formeln entwickelt, und deren Benutzung den modernen Anforderungen genügt. Der Verf. behandelt sodann noch die Möglichkeit der Einführung conformer ebener Coordinaten auf Grund der gegebenen Verhältnisse. Das entsprechende Mittel zu diesem jedenfalls zu erstrebenden Zwecke liegt dann nach des Verfs. Meinung besonders in der passenden Wahl der neuen Coordinatenaxen bei gehöriger Begrenzung der localen Systeme. Bö.

W. JORDAN. Verschiebung eines trigonometrischen Netzes. Jordan Z. f. V. **27**, 281-293.

Ein praktischer Landmesser, der bei seinen Aufnahmen sich an die staatliche Vermessung und an eine städtische angeschlossen hatte, fand, dass für die zweite gegen die erste eine an sich belanglose Verschiebung vorhanden sein müsse; er fragt an, wie er diesen Umstand möglichst streng berücksichtigen könne. Jordan verweist in Bezug hierauf auf die Abhandlung von L. Krüger: „Ueber den Anschluss eines secundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz", die in der Z. f. V. **25**, 289-307, 339-347, 368-375 enthalten ist (vergl. auch F. d. M. **27**, 787-788, 1896). Da aber, nach des Verfs. Meinung, die Krüger'sche Abhandlung über conforme Netzverschiebung nicht in solcher Form gegeben sei, dass sich der praktische Teil von dem mehr theoretischen Teil genügend abhebe, so will er ausführlicher auf die Sache eingehen. Er entwickelt dann auf elementarerem Wege einen Teil der Krüger'schen Resultate, worauf er auch noch einige praktische Beispiele durchführt. Jordan glaubt, dass in sehr vielen praktischen Fällen die Krüger'sche conforme Interpolations-Umformung noch wertvolle Dienste leisten dürfte.

Bö.

H. Leibold und W. Jordan. Coordinaten im Katastersystem Bochum. Jordan Z. f. V. **27**, 6-14, 86.

H. Leibold und W. Jordan. Berechnung der ebenen rechtwinkligen Coordinaten für die Eckpunkte der Messtischblätter aus den gegebenen geographischen Coordinaten im Katastersystem Bochum. Jordan Z. f. V. **27**, 217-228.

Eggert und W. Jordan. Berechnung der geographischen Coordinaten aus den rechtwinkligen Coordinaten, φ und λ aus x und y. Jordan Z. f. V. **27**, 613-623.

Es war das Bedürfnis entstanden, für das Katastersystem Bochum die Eckpunkte der Messtischblätter der preussischen Landesaufnahme, wofür die geographischen Coordinaten gegeben sind, in ebene Coordinaten mit dem Nullpunkte Bochum umzurechnen. Jordan giebt hierauf zunächst seine von ihm schon früher entwickelten Formeln, die auf Reihenentwickelungen nach $\Delta\varphi$ und λ beruhen, und berechnet sodann für 4 um 30′ von einander abstehende Nullpunktsbreiten von 51° 30′ bis 53° 0′ die in diesen Formeln auftretenden 13 Coefficienten; es ist nämlich praktisch, nicht die specielle Breite des Coordinatennullpunkts zu nehmen, sondern eine etwa auf $\frac{1}{2}^0$ abgerundete, indem man dann später nur eine constante Verschiebung in x anzubringen braucht, um auf den wirklichen Nullpunkt zu reduciren. Die wichtigste Rechenhülfe ist dann noch die Aufstellung einer engen Hülfstafel für die Meridianbogen vom Aequator bis zur Breite φ, wovon ein Beispiel für $\varphi = 51^0\,0'$ bis $52^0\,0'$ in Intervallen von $10''$ gegeben wird.

In der zweiten Mitteilung berichtet Leibold über die nach der angegebenen Methode im Katastersystem Bochum ausgeführten Rechnungen, wobei sich die Jordan'schen Formeln gut bewährt haben, indem er aber dabei noch von zwei besonders entworfenen Tabellen Gebrauch

macht. Um die Jordan'schen Formeln auch bequem für einen allgemeinen Gebrauch zugänglich zu machen, geben Jordan und Eggert noch Tafeln für die 13 Coefficienten der Formeln in Intervallen von 30′ für die Breiten von 47° 0′ bis 55° 0′.

In der letzten Notiz stellt Jordan die Reihenentwickelungen für die umgekehrte Aufgabe auf und giebt auch den Anfang einer Tafel für die hier auftretenden 13 Coefficienten, während Eggert eine Zusammenstellung liefert, in der für die 41 preussischen Coordinaten-Nullpunkte die Länge der Meridianbogen vom Aequator bis zu den einzelnen Nullpunktsbreiten und die Reductionen $\varDelta x$ von den einzelnen Nullpunkten auf die je zwei benachbarten auf $\frac{1}{2}^0$ abgerundeten Breiten. Hiermit sind die Jordan'schen Formeln in Verbindung mit den schon erwähnten Tafeln der Coefficienten für den unmittelbaren Gebrauch in sämtlichen preussischen Coordinatensystemen verwendbar gemacht. Bö.

W. Jordan. Die neue württembergische topographische Karte. Mit 2 Karten-Beilagen. Jordan Z. f. V. **27**, 65-84, 552.

E. Hammer. Berechnung von Soldner'schen Coordinaten aus geographischen Coordinaten und umgekehrt für topographische Zwecke (neue württembergische topographische Karte). Astr. Nachr. **147**, No. 3512, 125-142.

W. Jordan. Württembergische und badische Coordinaten. Astr. Nachr. **147**, No. 3522, 297-304.

In der ersten Abhandlung hatte Jordan beiläufig auf die von ihm schon früher gegebenen bequemen Reihenentwickelungen hingewiesen, durch die man zu den gegebenen geographischen Coordinaten eines Punktes seine Soldner'schen Coordinaten in irgend einem orientirten geodätischen System mit gegebenen geographischen Nullpunkts-Coordinaten berechnen kann. Zugleich hatte er die Bemerkung gemacht, dass dem Vernehmen nach in Württemberg die Berechnung anders geführt worden wäre. — In der zweiten Abhandlung veröffentlicht nun Hammer das in Württemberg angewandte Verfahren bei Ausführung der genannten Aufgabe, indem er auch noch für zwei andere häufiger vorkommende Aufgaben (nämlich aus φ und y oder aus λ und x zu finden x oder y) die Lösungen beifügt. Hammer überträgt nämlich zunächst die ellipsoidischen geographischen Coordinaten (φ, λ) vermittelst der bekannten Gauss'schen conformen Abbildung auf eine Normalkugel, und berechnet sodann aus den entsprechenden Kugelcoordinaten (u, l) rein sphärisch die Soldner'schen Coordinaten (x, y), und zwar entweder nach den strengen Formeln, oder aus sehr bequemen Reihenentwickelungen. Drei kleine Tafeln leisten hierbei die besten Dienste. — In der letzten Notiz führt Jordan hauptsächlich einen von Hammer scheinbar aufgedeckten „Widerspruch in der Orientirung“ der Linie Tübingen-Mannheim auf ein theoretisches Missverständnis Hammer's zurück. Bö.

W. JORDAN. Die conforme Doppelprojection der preussischen Landesaufnahme. Jordan Z. f. V. **27,** 33-43, 417-432.

Ueber die conforme Doppelprojection der trigonometrischen Abteilung der königl. preussischen Landesaufnahme war bis Ende 1897 nur wenig veröffentlicht worden, und zwar enthielten diese Veröffentlichungen meistens nur Formeln, Tafeln und Rechnungsvorschriften, aber nur wenige und an manchen Stellen gar keine Entwickelungen (vergl. hierüber übrigens auch das Referat über eine bezügliche Arbeit des Oberst von Schmidt in den F. d. M. **25,** 1893 u. 1894, 1840-1841). Da hierbei aber mehrfach auf die bekannte Abhandlung von Ch. M. Schols: „Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur" für den rein sphärischen Teil der fraglichen Doppelprojection hingewiesen wurde, so entwickelt nunmehr Jordan, zumeist an der Hand dieser Schols'schen Abhandlung, die für die Geodäsie wichtigen Formeln der conformen Mercatorprojection der Kugel auf die Ebene und vergleicht sie schliesslich mit den von General Schreiber gegebenen und in der preussischen Landesaufnahme benutzten Gebrauchsformeln. Bö.

W. JORDAN. Refraction im Nivellement. Theorie von Lallemand. Jordan Z. f. V. **27,** 97-103, 201-202.

Die Lallemand'sche Theorie der Refractionswirkung beim Nivelliren ist in der Abhandlung: „Note sur l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique, par Ch. Lallemand" enthalten, die sich als Annex B. III[d] auf S. 247-276 der „Verhandlungen der vom 15.-21. October 1896 in Lausanne abgehaltenen Conferenz der Permanenten Commission der Internationalen Erdmessung. Berlin, 1897" befindet. Ein Auszug dieser Abhandlung ist in die C. R. **123,** 222-225, 297-301, aufgenommen (vergl. F. d. M. **27,** 789-790, 1896). Jordan giebt eine kurze kritische Inhaltsangabe dieser Lallemand'schen Arbeit, verbunden mit einer Discussion der Schlussformeln. Bö.

G. DELITALA. Contributo allo studio del problema di Pothenot. Torino Atti **33,** 311-320.

Es wird eine ausführliche Auseinandersetzung der von H. Sossna im Jahrgang 1896 der Jordan'schen Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 269ff., angegebenen neuen Lösung der Pothenot'schen Aufgabe geliefert, die von dem Entdecker dieser Lösung besonders mit Rücksicht auf die vorteilhafte Anwendung der Rechenmaschine ausgearbeitet worden war. Bö.

F. ANGELITTI. Rettificazione di un arco di meridiano nell'ellissoide terrestre. Nota 1ª, 2ª. Napoli Rend. (3) **4,** 320-330, 338-348.

Die Entwickelungen dieser Abhandlung schliessen sich eng an längst bekannte, besonders von Bessel herrührende Arbeiten an. Auch

die Herleitung numerischer Resultate geht nicht über bereits öfter abgeleitete Zahlenwerte hinaus. Bö.

L. Krüger. Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen. Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung. Potsdam (Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig). VI + 106 S. 4°.

Die von F. R. Helmert im 1. Bande seiner „Höheren Geodäsie“ angegebenen Methoden, die Abweichungen des Geoids von einem Referenzellipsoid zu bestimmen, sind sowohl von ihm selbst in dem I. Heft der „Lotabweichungen“ (Berlin, 1886), als auch von A. Börsch und L. Krüger in dem II. Hefte der „Europäischen Längengradmessung in 52° Breite“ (Berlin, 1896), weiter ausgeführt und vervollkommnet worden. Im wesentlichen besteht das Helmert'sche Verfahren in der Aufstellung von Lotabweichungssystemen, die sich, von einem gemeinsamen Centralpunkt ausgehend, über möglichst ausgedehnte Flächen erstrecken, wobei aber zugleich auch die sich darbietenden Bedingungsgleichungen verschiedener Art, besonders die sogenannten Laplace'schen Gleichungen, gebührend ausgenutzt werden. Die in den genannten Werken angewandten Methoden zur Berechnung der Gleichungen für die Lotabweichungscomponenten, für die Laplace'schen und für die Polygon-Gleichungen erfordern nun sehr umfangreiche Rechnungen und Eliminationen. Der Wunsch, eine unabhängige und einfach zu erlangende Kontrolle der Coefficienten dieser Gleichungen zu erhalten, ist die nächste Veranlassung zur vorliegenden Arbeit gewesen.

Im 1. Kapitel wird zunächst der Zusammenhang zwischen den differentiellen Aenderungen der Seiten und der Winkel eines geodätischen Linienzuges und den entsprechenden Aenderungen in der Grösse und Lage der aus ihm hergeleiteten geodätischen Linie entwickelt. Hieran schliesst sich sodann die Darstellung der Abhängigkeit der Lotabweichungsgleichungen und der Laplace'schen Gleichung für den Endpunkt gegen den Anfangspunkt von diesem geodätischen Linienzuge.

Um bei der Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze, die die Grundlage für die rechnerische Ausnutzung der im 1. Kapitel entwickelten Formeln bilden, Unterlagen zur Gewichtsschätzung der geodätischen Elemente zu erlangen, sind im 2. Kapitel Gewichtsbestimmungen für geodätische Linien vorgenommen, die mit Hülfe von einfachen Ketten abgeleitet wurden. Es wurde hierbei in Betracht gezogen, ob die Ausgleichung der Kette mit Winkel- oder Richtungsverbesserungen erfolgte. An einem ausgedehnten Beispiele wurden die erhaltenen Formeln einer Prüfung unterzogen.

Im 3. Kapitel endlich ist der Einfluss untersucht worden, den der nach der Ausgleichung der Dreieckswidersprüche erfolgte Anschluss der Anfangs- und Endseite einer Dreieckskette an zwei vorgeschriebene Werte auf die Winkel und Seiten der Kette selbst, sowie auf die lineare Länge und auf die Azimute einer ihr angehörigen geodätischen Linie ausübt;

im besonderen wurden die bezüglichen Formeln entwickelt, wenn die aus Winkel- oder Richtungsbeobachtungen hervorgegangene Kette geradgestreckt ist und aus lauter gleichschenkligen Dreiecken besteht.

Bö.

V. Ritter Niesiclowski-Gawin von Niesiclowice. Das Messen von Entfernungen für Kriegszwecke. Mitt. f. Art. u. Genie **29,** 827-880.

Die vorliegende Studie will versuchen, diejenigen Umstände klarzulegen, welche nach Ueberzeugung des Verf. die Grundlage jeder Discussion über diesen Gegenstand zu bilden haben, und im Anschlusse daran der wichtigsten Leistungen auf dem Gebiete militärischer Entfernungsmesser kurz gedenken. Lp.

J. Mandl. Ueber Verwertung von photographischen Aufnahmen aus dem Luftballon. Mitt. üb. Art. u. Genie **29,** 165-194.

Die Abhandlung beschäftigt sich weniger mit der Praxis solcher photographischen Aufnahmen, als mit ihrer Verwertung für photogrammetrische Arbeiten. Der erste Teil erörtert die Ermittelung von Standpunkt und Orientirung des Apparates bei unbekannter Objectiv-Brennweite und unbekannter Lage der Hauptaxen (Problem der fünf Punkte). Die Lösung der hier vorkommenden Aufgaben ist ihrem Wesen nach den von Friedrich Steiner veröffentlichten Arbeiten entnommen (vergl. F. d. M. **24,** 561-562, 1892). Während aber Steiner bei seiner graphischen Lösung Schnitte von punktweise construirten Curven verwendet, ist die Construction des Verfs. eine directe, mit Hülfe von Zirkel und Lineal auszuführende. Die analytische Lösung weicht von der Steiner'schen ganz ab und gestaltet sich durch Benutzung der Determinantentheorie etwas einfacher. Die Ermittelung von Standpunkt und Orientirung des Apparates bei bekannter Objectiv-Brennweite und bekannter Lage der Hauptaxen wird auf zwei Seiten abgemacht. In einem Anhange (S. 181-194) werden kurz die Elemente der neueren synthetischen Geometrie für diejenigen militärischen Leser entwickelt, welche in Folge des Ausschlusses dieser Lehre von den Militärakademien nichts davon wissen. Lp.

E. Goedseels. Sur les niveaux à bulle. Brux. S. sc. **22** A, 4-7.

Vollkommen lässt sich ein derartiges Instrument nur einstellen, wenn es zwei zu einander senkrechte Libellen besitzt. Mn. (Lp.)

T. Gnesotto. Sull' impiego del microsismografo a due componenti per lo studio dei movimenti lenti del suolo. Ven. Ist. Atti (7) **10,** 287-343.

Es handelt sich darum, nachzuweisen, dass der Vicentini'sche Mikroseismograph für zwei Componenten ausser zur Untersuchung der

mikroseismischen Bewegungen auch zum Studium der langsamen Bewegungen des Erdbodens geeignet ist. Der Verf. giebt auf Grund zahlreicher Aufzeichnungen solcher Pendel einige Andeutungen über die Grundsätze, die man bei einer fortlaufenden Reihe derartiger Untersuchungen befolgen muss, um die vom Instrument gegebenen Registrirungen streng zu interpretiren, und über die mathematisch sehr einfache Theorie des Functionirens des die Bewegungen vergrössernden Systems.

Bö.

A. Angot. Sur la formule barométrique. C. R. **126**, 826-828.

Die Barometerformel von Laplace ist auf Grund der Hypothese entwickelt, dass die Luft ohne Bewegung sei und sich im statischen Gleichgewicht befinde, und dass die Druckdifferenzen zwischen den verschiedenen Luftschichten allein durch das Luftgewicht verursacht werden.

Es sei a das Gewicht eines Kubikmeters Luft in der Höhe z, wo der Atmosphärendruck p, die Dampfspannung f, die Temperatur t und die Beschleunigung der Schwere g ist; ferner sei a_0 das Gewicht eines Kubikmeters trockener Luft bei 0^0 und bei 0,760 m Quecksilberdruck und D das Gewicht eines Kubikmeters Quecksilber bei 0^0, wobei diese beiden Grössen im Meeresniveau unter 45^0 Breite für die dort stattfindende Beschleunigung der Schwerkraft G gemessen sind: so hat man für die Höhendifferenz $z - z_0$:

$$\frac{0{,}760\, D}{a_0} \log \frac{p_0}{p} = \int_{z_0}^{z} \frac{g}{G} \cdot \frac{1 - 0{,}377\frac{f}{p}}{1 + \alpha t}\, dz \quad (dp = -a\,dz).$$

Hierbei sind $g, \frac{f}{p}$ und t Functionen von z, die aber im allgemeinen fast nie genau bekannt sein werden. Die gewöhnlich unter dem Namen der Laplace'schen Formel bekannte Gleichung setzt nun voraus, dass diese Functionen constant und gleich den respectiven arithmetischen Mitteln der an den beiden äussersten Stationen beobachteten Werte seien. Der Verf. hat jetzt die wahre Höhendifferenz $z - z_0$ durch zwei Glieder ausgedrückt, von denen das erste die durch die gewöhnliche Formel gegebene, angenäherte Höhe giebt, während das zweite von den über die genannten Functionen gemachten Annahmen abhängt.

Bei dem Aufstieg eines nur mit Registrirapparaten versehenen Ballons in grosse Höhen wird man nachher die verschiedenen Luftschichten erkennen können, innerhalb deren die Aenderung der verschiedenen Elemente regelmässig gewesen ist. Nach den in einer ausführlicheren Abhandlung des Verfs. enthaltenen Tafeln wird man dann auf Grund der erweiterten Formel die Höhenunterschiede für die verschiedenen Schichten berechnen können. Nur unter diesen Voraussetzungen darf man dann auch die aus den barometrischen Beobachtungen abgeleitete Gesamthöhe mit der aus trigonometrischen Messungen erhaltenen vergleichen, zumal wenn man mit Hülfe des Barometers den Einfluss be-

stimmen will, den Luftbewegungen auf die verticale Abnahme des Druckes ausüben. Bö.

Weitere Litteratur.

J. ANGELITTI. Formole e teoremi relativi all' ellissoide terrestre e calcolo nell'ellissoide di Bessel di alcuni elementi per la latitudine di Capodimonte. Atti della Accademia Pontaniana **28** oder (2) **3**. Mem. No. 2. 124. S.

G. DE BERARDINIS. La compensazione delle reti trigonometriche. Torino. Giorgio. 42 S. 4⁰ lith. Vi.

CH. LAGRANGE. Exposé du principe de la théorie fondée sur le théorème a posteriori de la moyenne. Moyennes récurrentes. Belg. Bull. (3) **35**, 795-830.

J. H. FRANKE. Geodätische Punktcoordinirung in sphärischen Kleinsystemen. Vergleichende Entwickelungen im einheitlichen Coordinatensystem der bayerischen Landesvermessung. München: Th. Ackermann. VI + 80 S. gr. 8⁰.

Kapitel 2.

Astronomie.

Astronomischer Kalender für 1899. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe einundsechzigster Jahrgang; der neuen Folge achtzehnter Jahrgang. Wien: Carl Gerold's Sohn. 158 S. gr. 8⁰.

Wie die früheren Jahrgänge dieses musterhaften Kalenders, enthält der gegenwärtige Band auf den ersten 76 Seiten die für das Jahr 1899 geltenden astronomischen Daten. In den dann folgenden Beilagen zum astronomischen Kalender erhält der Leser: 1. Fixsternverzeichnis, 2. Verzeichnis veränderlicher Sterne, 3. Verzeichnis von Nebelflecken und Sternhaufen, 4. Constanten, 5. Uebersicht des Sonnensystems, 6. Verzeichnis geographischer Positionen. Besonders hervorzuheben sind dann die Originalaufsätze: 7. Die grossen Refractoren der Erde von Fr. Bidschof. 8. Die wichtigsten Resultate der in Oesterreich-Ungarn ausgeführten magnetischen Aufnahmen, von J. Liznar. 9. Neue Planeten und Kometen von E. Weiss. 10. Anleitung zur Beobachtung von Feuerkugeln von E. Weiss. Lp.

H. BRUNS. Ueber ein Interpolationsverfahren von Tschebyschef. Astron. Nachr. **146**, No. 3491, 161-170.

Wenn eine Function $G(\varphi)$ in eine trigonometrische Reihe:

$$G(\varphi) = A + A' \cos\varphi + A'' \cos 2\varphi + \cdots$$

entwickelt werden soll, so kann man bei der Berechnung der A, wenn man nur eine endliche Anzahl der Glieder, etwa n nimmt, die Integrale durch Summen

$$\sum_{\varphi} G(\varphi)\cdot\cos q\varphi \quad\text{und}\quad \sum_{\varphi} G(\varphi)\cdot\sin q\varphi$$

ersetzen, wobei φ über die Ecken eines regulären n-Ecks genommen wird. Diese Interpolation kann durch eine andere, sehr merkwürdige, von Tschebyschef angegebene, ersetzt werden, bei welcher der Kreis in 2, 4, 6, 8 etc. Teile zu teilen ist. Man braucht dabei von der Function G viel mehr Werte; dafür fällt dann aber der Factor $\cos q\varphi$, resp. $\sin q\varphi$ fort, und die zugehörigen Rechnungen beschränken sich fast nur auf directe Additionen und Subtractionen. Die Ableitung der Formeln ist nicht einfach, auch eignen sie sich nicht zur Wiedergabe in einem Referate; wenn aber die Werte von G schnell berechnet werden können, so hat die Tschebyschef'sche Methode den grossen Vorzug, dass man nicht von vorn herein sich auf ein bestimmtes n zu beschränken braucht, sondern dass, ohne dass die früheren Rechnungen verworfen werden müssen, sofort nach Belieben die Interpolation weiter fortgesetzt werden kann. Dz.

HATT. Sur la théorie de la lunette zénithale. C. R. **127**, 291-295.

Beweis, dass die Einwürfe des Observators P. Verschaffel gegen den Gebrauch zur Bestimmung der Zenithdistanz nicht stichhaltig sind. Dz.

W. EBERT et J. PERCHOT. Sur la détermination des premiers termes de flexion d'un instrument méridien. C. R. **126**, 27-30.

Es sei P_0 die wirklich gemachte, P_r die auf Durchbiegung verbesserte Lesung, so folgt, wenn z die Zenithdistanz des Sternes ist, eine Formel:

$$P_r = P_0 + a\sin z + b\cos z + a'\sin 2z + b'\cos 2z + \cdots$$

Es werden Methoden angegeben, um a und b durch Beobachtungen an Sternen experimentell zu bestimmen. Dz.

M. HAMY. Sur la mesure des petits diamètres. C. R. **127**, 851-854.

Wenn man das Objectiv eines Fernrohrs durch einen Schirm mit zwei engen, gleichen und parallelen Schlitzen bedeckt, so erscheint als Folge von Interferenz das Bild eines Sternes als eine Reihe abwechselnd heller und dunkler Streifen. Es wird die Theorie weiter verfolgt unter der Annahme, dass die Breite der Schlitze nicht mehr gegen ihren Abstand vernachlässigt werden darf, worauf die Lichtintensität durch ein sehr complicirtes Integral ausgedrückt wird. Dz.

A. Walter. Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 74 S. gr. 8°.

Der Inhalt des Buches zerfällt in zwei Teile. Der erste ist rein geometrisch-analytisch und enthält eine sehr klare Theorie des Weges der Lichtstrahlen unter der Voraussetzung, dass die Luftschichten mit gleichem Brechungsquotienten in concentrischen Kugeln angeordnet sind, was zur Folge hat, dass die Bahn eben wird und die Seitenrefraction verschwindet. Die Formeln werden unter völligem Verzicht auf jede Annahme bezüglich der Beschaffenheit der Atmosphäre abgeleitet und sind daher sehr allgemein und verhältnismässig einfach. Sie bieten auch rein theoretisches Interesse, wie z. B. der Fall, dass n als Function von r die Form $n = A/(r^2 + B)$ hat, welcher nur Kreisbahnen giebt. Es folgen darauf Reihenentwickelungen nach Potenzen des zum Wege gehörigen Centriwinkels, in deren Coefficienten die unbestimmt gelassenen Refractionscoefficienten enthalten sind.

Der zweite Teil ist physikalisch-meteorologischer Natur und giebt eine Analyse der gebräuchlichsten Hypothesen über die Beschaffenheit der Atmosphäre, wobei als erfahrungsmässig hinreichend bewiesen hingestellt wird, dass n lediglich von der Dichte q der Luft, also erst indirect von Temperatur, Spannung und Feuchtigkeitsgehalt abhängt. Man kann nun q entweder unmittelbar, etwa auf Grund meteorologischer Beobachtungen, als Function von r aufstellen oder auf dem Umwege über Temperatur, Spannung und Feuchtigkeitsgehalt. Beide Wege sind eingeschlagen worden, und ihre Ergebnisse werden hier eingehend untersucht. Dz.

P. Harzer. Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Luftbewegungen in der Atmosphäre. Astron. Nachr. **146**, No. 3502-3503, 377-424.

Dieser dritten Abhandlung sind zwei andere (vergl. F. d. M. **14**, 934, 1882 und **15**, 986, 1883) vorangegangen. Hier wird der Einfluss der Abweichung der Flächen constanter Beschaffenheit des Aethers von concentrischen Kugelflächen untersucht und bis zu den Gliedern inclusive dritten Grades festgestellt. Als Anwendung wird der Fall gesetzt, dass diese Flächen concentrische, ähnliche Rotationsellipsoide seien. Es stellt sich der Einfluss der Abplattung als sehr gering heraus. Um ein Urteil über die Brauchbarkeit der erlangten formellen Reihenentwickelungen, die zum Teil semiconvergent sind, zu gewinnen, wird endlich noch der einfachste Fall betrachtet, nämlich derjenige concentrischer Kugeln. Dz.

P. Pizzetti. La rifrazione astronomica calcolata in base alla ipotesi di Mendeleef sulla distribuzione verticale della temperatura nell'aria. Torino Atti **33**, 213-226.

Nach Besprechung anderer Theorien, besonders derer von Bessel, Kramp und Laplace, geht Verf. zu der auf Mendelejeff's Hypothese beruhenden über. Diese Hypothese, welche auf Beobachtungen Glaisher's beruht, setzt zwischen Temperatur und Druck eine lineare Gleichung $t = a + bp$, aus der dann nach Integration der Differentialgleichung zwischen Höhe, Druck und Dichte die letztere als Function der Höhe folgt. Hieraus fliessen wieder Ausdrücke für die Refractionscoefficienten. Dz.

P. Pizzetti. La réfraction astronomique calculée en base à l'hypothèse de Mendeleef sur la variation verticale de la température. Astron. Nachr. **146**, No. 3481, 1-6.

Man vergleiche den vorangehenden Bericht. Dz.

Loewy. Méthode générale pour la détermination des étoiles fondamentales et de la latitude. C. R. **126**, 16-22.

Enthält Untersuchungen über eine vom Verf. früher (C. R. **125**; F. d. M. **28**, 844, 1897) auseinandergesetzte Methode, wobei die Sterne in Gruppen von nahezu gleicher Declination und möglichst gleichen Rectascensionsunterschieden verteilt werden. Die Messungen können, wie Verf. zeigt, erheblich verkürzt werden. Dz.

Ed. Collignon. Note sur la détermination de l'heure du passage du Soleil dans un plan vertical. J. de l'Éc. Pol. (2) **4**, 123-135.

Enthält zwei Lösungen. Die erste ist rein geometrisch und beruht auf der bekannten Eigenschaft der stereographischen Projection, dass Kreise wieder Kreise werden und Winkel unveränderlich sind. Die zweite führt die Aufgabe auf die der Bestimmung von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang zurück. Dz.

G. Bigourdan. Sur la prédiction des occultations d'étoiles par la Lune, et sur le calcul des longitudes terrestres au moyen des occultations. C. R. **127**, 935-938.

Vorschläge, um namentlich Forschungsreisenden die Beobachtung und Berechnung der Sternbedeckungen durch den Mond zu erleichtern. Dz.

J. Curie. Application à la navigation du système de construction des cartes de M. Babinet. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 218-226.

Verf. giebt die graphischen Operationen an, die man zu machen hat, um die Lage eines Punktes einzutragen, ebenso eine von diesem Punkte ausgehende Richtung, und um die auf dieser Richtung zurückgelegte Entfernung abzumessen. Er wendet diese Begriffe auf die Schiff-

fahrt auf einem Hauptkreisbogen und nach der Loxodromie an. Endlich zeigt er, wie man die graphischen Operationen erleichtern kann vermittelst sorgfältig gravirter Blätter, auf denen von vorn herein die Breiten eingetragen sind, und auf denen man nach Belieben als geradlinigen Meridian einen der Meridiane wählt, den die Zeichnung enthalten muss. Lp.

H. B. G. A proposed revolution in nautical astronomy. Nature **58**, 10-12.

In dem Artikel des durch die Initialen nur angedeuteten Verfs. wird die Aufmerksamkeit der englischen Leser auf das Werk von Guyou gelenkt: „Les problèmes de navigation et la carte marine. Types de calcul et tables complètes“ (Paris, Imprimerie Nationale, 1895), in welchem durch Einführung der Meridianteile, „latitudes croissantes“ des Verfs., die auf Karten in Mercator's Projection Bezug nehmen, die Berechnungen ungemein vereinfacht sind. „Wie die Lage jetzt ist, so wird das neue System in Frankreich gut beurteilt, hat in Italien beträchtliche Aufmerksamkeit erregt und die Billigung wenigstens einer ausgezeichneten Autorität in Spanien gewonnen; demnach ist Guyou vielleicht nicht zu sanguinisch in seiner Erwartung, dass die Tabelle der Meridianteile dazu bestimmt ist, früher oder später das allgemeine Werkzeug zur Rechnung bei den Seeleuten zu werden.“ Lp.

J. F. Ruthven. Navigation. Nature **58**, 104-107.

J. F. Ruthven. Nautical astronomy. Nature **58**, 151-154.

Kurze Darstellung der Grundgedanken, die für die Ortsbestimmung bei Seefahrten in Betracht kommen. Lp.

V. Wellmann. Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Astron. Nachr. **148**, No. 3539, 169-174.

In dem Artikel „Ueber die Ursachen der Gravitation“ (Astr. Nachr. **144**, 121; F. d. M. **28**, 709, 1897) waren die beiden sich anziehenden Körper vom Verf. als ruhend angenommen worden. Bewegen sich dieselben nun mit der radialen Geschwindigkeitscomponente $\mp v_r$ gegen einander, und ist $v_r/V = \varepsilon$, wo V die Geschwindigkeit der Aetherpartikeln bedeutet, so folgt der Gasdruck des Aethers bei abnehmender Entfernung $K_1 = \varkappa^2(1-3\varepsilon)/r^2$, bei zunehmender dagegen $K_2 = \varkappa^2(1+3\varepsilon)/r^2$, wenn die höheren Potenzen von ε vernachlässigt werden; für die tangentiale Kraft T wird gefunden $T = \frac{1}{2}\varkappa^2\eta^2$, wo $\eta = v_t/V$ gesetzt ist. Zuletzt werden Betrachtungen über die Dichte des Aethers angestellt. Lp.

V. Wellmann. Ueber den Einfluss des widerstehenden Mittels auf die Planetenbahnen. Astron. Nachr. **148**, No. 3547, 297-300 (1899).

Die unter Zugrundelegung der im vorangehenden Referate besprochenen Annahmen gemachten Rechnungen ergeben, dass der Einfluss des widerstehenden Mittels die Planetenbahnen der Kreisform nähert. Wird V gleich der Lichtgeschwindigkeit gesetzt, so findet der Verf. für die mit der Geschwindigkeit $v = 1$ sich bewegende Körperpartikel die Kraft $K = 3\varepsilon = 3/V = 0{,}017172$, während die Gauss'sche Gravitationsconstante $\varkappa = 0{,}017202$ ist. „Der Differenz $K - \varkappa$ würde eine Ungenauigkeit in der Sonnenparallaxe von 0,015″ entsprechen. Da eine zufällige Uebereinstimmung obiger Zahlen für K und $\varkappa$ selbstverständlich ausgeschlossen ist, so dürfte unsere Gravitationstheorie und der ursächliche Zusammenhang von Licht und Gravitation als erwiesen gelten. Es folgt ferner, dass sich die Sonnenparallaxe unabhängig von astronomischen Beobachtungen bestimmen lässt." Lp.

E. O. Lovett. The theory of perturbations and Lie's theory of contact transformations. Quart. J. **30**, 47-149; auch Diss. Leipzig.

Der Verf. hat viel Fleiss darauf verwendet, die Litteratur über die Störungstheorie zusammenzutragen, soweit sie zu Lie's Theorie der Berührungstransformationen in Beziehung steht. Leider ist aber seine Arbeit nur eine Anhäufung, keine wirkliche Verarbeitung des Materials. Er bespricht nach einander die Störungstheorien von Lagrange und Poisson, Hamilton und Jacobi, aber in einer solchen Weise, dass, wer diese Theorien noch nicht kennt, sie in der Darstellung des Verfs. schwerlich verstehen kann. Dann folgen längere, nichts Neues enthaltende Auseinandersetzungen über die Theorie der Berührungstransformationen. Hierauf bespricht Verf. Schering's Untersuchungen über die Hamilton-Jacobi'sche Theorie, wieder bloss referirend, ohne den Versuch zu machen, Schering's schwerfällige Darstellung zu vereinfachen und klar auseinanderzusetzen, was Schering eigentlich geleistet hat. Den Schluss der Arbeit bildet eine Wiedergabe des Inhalts der Lie'schen Arbeit: „Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen". (Archiv for Math. **2**; F. d. M. **9**, 259, 1877), aber auch hier begnügt sich der Verf. im wesentlichen mit einer Uebersetzung, ohne etwas Eigenes hinzuzufügen. El.

L. Picart. Sur l'équation de Gyldén-Lindstedt généralisée. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 145-147.

Nachtrag zu dem Artikel, über welchen auf S. 287 dieses Bandes berichtet ist, nebst Anwendung auf einzelne Fälle. Lp.

G. H. Darwin. Periodic orbits. (With a plate of figures.) Math. Ann. **51**, 523-583.

Die Abhandlung ist die verkürzte Wiedergabe der vom Verf. in Acta Math. **21** veröffentlichten (vergl. F. d. M. **28**, 851, 1897); da jedoch noch immer die Reihe der gezeichneten Curven nicht vollständig ist, so

hofft der Verf., mit Hülfe seines Freundes Hough, der ihn auf eine Lücke hingewiesen hat, dem Mangel demnächst abzuhelfen. In den vorhandenen Theorien für die Bewegung des Mondes und der Planeten hat man zur Darstellung der Bewegung des gestörten Körpers auf eine Normalcurve oder intermediäre Bahn zurückgegriffen, deren Eigenschaften völlig bekannt sind. Der Grad des durch irgend eine dieser Methoden erreichten Erfolges hing immer von der passenden Wahl der intermediären Bahn für den gewollten Zweck ab. Die Arbeiten von G. W. Hill über die Mondtheorie bezeichnen einen Wendepunkt in der Geschichte des Gegenstandes (American J. **1**; F. d. M. **10**, 782, 1878, und Acta Math. **8**, Abdruck einer Arbeit aus 1877; F. d. M. **18**, 1106, 1886). Indem dieser Autor die „variationale Curve" für die Ellipse als intermediäre Bahn einsetzte, hat er den Weg zu neuen Entdeckungsfeldern gewiesen. Die variationale Curve kann als die durch die Sonnenanziehung umgeformte Kreisbahn des Mondes beschrieben werden. Sie bildet eine Lösung aus der Klasse der periodischen Lösungen des Dreikörperproblems, von welcher die gegenwärtige Schrift handelt. Die in ihr betrachteten periodischen Bahnen sind solche von dem einfachsten Charakter; sie entstehen nämlich, wenn der gestörte Körper eine unendlich kleine Masse hat, während die beiden anderen Körper sich in Kreisen um einander bewegen und die Bahnen in einer und derselben Ebene liegen. Hierbei reducirt sich die von Poincaré angegebene vierfach unendliche Schar periodischer Lösungen auf eine einfach unendliche Schar, weil von den in Betracht kommenden Constanten nur diejenige der relativen Bewegungsenergie des infinitesimalen Körpers als einzige willkürliche Grösse übrig bleibt. Das Interesse an der mit ungemein grossem Aufwand von Arbeit durchgeführten Untersuchung liegt, wie bei andern ähnlichen Abhandlungen (z. B. Burrau, F. d. M. **25**, 1872, 1893/94), in der Veranschaulichung einer vollständigen Schar von Bahnen an einem Beispiele des Dreikörperproblems. Man vergleiche die Anzeige der Abhandlung aus Acta Math. in Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 21-33 von Burrau.

Lp.

W. Scheibner. Ueber Hansen's Verfahren zur Berechnung der speciellen Störungen. Leipz. Ber. **50**, 1898, 31-59.

Die Abhandlung schliesst sich an die vorjährige des Verfs. über „die gestörte elliptische Bewegung und Hansen's ideale Coordinaten" an (F. d. M. **28**, 847, 1897) und giebt nach vorbereitenden Formeln zur Transformation in die Hansen'sche Darstellung Vorschriften für mechanische Quadraturen nach den Interpolationsformeln Newton's, Maclaurin's und anderer Mathematiker späterer Zeiten, nebst einem Rechnungsbeispiel. „Der Nutzen der Hansen'schen Störungsformeln gegenüber den sonst üblichen besteht wesentlich darin, dass die Störungen seiner Coordinaten leichter zu berechnen, von geringerem Betrage und von grösserer Convergenz sind, ein Vorteil, der namentlich bei der Berechnung der Glieder höherer Ordnung ins Gewicht fällt." Dz.

H. Ludendorff. Ueber eine bemerkenswerte Eigenschaft gewisser Gleichungen in der Theorie der charakteristischen Planeten. Gött. Nachr. 1898, 345-348.

Es wird gezeigt, dass gewisse Coefficienten in der Entwickelung der charakteristischen Glieder in erster Annäherung einander gleich sind.

Dz.

H. Poincaré. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. C. R. **126**, 370-373.

Die Note schliesst sich an frühere Untersuchungen des Verfassers an und bezieht sich hauptsächlich auf die Darstellung der Coefficienten der Entwickelung durch Doppelintegrale und deren angenäherte Auswertung, die durch analytische Untersuchung der Eigenschaften einer von Féraud aufgestellten Function bewirkt wird. Es handelt sich dabei um die singulären Punkte, welche je nach der Lage zu den Grenzen der Integrale in Betracht kommen, oder nicht. Dz.

A. Féraud. Sur le développement de la fonction perturbatrice. C. R. **126**, 1402-1404.

A. Féraud. Sur le nombre des coefficients distincts du développement de la fonction perturbatrice. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 143-144.

Poincaré hat gezeigt (vergl. F. d. M. **28**, 847-849, 1897), dass die Coefficienten der Entwickelung der Störungsfunction nach den excentrischen Anomalien durch eine bestimmte Anzahl von ihnen linear ausdrückbar sind. Es wird diese Anzahl hier im allgemeinen Falle und auch in besonderen Fällen, wenn der Ausdruck $F(x, y)$ für die Entfernung gewisse Symmetrien besitzt, tabellarisch zusammengestellt.

Dz.

A. Féraud. Sur les formes et les symétries du carré de la distance de deux astres. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 137-140.

Der kurze Aufsatz giebt die Resultate einer grösseren Untersuchung des Verfs. über die Function $F(x, y)$ wieder (vergl. das vorangehende Referat); nach einer Erläuterung des eingeschlagenen Verfahrens werden die Einzelergebnisse auf einer vollen Seite tabellarisch zusammengestellt.

Lp.

O. Callandreau. Tables numériques pour faciliter le développement, par interpolation, de la fonction perturbatrice. C. R. **127**, 6-9.

Es handelt sich vornehmlich um die Berechnung der Laplace'schen Coefficienten und anderer mit ihnen in Verbindung stehenden Ausdrücke.

Dz.

O. Callandreau. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. C. R. **127,** 211-212.

Man vergleiche das voranstehende Referat. Die Untersuchungen werden im Band 23 der „Annales de l'observatoire" ausführlich veröffentlicht werden. Dz.

J. Perchot et W. Ebert. Sur l'intégration du problème restreint des trois corps avec la première puissance de la masse troublante. C. R. **127,** 504-507.

Es wird der so vielfach erörterte Fall betrachtet, dass zwei Körper (Sonne und Jupiter) im Kreise um einander laufen und der dritte von verschwindend kleiner Masse in ihrer Ebene sich bewegt. Nach Einführung des sich drehenden Coordinatensystems werden die Differentialgleichungen in die kanonische Form gebracht; worauf das Problem auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zurückkommt. Diese wird nun bei Vernachlässigung der höheren Potenzen der Jupitermasse integrirt. Dz.

K. Schwarzschild. Ueber eine Klasse periodischer Lösungen des Dreikörperproblems. Astron. Nachr. **147,** No. 3506, 17-24.

Gesetzt wird ein Hauptkörper (Sonne), ein störender Planet und ein Planetoid von verschwindend kleiner Masse. Sonne und Planet sollen im Kreise um einander laufen und der Planetoid zu Anfang eine solche Stellung und Geschwindigkeit haben, dass er ohne den störenden Planeten um die Sonne in derselben Ebene eine Ellipse beschreiben würde, deren Umlaufszeit zur Umlaufszeit der Planetenbahn im commensurablen Verhältnis steht. Dann wird unter Benutzung der „Méthodes nouvelles" von Poincaré gezeigt, dass man bei hinreichend kleiner Planetenmasse durch Variiren der Elemente des Planetoiden, von hier ausgehend, eine periodische Lösung finden kann, so dass nach Ablauf einer bestimmten Zeit das ganze System um einen unveränderlichen Winkel gedreht ist. Dz.

K. Schwarzschild. Ueber weitere Klassen periodischer Lösungen des Dreikörperproblems. Astron. Nachr. **147,** No. 3522, 289-298.

Dieselben Voraussetzungen, wie in der vorstehend besprochenen Abhandlung, nur dass die Bahn des Planeten auch elliptisch ist. In diesem Falle werden periodische Lösungen durch geeignete Spaltung der Störungsfunction erwiesen, wobei die Excentricitäten als von der Ordnung der vierten Wurzel der störenden Masse angesetzt werden. Als Beispiel wird die Mondbahn angezogen, welche durch geringe Aenderung der Elemente in eine periodische Bahn von 168-jähriger Periode umgewandelt werden könnte. Dz.

O. Stone. Direct derivation of the ordinary canonical system of elliptic elements employed in the problem of three bodies. Annals of Math. **12,** 57-59.

Enthält eine einfache Ableitung der von Delaunay und Jacobi gebrauchten kanonischen Veränderlichen im Störungsproblem: q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3. Es sind hier q_1 die mittlere Anomalie, q_2 der Abstand zwischen Perihel und Knoten, q_3 die Länge des Knotens, $p_1 = \sqrt{\mu a}$, $p_2 = \sqrt{\mu a} \cdot \sqrt{1-e^2}$, $p_3 = p_2 \cdot \cos i$. Dz.

M. Brendel. Theorie der kleinen Planeten. Erster Teil. Gött. Abh. (2) **1,** 1898, 171 S.

Ueber diese der Redaction nicht zugegangene Arbeit berichten wir nach dem Referate von S. Oppenheim in Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **34,** 14-39 (1899). Unter den Problemen, welche die Akademie der Wissenschaften in Paris zur Bewerbung für die von ihr zu verteilenden Preise für das Jahr 1894 gestellt hatte, befand sich auch das folgende: „Perfectionner les méthodes de calcul des perturbations des petites planètes en se bornant à représenter leur position, à quelques minutes d'arc près, dans un intervalle de cinquante ans; construire d'ensuite des tables numériques permettant de déterminer rapidement les parties principales des perturbations.“ In den neuen von Gyldén zur Berechnung der Bewegung der Planeten aufgestellten Methoden, welche in den letzten zwei Decennien eine lebhafte Bewegung in der theoretischen Astronomie hervorgerufen haben, sind Anhaltspunkte genug dazu gegeben, dass eine Lösung dieses Problems ebenso möglich, wie auch mit den gegenwärtigen Mitteln der Analysis erreichbar ist. In der That wurde auch eine sich ganz auf die Gyldén'schen Rechnungsmethoden stützende Abhandlung von Brendel mit einem Preise, und zwar dem Prix Damoiseau, gekrönt, und es ist das Verdienst des Verfassers derselben, dieser eigenartigen und geistreichen Theorie so auch zu einem äusseren Erfolge verholfen zu haben.

Die gegenwärtige Abhandlung ist im wesentlichen nichts anderes als eine weitere Ausführung der eigentlichen, von der Akademie gekrönten, nur etwas kürzer gehaltenen Arbeit. In ihr stellt sich Verf. das Ziel, „die Coordinaten der Planeten so weit genähert zu berechnen, dass man sie ohne Schwierigkeit nach einem gewissen Zeitraume am Himmel wieder auffinden und die neuen Planeten von den bereits bekannten leicht unterscheiden kann,“ und dieses Ziel soll erreicht werden durch eine Darstellung der Coordinaten, die während eines Zeitraums von 100 Jahren sich nur innerhalb einer Bogenminute als äusserster Fehlergrenze bewegen darf.

Der zunächst vorliegende erste Teil enthält die Auseinandersetzung der Methode. Dabei beschränkt sich jedoch Verf. nicht etwa schon von vorn herein auf die mit Rücksicht auf dieses engere Ziel vereinfachten Entwickelungsformeln und Reihen, sondern er giebt dieselben in weit grösserer Allgemeinheit an, als es, streng genommen, zu diesem speciellen Zwecke notwendig wäre. Es schwebt ihm nämlich nicht bloss die

Lösung dieser mehr praktischen Aufgabe vor Augen, sondern auch der Gedanke, dass man seine Formeln und Entwickelungen ebenso bei Aufgaben allgemeinerer Natur werde verwerten können, deren Lösung die Astronomie von einer systematischen Behandlung der kleinen Planeten oder mindestens einiger unter ihnen erwartet. Der folgende zweite Teil soll die numerische Anwendung, d. h. die für jeden einzelnen Planeten berechneten Tafeln enthalten. Dass diese Tafeln, deren Gültigkeit auf einen Zeitraum von 100 Jahren ausgedehnt werden kann, für jeden Planeten, wie Verf. versichert, den Raum von zwei Quartseiten nicht übersteigen werden, zeigt, wie die nach dieser Methode auszuführenden Rechnungen erheblich kürzer sind als die nach den älteren Methoden.

Die entwickelten Reihen schreiten nach Potenzen von Grössen fort, welche mit den Excentricitäten und Neigungen der Kepler'schen Ellipsen vergleichbar sind und Excentricitäts- und Neigungsmoduln genannt werden, während die Coefficienten nur von den mittleren Bewegungen abhängen und daher mit diesen als Argument tabulirt werden können. Offenbar werden sie daher nicht für alle Planeten in gleicher Weise gültig sein; sondern ihre Gültigkeit ist von den erwähnten Moduln, hauptsächlich aber nach durchgeführtem Integrationsprocess von dem Verhältnis der mittleren Bewegungen der Planeten zu der des störenden Körpers abhängig, je nachdem sich dieses mehr oder weniger einer strengen Commensurabilität nähert. Planeten, für welche Excentricität und Neigung ziemlich klein sind, und für welche ein Commensurabilitätsverhältnis nicht besteht, nennt Verf. gewöhnliche Planeten; für diese gelten seine Entwickelungen unbedingt. Planeten dagegen, deren mittlere Bewegung nahe commensurabel ist zu der des störenden Körpers, werden charakteristische oder gar kritische genannt, je nach dem Grade der Commensurabilität. Für diese gelten die Entwickelungen nicht ohne weiteres, und Verf. meint, es würde sich mehr empfehlen, sie einzeln zu berechnen, d. h. sie zum Gegenstand von Specialforschungen zu machen. Allen weiteren Untersuchungen über die Convergenz oder Divergenz der angewandten Reihen geht Verf. aus leicht begreiflichen Gründen aus dem Wege. Er bezeichnet selbst seine Formeln als solche, welche die Bewegung der Planeten als eine beschränkt stabile charakterisiren, und hierin liegt ein Hauptunterschied zwischen seinem Verfahren und dem Gyldén'schen, dessen Hauptziel darin besteht, eine für einen unbegrenzten Zeitraum gültige Darstellung der Coordinaten der Planeten zu erlangen, ein Unterschied, der jedoch in dem erwähnten speciellen Programm der ganzen Abhandlung eine genügende Erklärung findet.

Auf eine genauere Darstellung des Ganges der Untersuchung müssen wir hier verzichten; wir verweisen in dieser Hinsicht auf das sehr eingehende Referat von S. Oppenheim. Lp.

O. Backlund. Formeln zur Berechnung angenäherter Bahnen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus nebst ihrer Anwendung auf den Planeten (184) Dejopeja. Astron. Nachr. **145**, No. 3472, 241-248.

Die Formeln beruhen auf der Gyldén'schen Theorie. Ihre Ableitung soll in einer demnächst erscheinenden Abhandlung erfolgen (vergl. den nachfolgenden Titel). Dz.

O. Backlund. Ueber die Bewegung kleiner Planeten des Hecuba-Typus. St. Pétersbourg. Leipzig: Voss' Sortim. in Comm. 54 S. gr. 4°. (Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg (8) **6**, No. 10).

A. Caraffa. Sopra alcune questioni astronomiche. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **12**, 205-247.

Die abgehandelten Fragen sind: 1. Ueber die Krümmung der Erdoberfläche. 2. Die Theorie der Erde (Ableitung der Form ihrer Bahn aus dem Lauf der Sonne und Messung ihres scheinbaren Durchmessers). 3. Die Theorie eines Planeten (Ableitung der Bahnelemente aus geocentrischen Beobachtungen). Dz.

V. Wellmann. Ueber die Störung der Apsidenbewegung des Mercur. Astron. Nachr. **146**, No. 3481. 6-8.

Handelt von der Möglichkeit, die bisher noch unbekannte Ursache der zu grossen Apsidenbewegung des Mercur in einer elektrischen Repulsivkraft der Sonne zu suchen. Dz.

Aug. Weiler. Ueber die säculare Perihelbewegung des Mercur. Astron. Nachr. **145**, No. 3475, 301-304.

Bezieht sich hauptsächlich auf Säcularstörungen zweiter Ordnung. Dz.

E. Anceaux. Sur les quatre grosses planètes. C. R. **126**, 199-200.

„Die Massen Jupiters und Saturns sind umgekehrt proportional den Quadraten der grossen Axen ihrer Bahnen." Dieses und einige ähnliche „empirisch" gefundene Ergebnisse nebst Andeutungen über den Zusammenhang mit der Laplace'schen Hypothese sind der Inhalt der Note. Dz.

E. Roger. Sur les masses des planètes. C. R. **126**, 501-503.

Knüpft an die Note von Anceaux (vergl. das vorangehende Referat) und bezieht sich auf die vom Verf. in seinen „Recherches sur le système du monde" aufgestellte Theorie der Massen der Planeten, welche für letztere die Formel:

$$M = x \cdot c^m + y \cdot c^{\frac{1}{2}m}$$

giebt, wo m eine dem Planeten beigelegte ganze Zahl, $c = 2{,}718\cdots$ und x und y Coefficienten sind. Dz.

E. MILLOSEVICH. Il pianeta D. Q 1898. (433). Rom. Acc. L. Rend. (5) 7_2, 227-234.

Enthält die vom Verf. neu berechneten Bahnelemente des Planeten, der mit dem von G. Witt auf der Urania entdeckten identisch ist und wegen seiner Sonderstellung gegenüber den anderen Asteroiden bekannt geworden ist. Es folgt eine Discussion über die nächsten zur Parallaxenbestimmung günstigen Oppositionen, die 1900, 1917, 1924 (besonders geeignet) stattfinden werden. Dz.

R. A. FESSENDEN. The movement of Encke's comet. Nature 58, 520.

Entgegen der Behauptung Poincaré's in seiner Abhandlung über die Stabilität des Sonnensystems verweist der Verf. auf seine im Astrophysical Journal (1896) veröffentlichte Theorie, durch welche die Annahme eines widerstehenden Mittels zur Erklärung der Bewegung des Encke'schen Kometen als unnötig erwiesen sei. Lp.

J. MASCART. Relations de commensurabilité entre les moyens mouvements des satellites de Saturne. C. R. **126**, 1260-1262.

Nach einer eleganten, von Lejeune-Dirichlet angegebenen Methode werden solche Relationen systematisch gesucht und eine ganze Anzahl gefunden. Welche von ihnen nur angenähert sind, und welche, wie die bekannte Relation der mittleren Bewegungen der drei ersten Jupitermonde von Laplace, durch die Störungen zu genauen gemacht werden, bedarf einer weiteren Untersuchung. Dz.

A. W. KRASSNOW. Zur Theorie der intermediären Bahn des Mondes. Astron. Nachr. **146**, No. 3481, 7-10.

Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung wird unter vereinfachenden Annahmen durch elliptische Integrale aufgelöst. Dz.

A. W. KRASSNOW. Weitere Mitteilung betreffend die Theorie der intermediären Bahnen des Mondes. Astron. Nachr. **146**, No. 3499, 337-340.

Schluss zu der vorstehend besprochenen Abhandlung. Dz.

S. WILKS. The Moon's course. Nature **58**, 496.

J. H. HEMMING. The Moon's course. Nature **58**, 545-546.

E. L. GARBETS. The Moon's course. Nature **58**, 571.

Die erste Note bespricht eine mechanische Art, die Mondbahn zu beschreiben, vom Standpunkte eines Nichtastronomen; die zweite verweist auf James Ferguson, der 1743 ein Instrument zur Aufzeichnung der Mondbahn erdacht hatte und dasselbe auf Veranlassung des Präsi-

denten Martin Folkes vor der Royal Society erklärte, deren Mitglied er später wurde. Der letzte Autor macht endlich darauf aufmerksam, dass die Bahn des Erdmondes darin einzig unter den Bahnen der Monde der anderen Planeten dastehe, dass sie überall der Sonne die concave Seite zukehrt. Lp.

D. Eginitis. Sur l'agrandissement des disques du Soleil et de la Lune à l'horizon. C. R. **126**, 1326-1329.

Es werden auf Grund jahrelang fortgesetzter Beobachtungen über die scheinbare Vergrösserung von Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes die gewöhnlich gegebenen Erklärungen von Cartesius, Alhazen und Gassendi verworfen oder doch so eingeschränkt, dass sie nur einen geringen Teil erklären. Eine andere Erklärung aber, die den vom Verf. geltend gemachten Bedenken nicht unterliegt, vermag er zur Zeit nicht anzugeben. Dz.

Th. Albrecht. Bahn des Norpoles der Erdaxe in der Zeit 1890,0—1897,5. Astron. Nachr. **146**, No. 3489, 129-136.

Enthält die Beobachtungen, ihre Ausgleichung und eine graphische Darstellung der Bahn. Dz.

L. Picart. De la rotation de la terre supposée fluide à son intérieur. Bordeaux Procès-verbaux 1897/98, 128-131.

Unter Bezugnahme auf die hierher gehörigen Arbeiten von Hough (F. d. M. **26**, 889, 1895) und Sludsky (F. d. M. **27**, 810, 1896) geht Verf. auf eine kurze Erörterung der Frage ein und kommt zu dem Schlusse: „Die Beobachtungen der Breiteschwankungen widersprechen der Annahme der Existenz eines flüssigen Kernes von schwacher Excentricität, wenn man zugleich die Rinde als absolut starr voraussetzt.“ Lp.

Ch. André. Utilisation de la vitesse radiale pour la détermination des dimensions absolues des systèmes binaires. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26**, 202-205.

Da die Beobachtung der radialen Geschwindigkeiten der Doppelsternsysteme sehr wichtig ist, so hat Verf. die für diese Bestimmungen günstigsten Epochen für jedes Doppelsternsystem berechnet, dessen Bahn man gegenwärtig kennt. Die Methoden, die dabei benutzt sind, und die erhaltenen Zahlen werden angegeben. Lp.

J. C. Kapteyn. Die mittlere Geschwindigkeit der Sterne, die Quantität der Sonnenbewegung und die mittlere Parallaxe der Sterne von verschiedener Grösse. Astron. Nachr. **146**, No. 3487-88, 97-114.

1. Die mittlere Geschwindigkeit der Sterne, verglichen mit der Geschwindigkeit des Sonnensystems im Raume. 2. Die Geschwindigkeit

der Sonnenbewegung im Raume. 3. Die mittlere Parallaxe der Sterne von verschiedener Grösse. 4. Einfluss eines Fehlers in der angenommenen Präcessionsconstante. Dz.

H. G. van de Sande-Bakhuyzen. Opmerkingen over de verdeeling der sterren in de ruimte. Amst. Versl. **6,** 394-404.

H. G. van de Sande-Bakhuyzen. Ueber die Verteilung der Sterne im Raume nach der Grösse der Eigenbewegung. Astron. Nachr. **146,** No. 3494, 209-220.

Entwickelung von Formeln auf Grund von einfachen Voraussetzungen über Geschwindigkeit und Dichtigkeit der Sterne. Dz.

H. Wernecke. Vom Kalender. Pr. (No. 716) Realgymn. Weimar. 19 S. 4°.

Die Elemente der sphärischen Trigonometrie werden angewendet auf die Darstellung unserer Zeitrechnung. Nachdem auf den ersten 15 Seiten die astronomischen Grundbegriffe (Coordinaten, Zeitabschnitte, Mondlauf) erläutert sind, handeln nur die 4 letzten Seiten vom Kalender, und zwar von dem durch den Sonnencykel bedingten Schaltverfahren und der von dem Mondcykel abhängigen Osterrechnung. Es ist klar, dass bei dieser Beschränkung schwierigere chronologische Probleme, wie z. B. die Gauss'sche Osterformel, nicht mit der Gründlichkeit erörtert werden können, wie dies in den Arbeiten von Goldscheider (Pr. Berlin; F. d. M. **27,** 805, 1896) geschehen ist. Lg.

A. Auric. Sur la formation des calendriers. Assoc. Franç. St. Étienne (1897) **26,** 169-174.

Kurze Uebersicht über die Gedanken, die den gebräuchlichen Kalendern zugrunde liegen, und Vorschlag zu einem mit dem Wintersolstitium beginnenden Jahre, bei welchem die Monate jedes Vierteljahrs der Reihe nach mit Sonntag, Dienstag, Freitag beginnen und folgeweise 30, 31, 30, 30, 31 und 30 (31) Tage in jedem Halbjahre haben.

Lp.

Weitere Litteratur.

O. Backlund. Zur Frage von der Libration in den Bewegungen der Saturnsatelliten. St. Pétersb. Bull. (5) **8,** 313-324.

A. Beazeley. Tables on tangential angles and multiples; or setting out curves. Sixth edition, revised. 50 cards in case. London: Lockwood.

E. Becker. Tafeln zur Berechnung der Präcession. Karlsruhe: G. Braun. IV + 91 S. 4°. [Aus „Annalen der kaiserl. Universitäts-Sternwarte in Strassburg“ 2. Bd.]

E. C. Boccardo e V. Baggi. Trattato elementare completo di geometria practica. Parte II (topografia). Torino.

C. Börgen. Ueber die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hülfe der Tabelle der Meridionalteile (der Mercator'schen Function). Hamburg: L. Friedrichsen & Co. 51 S. gr. 4° (aus Arch. d. deutschen Seewarte).

K. Bohlin. Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Upsala Nova Acta (3) **17**, 225 S.

A. M. Clerke, A. Fowler, J. E. Gore. Astronomy (Concise Knowledge Library). New York: Appleton. XIII + 581 S. 12mo.

F. Cohn. Ueber einige allgemeinere Ergebnisse einer Neureduction der ältesten Bessel'schen Meridianbeobachtungen. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33**, 291-308.

A. H. Fison. Recent advances in astronomy. London: Blackie & Son. VI + 237 S. [Nature **59**, 367.]

F. Folie. Fondements de la théorie de la variation des latitudes. Belg. Bull. (3) **36**, 276-281.

F. Folie. Vérification de l'existence de la nutation eulérienne dans les latitudes observées à Greenwich, pendant les années 1880-1891. Ibid. 392-398.

F. Folie. Sur les termes complémentaires de nutation provenant des actions mutuelles de l'écorce et du noyau du globe. Belg. Bull. (3) **35**, 26-28.

F. Folie. Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe. Fondements de l'astronomie sphérique au XX^e siècle. Ibid. 169-172; Belg. Mém. in 4° **53**, 39 S.

O. Fulst. Azimut-Tafel. Tafel zur Bestimmung des Azimuts aus Breite, Abweichung und Stundenwinkel. Bremen: M. Heinsius Nachf. 25 S. Lex.-8°.

J. Gill. Textbook on navigation and nautical astronomy. London. 388 S. 8°.

W. M. Gillespie. Treatise on surveying, edited by C. Staley. New edition. (In 2 parts.) Part 2: Higher surveying. New York: Appleton. 8°.

C. Grötsch. Störungstheorie und Berührungstransformationen. Diss. Leipzig. 48 S. 8°.

P. Gruner. Astronomische Vorträge. 6 gemeinverständliche Hochschulvorträge. Bern: Nydegger und Baumgart. 100 S. gr. 8°.

J. F. Hayford. A text-book of geodetic astronomy. New York: John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall. [Nature **58**, 543.]

N. Herz. Mechanik des Himmels. (Breslau, Handwörterbuch der Astronomie.) 180 S. gr. 8°.

A. Ivanoff. De l'influence des termes du troisième ordre de la fonction perturbatrice du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité sur les formules de la nutation. St. Pétersb. Bull. (5) **8**, 219-234.

W. McKnight Ritter. A new method of determining the general perturbations of the minor planets. Philadelphia Trans. **19,** 1-174.

R. v. Kövesligethy. Ueber die beiden Parametergleichungen der Spectralanalyse. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **33,** 309-314.

H. Kutscher. Geometrie, Feldmessen und Nivelliren. Zweite neubearbeitete Auflage. Berlin. 8°.

A. F. Möbius. Astronomie, Grösse, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. 9. Aufl. von W. F. Wislicenus. Leipzig: G. J. Göschen. 164 S. 12°. Mit 1 Sternkarte. [Sammlung Göschen, No. 11.]

W. H. Preuss. Sammlung von Formeln, Beispielen und Aufgaben aus der rechnenden Nautik und deren Hülfswissenschaften. 2. Aufl. Oldenburg: Schulze. VI + 136 S. 8°.

W. G. Raymund. A text-book of plane surveying. New York: American Book Company. 485 S. 8°.

G. Repetto. Sulle geodetiche del toro; moto di un punto non soggetto a forze. Sassari: Dossi. 74 S. 8°.

A. Roth. Lehrbuch der astronomischen Navigation. Im Auftrage des k. u. k. Reichskriegsministeriums, „Marine-Section", verfasst. Fiume. Wien: Gerold & Co. in Comm. X + 343 S. Lex.-8°. Mit 12 Taf. u. 1 Karte.

C. A. Schultz-Steinheil. Die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Alexandra. Lund. 82 S. 4°.

F. J. J. See. Results of recent researches on the evolution of the stellar systems. Philadelphia Trans. **19,** 221-235.

D. P. Todd. A new astronomy. New York, Cincinnati, Chicago: American Book Company. 480 S. [Nature **58,** 173.]

L. Volderauer. Zum Kepler'schen Problem. Pr. Wien. 83 S. 8°.

Ch. A. Young. A textbook of general astronomy. Revised edition. London: Ginn & Co. IX + 630 S. [Nature **59,** 315.]

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. Günther. Handbuch der Geophysik. 2. gänzl. umgearb. Aufl. II. Bd. Mit 230 Abbild. Stuttgart: Ferd. Enke. 1009 S. gr. 8° (1899).

Der zweite Band des Handbuchs der Geophysik von dem Professor an der Münchener technischen Hochschule Siegmund Günther ist gegen die erste Auflage noch ungleich mehr angeschwollen als der erste Band und entbehrt, damit das Buch durch seinen Umfang nicht unhandlich werde, eines sachlichen Index. Da die Anzahl der zur Besprechung

kommenden Probleme eine ungemein grosse ist und die Gegenstände, um die es sich handelt, ausserordentlich verschieden geartet sind, ist dieser Mangel zu bedauern. Der Mathematiker wird in diesem Bande weniger unmittelbar in sein Fach schlagende Dinge finden, als im ersten, obschon andererseits ohne mathematische Vorkenntnisse viele Gedankenentwicklungen und Beweisgänge nicht verständlich sind.

Der Band beginnt mit der Lehre von der Atmosphäre und behandelt in 11 Kapiteln ihre allgemeinen Eigenschaften, die Berechnungsmethoden, die meteorologische Optik, die atmosphärische Elektricität, die kosmische, dann die dynamische Meteorologie, die allgemeine Klimatologie, das Klima der Erdoberfläche und schliesslich seine Veränderungen, sowie Betrachtungen über die praktische und hygienische Meteorologie. Die folgende Abteilung beschäftigt sich in 6 Kapiteln mit der Oceanographie, und zwar zunächst mit den allgemeinen Eigenschaften der Meere und mit der Physiographie der Meeresbecken, dann mit der Temperatur, dem Salzgehalt, überhaupt der chemischen Zusammensetzung des Meerwassers, darauf mit den Wellenbewegungen und den Strömungen in den Meeren, zuletzt mit dem Seeeis. In der nächsten Abteilung geht die Betrachtung vom Meere zum Lande über; drei Kapitel sind den Küstenlinien und ihren Verschiebungen, den verschiedenen Typen der Küstenbildung, den Inseln gewidmet. Die letzte Abteilung, also die achte des Gesamtwerkes, hat es mit dem Festlande zu thun. Es wird hier aber auch das Süsswasser in den Binnenländern mitbehandelt, so dass in 5 Kapiteln zur Besprechung kommt: Aufbau und Zusammensetzung der Erdrinde, Morphographie und Morphometrie, Schnee und Eis, Hydrologie des Süsswassers, allgemeine Morphologie der Landoberfläche. In diesem letzten Kapitel tritt neben der Luft nochmals das Wasser und Eis auf als umgestaltende Naturkraft.

Das Handbuch der Geophysik hat einen besonderen Wert durch die grosse Menge von Litteraturangaben, in denen auch der Mathematiker viele brauchbare Hinweise finden wird auf Dinge, die ganz in sein Arbeitsfeld hineingehören. Bei der Zusammenstellung dieses umfänglichen Materials kam es dem Verf. auf möglichst lückenlose Vollständigkeit an, nicht auf eine Sonderung von Wertvollem und Entbehrlichem.

F. L.

E. Oekinghaus. Ueber die Zunahme der Dichtigkeit, Abplattung und Schwere im Innern der Erde auf Grundlage einer neuen Hypothese. Wien. Ber. **107**, 1059-1112.

Man bezeichne mit Θ die Dichte der Erde in einer ellipsoidischen Schicht vom Aequatorialdurchmesser $2a'$ und der Abplattung $\mathfrak{a}'=(a'-c')/a'$, mit Θ_c die Dichte im Erdcentrum, so setzt der Verf. hypothetisch

$$\Theta = \Theta\; e^{-k\left(\frac{a'}{a}\right)^3 (1-\mathfrak{a}')},$$

wo noch a den äusseren Aequatorhalbmesser und k eine Constante be-

deuten. Sind die inneren Schichten ähnlich, also $1-\mathfrak{a}' = c'/a' = 1/n$ constant, so ist

$$\Theta = \Theta_c \, e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{a'}{a}\right)^3},$$

und für die kugelförmige Erde endlich gilt $\Theta = \Theta_c \cdot e^{-kx^3}$. Diese letzte Annahme hat der Verf. u. a. in Hoppe Arch. (2) **13,** 55-64 (F. d. M. **25,** 1891, 1894) gemacht. Wie damals, so zieht er jetzt aus der angenommenen Hypothese rechnerisch möglichst viele Folgerungen, die mit den aus Messungen bekannten Zahlen gut übereinstimmen. Abgesehen von den Consequenzen jenes Gesetzes an sich und in Beziehung auf die bisher erhaltenen Beobachtungsresultate in tiefen Erdschachten, leitet er unter der ferneren Annahme, dass die Erdschichten einander ähnliche Rotationskörper constanter Abplattung sind, einen ersten Näherungswert der Abplattung ab, um dann zu dem Falle variabler Abplattung überzugehen, zu dem Zwecke, den Einfluss dieser Veränderlichkeit auf das Resultat festzustellen. Hierbei werden nur die Grössen erster Ordnung der Abplattung und der Centrifugalkraft berücksichtigt. Die Anwendungen der Hypothese auch auf die Atmosphäre und ihren Druck, auf die Trägheitsmomente des Erdkörpers und die Dichtigkeitsverhältnisse der Planeten, speciell des Jupiter, scheinen anzudeuten, dass das obige hypothetische Gesetz eine hinreichende Tragweite hat, um einiger Aufmerksamkeit wert zu sein.

Lp.

M. P. Rudzki. Ueber ein der optischen Dispersion analoges Phänomen. Krakauer Anz. 1898, 166-179.

Weil man bei Erdbebenstörungen eine um so längere Dauer beobachtet, je weiter der Beobachtungspunkt vom Herde entfernt ist, und weil ausserdem sehr oft, vielleicht immer, rasche Schwingungen den langsamen voraneilen, so nimmt der Verf. an, es bestehe zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungsdauer der Erdbebenwellen ein causaler Zusammenhang, die Erscheinung sei der optischen Dispersion ähnlich und könne als seismische oder elastische Dispersion bezeichnet werden. Der ganze Aufsatz dient zur Darlegung der Gedanken des Verfs. über diese Parallelisirung. Die Gleichungen der klassischen Elasticitätstheorie, ebenso die erweiterte Poincaré'sche Telegraphistengleichung erweisen sich als unzulänglich für eine analytische Darstellung der Verhältnisse, und es entstehen ausserordentliche Schwierigkeiten; „deswegen wird die Ausarbeitung einer mathematischen Theorie der seismischen Dispersion hinausgeschoben“. Dagegen fordert der Verf. zur Sammlung des Beobachtungsmaterials behufs Aufstellung eines empirischen Dispersionsgesetzes auf, um eine Richtschnur für die Ausbildung einer mathematischen Theorie zu gewinnen. Die hierbei in Betracht kommenden Gesichtspunkte werden des weiteren beleuchtet.

Lp.

L. Grabowski. Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung. Wien. Anz. 1898, 101; Wien. Ber. **107,** 507-514.

In der Abhandlung: „Zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen“ (Astr. Nachr. **126;** F. d. M. **23,** 1210, 1891) hatte Helmert die Bewegung des Rotationspoles für den Fall untersucht, dass die Bewegung des Trägheitspoles C gegeben ist als eine harmonische Bewegung in einer beliebigen Ellipse um den Mittelpunkt C_0 mit der Periode 1 Jahr. Die Bewegung des Rotationspols M ist dadurch definirt, dass derselbe in jedem Augenblick eine unendlich kleine kreisförmige Drehung um die momentane Lage des Punktes C mit der Winkelgeschwindigkeit λ ausführt. An die Gleichungen für die Bewegung von M knüpfte Helmert verschiedene Beispiele und gewisse Schlüsse über die sogenannte Multiplication, wobei für λ der aus der Euler'schen Theorie hergenommene Wert $\lambda = 2\pi/10$ Monate benutzt wurde. Da später durch die Chandler'sche Formel gezeigt und von Newcomb erklärt wurde, dass $\lambda = 2\pi/14$ Monate ist, so bedürfen jene Schlüsse einer Revision, und der Verf. teilt in dem ersten Teile seiner Arbeit einige derselben in der corrigirten Gestalt mit. Der zweite Teil behandelt auf derselben Grundlage eine Hypothese, welche Spitaler zur Erklärung der Polbewegung aufgestellt hat („Die Ursache der Breitenschwankungen“. Wien. Denkschr. **64;** F. d. M. **27,** 793, 1896); nach derselben wird nämlich in den Luftverlagerungen auf der Erdoberfläche die Ursache für die Polbewegung gefunden. Der Verf. dagegen kommt durch seine Ueberlegungen zu dem folgenden Ergebnis: Der Complex der von Spitaler angezeigten Luftverlagerungen ist der eine Hauptfactor der Polbewegung, neben welchem noch ein anderer, mit ihm vergleichbarer existiren muss. Dieser letztere ist in einem Process oder Processcomplex zu suchen, der in einer darauf annähernd senkrechten Richtung vor sich geht. Lp.

H. Crew. On latitude variation in a rigid Earth, as illustrated by Maxwell's dynamical top. Physical Review **6,** 153-163.

Der Aufsatz ist die Wiedergabe eines mit Demonstrationen begleiteten Vortrags, veranlasst durch die „bemerkenswert grosse und genaue Reihe von jüngst veröffentlichten Beobachtungen des Professors Davidson zur Frage der Breiteschwankung“, und steckt sich das Ziel, diese Erscheinung möglichst elementar zu erläutern. Wie der Verf. selbst erklärt, giebt er keine neuen Aufschlüsse, sondern er lenkt nur die Aufmerksamkeit „auf diesen schönen, aber sehr vernachlässigten Kreisel, den Maxwell zuerst in Edinburgh vor etwa vierzig Jahren herumwirbelte“. Die Theorie wird kurz entwickelt, so dass man bis zur Berechnung der Euler'schen Periode von 306 Tagen vordringt. Am Schlusse werden nützliche Bemerkungen über die Justirung des Kreisels gemacht und die anzustellenden Versuche kurz beschrieben, nämlich: 1. Präcession, 2. statische Stabilität, herbeigeführt durch die Rotation, 3. dynamische Instabilität, herbeigeführt durch Rotation, 4. Variation

der Breite, 5. Wirkung einer polaren Eiskappe, 6. parallele Behandlung der Dynamik der Translation und der Rotation. Lp.

V. DE ZIEGLER. Dynamisches Gleichgewicht zwischen dem Meere und dem Festlande. Belg. Bull. (3) **35,** 895-897.

Es wird herausgerechnet, dass das Gewicht des Wassers der Oceane gleich dem Gewichte der über den Meerespiegel herausragenden festen Masse der Continente ist, und daraus soll (unter Berufung auf Massenverteilungen bei Rotations-Versuchen mit bildsamen Körpern) ein dynamisches Gleichgewicht zwischen dem festen und dem flüssigen Teile der Erdoberfläche bewiesen sein; dieses Gleichgewicht müsse daher immer bestehen bleiben. Von der Gravitation der Molekeln gegen einander ist nicht die Rede. Lp.

M. LÉVY. Leçons sur la théorie des marées, professées au Collège de France. Première partie. Théories élémentaires. Formules pratiques de prévision des marées. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XII + 298 S. 4°.

Die Vorlesungen über die Theorie der Gezeiten, aus denen das Werk entstanden ist, sind 1893 bis 1894 am Collège de France gehalten worden. In dem gegenwärtigen ersten Teile hat Verf. die elementareren Gebiete vereinigt nebst allem, was den Ingenieuren, welche Beobachtungen von Gezeiten anzustellen oder zu verwerten haben, von Nutzen sein kann. Zu diesem Behufe stützt er sich im wesentlichen auf die statische Theorie der Gezeiten, welche ungemein einfache Theorie bei den Engländern seit Newton immer in Ehren gehalten und von Lord Kelvin so weit ausgebildet ist, dass sie der wirklichen Verteilung der Meere an der Oberfläche des Erdballes Rechnung trägt. Vermöge derselben kann man, ohne auf die überlegene, aber viel schwierigere Laplace'sche Theorie zurückgreifen zu müssen, die praktische Anwendung dieser Theorie darthun, nämlich in den Formeln zur Vorhersage der Gezeiten bei Laplace, deren man sich bis in die jüngsten Zeiten bedient hat und vielleicht noch immer bei der Abfassung des Annuaire des marées des côtes de France bedient.

Hierauf werden die neueren in England ausgeführten Arbeiten, vornehmlich die Darwin'schen besprochen, die sich auf die Reduction der Beobachtungen und die Vorhersage der Gezeiten beziehen. Zwar will Verf. ihren Wert in keiner Weise antasten und noch weniger ihre grosse Brauchbarkeit verkennen; er nimmt aber ihre wesentliche Grundlage, die harmonische (trigonometrische) Entwickelung der Seehöhe in einem Hafen nach den hauptsächlichsten Ungleichheiten des Mondes für Laplace in Anspruch, der dieses Verfahren zuerst in einer Note zum XII. Buche der Mécanique céleste angegeben hat. Hinsichtlich des Gesichtspunktes der Dynamik beschränkt sich Verf. in diesem ersten Teile darauf, von den Formeln der Hydraulik nach dem Vorbilde von

Airy Anwendung auf die Fortpflanzung der Gezeiten in Meerengen oder Kanälen zu machen, die nach Gross- und Kleinkreisen des Erdballs verlaufen oder mit Meeren von bekannten Gezeiten zusammenhängen, während sie selbst die Einwirkungen der Anziehung von Himmelskörpern erleiden.

Das Werk schliesst mit einer Studie (natürlich nach Massgabe der gegebenen Begrenzung) über die Fortpflanzung der Gezeiten in einem Flusse von ständiger oder auch langsam veränderlicher Breite. Dieses letztere Problem, das an sich viel schwieriger als das erste wäre, wenn man es genau anfasste, lässt sich einfach auf dasselbe zurückführen, wenn man sich mit einer Annäherung begnügt, die dem Grade der Genauigkeit der Daten entspricht, über welche man hierbei verfügt. Als Anhang zu der Theorie der Gezeiten in den Flüssen werden in einer für das Werk passenden Bearbeitung die Ergebnisse der Untersuchungen von Boussinesq über die Einzelwelle (onde solitaire) dargestellt. Ohne mit dem „mascaret" identisch zu sein, kommt ihm die Einzelwelle nahe und liefert teilweise eine Erklärung dieses grossartigen Schauspieles.

Der zweite Teil soll die dynamische Theorie der Gezeiten nach Laplace bringen, sowie die Theorie der Gezeiten der Erdrinde nach Lord Kelvin und Laplace. In die analogen Forschungen über das Luftmeer will Verf. sich nicht vorwagen. Tisserand hat die in dem vorliegenden Werke auseinandergesetzten Lehren seiner grossen Mécanique céleste nicht eingefügt. Somit kann die Arbeit des Verfs. als eine Ergänzung dieses grossen Vermächtnisses des zu früh der Wissenschaft entrissenen französischen Astronomen betrachtet werden, und es ist zu erwarten, dass die Aufforderung Lévy's zur energischen Aufnahme der bezüglichen Forschungen in Frankreich den gewünschten Erfolg haben wird. Jedenfalls regt das Buch zu eingehenden hydrodynamischen Untersuchungen an. Lp.

Hatt. Expression des coefficients de la marée au moyen d'une somme de termes périodiques. C. R. **126**, 1111-1116.

Der sogenannte Coefficient der Gezeiten oder der Ausdruck für den augenblicklichen Impuls zur Flutbildung ist umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von Sonne und Mond und direct proportional dem Quadrate des Cosinus ihrer Declination. Er wird nach dem Vorgang von Darwin der „harmonischen" Analyse unterworfen, worauf die numerischen Werte der Entwickelungscoefficienten discutirt werden. Dz.

G. H. Darwin. The tides and kindred phenomena in the solar system. (Tides and methods of observation. Tide generating force. Tide tables. Evolution of celestial systems. Saturn's rings. Etc.) London: John Murray. XVIII + 342 S.

Das Buch richtet sich nicht an mathematische Leser, obgleich wahrscheinlich diejenigen, welche mathematische Schulung besitzen, den

meisten Nutzen daraus ziehen werden. Es verbindet in ungewöhnlicher Weise Genauigkeit im Thatsächlichen mit Klarheit der Darstellung, und wenn es jener seltsamen Person des „allgemeinen Lesers“ nützlich ist, wird es dem Studirenden der Naturwissenschaften grosse Dienste leisten.

Gbs. (Lp.)

A. Nippoldt. Die mathematische und die meteorologische Auffassung der harmonischen Analyse. Hoffmann Z. **29,** 401-409.

„Was man vom Standpunkte des Meteorologen und Geophysikers unter harmonischer Analyse versteht, weicht ganz wesentlich ab von der rein formellen Betrachtungsweise“. Es sind folgende Bedingungen, die als meteorologische zu den mathematischen (für die Fourier'schen Reihen) hinzutreten: 1. Der zu untersuchende Vorgang muss ein periodischer sein, d. h. nach Ablauf des betrachteten Zeitintervalls sich wiederholen. 2. Die Zeitperiode muss einen ursächlichen Zusammenhang haben mit der Natur des Elementes. 3. Die Beobachtungen müssen sich über einen längeren Zeitraum erstrecken als den der untersuchten Periode. 4. Der Vorgang darf nicht aus discontinuirlichen Verläufen zusammengesetzt sein.

Lp.

A. Poincaré. Effets des attractions solaire et lunaire sur l'atmosphère de l'hémisphère nord à chacune des quatre phases. C. R. **126,** 1053-1055.

Es werden für jede der vier Phasen die Formeln für die auf die Atmosphäre der Erde von Sonne und Mond ausgeübten bewegenden Kräfte aufgestellt. Sie sind Functionen der geographischen Coordinaten des Erdortes und der Stellungen der beiden Gestirne und haben daher Anteil an den Perioden des Umlaufes und der Drehung. Ihnen entsprechen die „unmittelbaren oder instantanen Einwirkungen“, die sich zu einer beachtenswerten wellenförmigen Schwankung des Barometerstandes anhäufen, welche neben der täglichen und jährlichen Wärmewelle zu berücksichtigen ist.

Dz.

A. Poincaré. Variation aux quatre phases, de la pression et des deux composantes du vent moyen sur le méridien du Soleil et son orthogonal. C. R. **126,** 1171-1173.

Man vergleiche das vorangehende Referat. Verf. bezieht sich ferner auf von ihm hergestellte zahlreiche Diagramme, welche zeigen, dass die durch Anziehung von Sonne und Mond bewirkten Bewegungen der Atmosphäre viel grösser sind, als man zunächst nach der Kleinheit der augenblicklichen Impulse erwarten sollte.

Dz.

A. Poincaré. Effets des attractions solaire et lunaire sur l'atmosphère. Exemple de l'application des formules. C. R. **126,** 1269-1272.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in den beiden vorangehenden Referaten berichtet ist. Dz.

A. Poincaré. Variations commandées par la Lune dans la pression et les composantes horizontales du vent. Esquisse de discussion des formules. Générations des dépressions. C. R. **126,** 1449-1451.

Discussionen auf Grund der in den drei vorangehenden Noten aufgestellten Formeln. Dz.

P. Garrigou-Lagrange. De l'influence des mouvements de la Lune sur les oscillations de l'atmosphère. C. R. **126,** 1173-1176.

Enthält einen Bericht über sehr eingehende Discussionen von meteorologischen Beobachtungen zu Upsala, Paris, Perpignan und Pic-du-Midi über Barometerschwankungen und Winde, um namentlich die Art des Einflusses der Mondbewegung zu constatiren. Verf. spricht die Ueberzeugung aus, dass er diesen Einfluss durch die harmonische Analyse thatsächlich constatirt habe. Dz.

J. Hann. Weitere Beiträge zu den Grundlagen für eine Theorie der täglichen Oscillation des Barometers. Wien. Ber. **107,** 68-159.

Einige Reihen stündlicher Aufzeichnungen des Luftdruckes an Bord österreichischer Kriegsschiffe auf hoher See haben hauptsächlich diese rein empirischen Untersuchungen des Verfs. über die tägliche Oscillation des Barometers veranlasst. Sie beruhen auf der Darstellung der täglichen Barometerschwankung durch die harmonische Reihe

$$a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x) + a_3 \sin(A_3 + 3x),$$

wo a_1, a_2, a_3 die Amplituden, die Winkelconstanten A_1, A_2, A_3 die Repräsentanten der Phasenzeiten der ganztägigen, halbtägigen und dritteltägigen Barometer-Oscillation und x die Zeit, von Mitternacht an gezählt, bedeuten. Nach des Verfs. Untersuchungen lässt sich die tägliche Barometerschwankung, trotz ihrer Vielgestaltigkeit durch Zerlegung derselben in ihre harmonischen Constituenten stets in einen rein gesetzmässigen Teil, die halbtägige Oscillation, die bis über die mittleren Breiten hinauf auch ihren Hauptbestandteil bildet, und in diesem Teil aufgesetzte Druckschwankungen von anderen Perioden, von denen die ganztägige Periode weitaus die Hauptrolle spielt, zerlegen. Bö.

J. Hann. Weitere Beiträge zu den Grundlagen für eine Theorie der täglichen Oscillation des Barometers. Meteor. Zeitschr. **15,** 361-387.

Der erste Teil der Abhandlung enthält allgemeine Erörterungen über die Ursachen der täglichen Barometerschwankung, referirt über die wichtigsten neueren Ansichten, besonders die von Lord Kelvin ausgesprochenen Anschauungen, und sucht die Ursache für die doppelte

tägliche Periode in der Erwärmung der Luft in ihren höheren Schichten. Nach diesem theoretischen Teile werden im zweiten Abschnitte die Beobachtungsergebnisse behandelt und in der Form $a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x)$ dargestellt. Lp.

M. Möller. Die Grössenordnung des verticalen Teiles der Fliehkraft bewegter Luft. Meteor. Zeitschr. **15,** 109-111.

Verf. bekennt, die Grössenordnung des verticalen Teiles der Fliehkraft bewegter Luft früher überschätzt zu haben; dass auch seine jetzige Rechnung den Betrag noch viel zu hoch ansetzt, ist durch Sprung in den Fortschritten der Physik (**54**$_3$, 341, 1898) nachgewiesen worden. Lp.

F. Siacci. Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni aerostatiche di James Glaisher, e sopra una nuova formula barometrica par la misura delle altezze. Napoli Atti (2) **8,** Nr. 11, 40 S.

In Meteor. Zeitschr. **15,** 46-55 giebt H. Hartl ein ausführliches Referat über diese der Redaction nicht zugängliche Abhandlung. Hiernach hat Siacci Formeln aufgestellt, welche die von J. Glaisher veröffentlichten Zahlreihen aller von ihm beobachteten meteorologischen Elemente mit der grössten Genauigkeit darstellen, und hat damit die älteren Formeln von Saint-Robert, die vieles zu wünschen übrig liessen (1864 und 1874), in jeder Beziehung überholt. Lp.

G. B. Rizzo. Sopra le recenti misure della „costante solare“. Torino Mem. (2) **48,** 319-357.

Eine ausführliche Discussion der verschiedenen gebräuchlichen Formeln für die Wärmemenge, welche auf eine gegebene Fläche fällt, die zur Sonne senkrecht gestellt ist, und welche eine Function der Höhe der Sonne oder ihrer Zenithdistanz und auch der Erhebung über dem Meeresspiegel ist. Die Unkenntnis des wahren Gesetzes für die Absorption der Wärme erklärt die grosse Verschiedenheit der Werte für die „Sonnenconstante“, d. h. die Anzahl der kleinen Calorien, welche auf ein Quadratcentimeter Fläche in der Minute, von der Absorption abgesehen, fallen. Sie schwankt zwischen 2 bis 4. Dz.

W. Köppen. Ueber Zufluss und Abfluss der Luft in Cyklonen und Anticyklonen. Meteor. Zeitschr. **15,** 161-168.

Die Grundgedanken können wir mit den eigenen Worten des Verfs. wiedergeben: „Die von Hann vor sieben Jahren nachgewiesenen Thatsachen über die Verteilung der Temperatur in Cyklonen und Anticyklonen haben die frühere Verallgemeinerung des Cyklonenschemas mit warmem Centrum zerstört, zur Ueberraschung der Meteorologen. Hann selbst

hat daraus geschlossen, dass die Temperaturverteilung bei unsern Cyklonen Nebensache sei und die Ursachen der Wirbelbildung anderswo lägen. Noch hat keiner gewagt, die Thatsachen dahin zu deuten, dass man es hier, ähnlich wie bei der tellurischen Doppelcyklone, mit Cyklonen mit kaltem Centrum zu thun habe, oder aber mit einem Gemische beider Phänomene. Im Gegenteil ist Hann's Resultat von dem genialen Entdecker der Natur dieser Doppelcyklone, Wm. Ferrel, mit seltsamer Heftigkeit angegriffen worden. Und doch scheint der Gegensatz zwischen den kurzlebigen „Gewittersäcken“ mit ausgesprochen warmem Centrum auf der Ostseite und den machtvoll sich entwickelnden Randbildungen der kalten Westseite der Depressionen auf ein derartiges Verhältnis hinzuweisen.“ Die weiteren Ausführungen stützen sich auf eine grosse Anzahl schematischer Figuren, müssen daher unter Heranziehung derselben im Original nachgelesen werden. Lp.

L. Steiner. Insolationsverhältnisse bei ebenen Flächen. Meteor. Zeitschr. **15**, 193-196.

Verf. behandelt einen für phänologische Beobachtungen wichtigen Fall, die Insolation für verschieden orientirte ebene Flächen. Nach Entwickelung der hierfür geltenden Formeln werden am Schlusse einige Zahlentabellen mit ihrer Hülfe berechnet. Lp.

A. Mägis. Kann die Intensität der allgemeinen atmosphärischen Circulation zwischen Aequator und Pol unmittelbar aus einem gegebenen Temperaturgefälle berechnet werden? Meteor. Zeitschr. **15**, 157-159.

„Der Zweck dieser Arbeit ist lediglich, auf einen Weg aufmerksam zu machen, welcher unter gewissen Voraussetzungen dazu führt, die Intensität der allgemeinen Luftcirculation als Function des Temperaturgefälles zwischen Aequator und Pol kennen zu lernen.“ Lp.

P. Schreiber. Zur Abhandlung des Herrn Dr. Hergesell im Decemberheft 1897 dieser Zeitschr. Meteor. Zeitschr. **15**, 180-181.

Elementare Erläuterungen zu den Formeln der Hergesell'schen Abhandlung, über welche in F. d. M **28**, 832, 1897, berichtet ist. Lp.

W. von Bezold. Ueber die Temperaturänderungen auf- und absteigender Luftströme. Meteor. Zeitschr. **15**, 441-448.

„Als ich im Jahre 1888 meine erste Abhandlung zur Thermodynamik der Atmosphäre veröffentlicht hatte, da gab ich mich der Hoffnung hin, dass durch die gemachten Darlegungen die Anschauung, wonach die Abkühlung aufsteigender Luftmassen durch die Hebungsarbeit bedingt sei, wie sie sich in die ausgezeichnete Arbeit von Guld-

berg und Mohn eingeschlichen hatte, endgültig beseitigt sei. Nachdem aber A. Schmidt in Stuttgart nicht nur im Jahre 1890, sondern auch in neuester Zeit abermals als Verteidiger der Ansicht aufgetreten ist, dass bei der Abkühlung aufsteigender Luftströme die Hebungsarbeit eine Rolle spiele, so glaube ich doch, nicht mehr zögern zu dürfen, die früheren Auseinandersetzungen in noch eingehenderer Weise zu wiederholen und zu ergänzen." Lp.

J. Hann. Ueber die Reduction kürzerer Reihen von Niederschlagsmengen auf die langjährige Reihe einer Nachbarstation. Meteor. Zeitschr. **15**, 121-133.

J. Hann. Erwiderung von Herrn Professor Schreiber. Ebenda, 225-226.

In mehreren Schriften (vergl. F. d. M. **27**, 813, 1896) hatte P. Schreiber von einem Hann'schen Gesetze gesprochen, das er durch seine Untersuchungen als unrichtig erwiesen hätte. Hann verwahrt sich dagegen, je ein derartiges Gesetz aufgestellt zu haben; dasselbe verdanke vielmehr den Schriften von Schreiber seine Entstehung. Er selbst habe nur eine Methode angegeben, um Jahresmittel aus kürzeren Beobachtungsperioden mit grösserer Sicherheit bestimmen zu können. Die Artikel sind also wesentlich polemisch. Lp.

L. de Marchi. Di un articolo del sig. S. Arrhenius sulle cause delle variazioni dei climi. Lomb. Ist. Rend. (2) **31**, 466-478.

Kritik der Anschauungen, die Arrhenius in seiner Abhandlung „On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground" (Philos. Mag. **41**, 5, 1896) veröffentlicht hat. Sbt.

J. Liznar. Die magnetische Aufnahme Oesterreich-Ungarns und das erdmagnetische Potential. Meteor. Zeitschr. **15**, 175-178.

In der Arbeit von W. von Bezold, über welche in F. d. M. **28**, 801, 1897, berichtet ist, war der Wunsch ausgesprochen, durch Berechnung des Integrales $\int S ds$ längs einer geschlossenen Curve der Erdoberfläche, das nach der Gauss'schen Theorie Null sein muss, einerseits die Richtigkeit dieser Theorie zu prüfen, andererseits eine Kontrolle für die Messungen zu gewinnen. Diese Arbeit führt Verf. bezüglich der von ihm für Oesterreich-Ungarn veröffentlichten Zahlen zur Epoche 1890 durch und findet statt 0 den Wert 0,0000046, also ein sehr befriedigendes Resultat, das für das von ihm angegebene Trapez gilt. Selbst für die ungenau bekannte Epoche 1850 ergiebt sich nur 0,0002928. Lp.

Wilh. Trabert. Der Zusammenhang zwischen den Erscheinungen des Erdmagnetismus und den elektrischen Vorgängen in der Atmosphäre. Meteor. Zeitschr. **15**, 401-412.

Im ersten Teile werden die neueren Anschauungen über das Wesen des Erdmagnetismus erörtert; nach ihnen genügt die Gauss'sche Hypothese vom Sitz der erdmagnetischen Kräfte im Erdinnern nicht mehr, sondern man muss auch noch solche ausserhalb des Erdkerns annehmen. Die beiden folgenden Teile dienen dann zur näheren Erörterung der Entstehung verticaler elektrischer Ströme in der Atmosphäre. Lp.

F. Pockels. Ein Versuch, die bei Blitzschlägen erreichte maximale Stromstärke zu schätzen. Meteor. Zeitschr. **15**, 41-46.

Aus der Messung des Magnetismus, der in Basaltstücken durch Blitzschläge hervorgerufen wurde, und nachfolgender Berechnung wird der Schluss gezogen, „dass die Stromstärke von Blitzentladungen jedenfalls 10000 Ampère, wahrscheinlich aber noch bedeutend höhere Werte erreicht." Lp.

Weitere Litteratur.

G. de Berardinis. Sulle carte geografiche. Lezioni fatte nella R. Università di Messina. 111 S. 4° lith.

J. Gallenmüller. Elemente der mathematischen Geographie und Astronomie. 3. Aufl. Regensburg. 180 S. 8°.

K. Geissler. Mathematische Geographie, zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen. Leipzig: Göschen. 186 S. 12mo. (Sammlung Göschen, No. 92.)

E. Hammer. Vergleichung einiger Abbildungen eines kleinen Stücks der ellipsoidischen Erdoberfläche (Karte von S.-W.-Deutschland). Leipzig: W. Engelmann in Comm. (Nova Acta oder Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. 71. Band, S. 447-470 gr. 4°.)

J. H. S. Moxly. A suggested improvement of the current theories of the tides. London: Rivingtons. 44 S. [Nature **57**, 461-462.]

R. S. Woodward. On the differential equations defining the Laplacian distribution of density, pressure, and acceleration of gravity in the earth. American M. S. Bull. (2) **4**, 177-178.

R. S. Woodward. On the significance of the product of the gravitational constant and the mean density of the earth. Ebenda, 294.

H. H. Hildebrand et L. Teisserenc de Bort. Les bases de la météorologie dynamique (historique; état de nos connaissances). Première livraison. Paris: Gauthier-Villars. 60 S. 8⁰.

P. Schreiber. Studien über Luftbewegungen. I. Teil: Die hydrodynamischen Differentialgleichungen und die Formeln der Thermodynamik in Verbindung mit den Ergebnissen meteorologischer Beobachtungen. Abhdl. k. sächs. Met. Inst. 1898, 24 S.

G. de Vries. Le tourbillon cyclonal. Amst. Versl. **6**, 432-448.

Anhang.

E. Pascal. Repertorio di matematiche superiori (Definizioni — Formole — Teoremi — Cenni bibliografici). I. Analisi. Milano: Hoepli. XV u. 643 S. 8°.

Der Zweck des Werkes, dessen erster Teil uns vorliegt, ist, wie der Verf. sagt, ein Résumé der wichtigsten Theorien der heutigen Mathematik in den kleinst möglichen Raum einzuschliessen, indem von jeder Theorie so viel angegeben wird, als es dem Leser ermöglicht, sich in derselben zu orientiren und zu wissen, aus welchen Werken er ausführlichere Nachweisungen darüber schöpfen kann. Es werden bei jeder Theorie zuerst die Definitionen und Grundbegriffe, dann die Lehrsätze und Formeln, endlich die bibliographischen Notizen angegeben.

Es möge hier auch noch das Inhaltsverzeichnis kurz wiedergegeben werden: 1. Einleitende Theorien (irrationale und complexe Zahlen, Quaternionen, Punktmengen, Grundlagen der Functionentheorie, Combinatorik); 2. Substitutionsgruppen; 3. Determinanten; 4. unendliche Reihen und Producte, Kettenbrüche; 5. algebraische Gleichungen; 6. Differentialrechnung; 7. Integralrechnung; 8. Differentialgleichungen; 9. Transformationsgruppen; 10. Differenzenrechnung; 11. Variationsrechnung; 12. Invariantentheorie; 13. Functionen einer complexen Veränderlichen; 14. Polyederfunctionen, periodische Functionen, Modulfunctionen, automorphe Functionen; 15. Abel'sche Integrale; 16. elliptische Functionen; 17. hyperelliptische und Abel'sche Functionen; 18. besondere Functionen (elementare Functionen, Euler'sche Integrale, hypergeometrische Reihe, Laplace'sche, Legendre'sche, Bessel'sche, Lamé'sche Functionen); 19. analytische Darstellung der Functionen (Wronski'sche, Lagrange'sche, Fourier'sche Reihen, Reihenentwickelungen nach Kugel- und Cylinderfunctionen); 20. Zahlentheorie; 21. algebraische und transcendente Zahlen; 22. Wahrscheinlichkeitsrechnung; 23. analytische Maschinen. Vi.

E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen. 3. Aufl. Ausgabe für Real- und Oberrealschulen. Essen: G. D. Bädeker. 66 + 63 S. 8°.

E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen. 3. Aufl. Ausgabe für Baugewerkschulen. Ibid. 46 + 84 S. 8°.

E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen. 3. Aufl. Ausgabe für Maschinenbauschulen. Ibid. 48 + 108 S. 8°.

Ueber die erste Auflage der vierstelligen mathematischen Tabellen ist in F. d. M. **27**, 819, 1896 berichtet worden. Die Sonderausgaben der dritten Auflage berücksichtigen die Bedürfnisse der verschiedenen Anstalten, für welche sie bestimmt sind. Die physikalischen Zahlentafeln für Realschulen berücksichtigen besonders die Elektrotechnik. Sie sind in der Ausgabe für Baugewerkschulen durch die technischen und physikalischen Tabellen für Handwerker- und Fortbildungsschulen ersetzt, und diese in der Ausgabe für Maschinenbauschulen wesentlich bereichert. Die Normalprofiltabellen sind meist der 5. Auflage des deutschen Normalprofil-Buches für Walzeisen zu Bau- und Schiffbauzwecken entnommen, andere Tabellen den bekannten technischen Kalendern und grösseren Tabellenwerken entlehnt. Die Anordnung ist klar, der Druck deutlich, die Ausstattung vorzüglich. M.

E. Schultz. Vierstellige Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen und der Winkelfunctionen zum Gebrauche an Gymnasien und Realgymnasien. 2. Aufl. Essen: G. D. Bädeker. 86 S. 8°.

Eine Sonderausgabe des Teils II der Ausgabe: Vierstellige mathematische Tabellen für höhere Schulen. In der neuen Auflage ist eine Tabelle der natürlichen Werte der trigonometrischen Functionen hinzugekommen, auch ist der Anhang der physikalischen Zahlentafeln vermehrt. M.

E. Schultz. Mathematische und technische Tabellen für Handwerker- und Fortbildungsschulen. 3. Aufl. Ausgabe mit Logarithmen. Essen: G. D. Bädeker. X + 64 S. 8°.

Die Tabellen sollen die Lösung von leichteren und schwierigeren Aufgaben aus der Flächen- und Körperberechnung ohne mühsames Ausrechnen ermöglichen. Nach dem Grundsatz: „Für technische Schulen auch technisches Rechnen" ist eine Rechnungsweise zu üben, die der Schüler später in der Praxis auch wirklich anzuwenden hat. M.

H. Schubert. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. (Sammlung Göschen No. 81.) Leipzig: G. J. Göschen. 128 S. 12°.

Den grösseren fünfstelligen Tafeln und Gegentafeln, über welche in F. d. M. **28**, 869, 1897 berichtet worden ist, hat nun der Verf.

eine kleinere vierstellige folgen lassen, welche ganz analog eingerichtet ist. Nur sind — um Irrtümern vorzubeugen — alle Logarithmen, bezw. Mantissen rot gedruckt, alle übrigen Zahlen schwarz. M.

V. E. Gamborg. Logarithmentafeln, Logarithmen und Antilogarithmen enthaltend, nebst den Logarithmen der trigonometrischen Functionen u. a. m. Berlin: A. Juncker. 8°.

Diese Tafeln, über deren Inhalt und Einrichtung im vorigen Bande (F. d. M. **28,** 870, 1897) berichtet worden ist, haben nur einen neuen Titel in deutscher Sprache mit deutscher Vorrede erhalten, stimmen im übrigen mit der dänischen Ausgabe überein.

Wir erinnern daran, dass das Wort „Antilogarithmus" nicht mehr in dem Neper'schen Sinne für die logcos, die den logsin gegenüberstanden, gebraucht wird, sondern die Numeri zu gegebenen Logarithmen bedeuten. Richtiger wäre das von Schubert u. a. gebrauchte Wort „Gegentafel" für eine solche, die den Uebergang vom Logarithmus (oder deren Mantissen) zum Numerus oder zur trigonometrischen Function vermittelt. M.

J. P. Wrapson and W. W. Haldane Gee. Mathematical and physical tables: for the use of students in technical schools and colleges. VIII + 215 S.

Eine recht nützliche, gedrängte und nicht zu dicke Sammlung von Tabellen. Sie scheinen für die Studenten, für welche sie bestimmt sind, ganz geeignet zu sein. Gbs. (Lp.)

Anton Tichy. Graphische Logarithmentafeln. Ztschr. Oest. Ing. u. Arch. **49,** 289-290.

Empfehlende Besprechung des Wertes solcher Tafeln. F. V.

Machine Grant pour la résolution des équations à coefficients numériques. Revue d'Art. **52,** 471-474.

Beschreibung einer auf den Grundsätzen des Hebelgesetzes beruhenden Maschine zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen. Lp.

St. Balthasar. Ueber Rechenmaschinen. Mitt. üb. Art. u. Genie **29,** 110-122.

Zunächst werden einige Rechenschieber besprochen. Danach wird die Maschine von Grant für die Lösung numerischer algebraischer Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten, von der eine Abbildung beigegeben ist, beschrieben und erläutert (nach Scientific American **76,** No. 10). Zuletzt wird die in Frankreich „Dactyle", in Deutschland

„Brunsviga“ genannte Rechenmaschine, deren geistiger Urheber Odner in Petersburg ist, ebenfalls mit Hülfe einer Figur beschrieben. Lp.

A. A. Michelson und S. W. Stratton. A new harmonic analyser. Am. J. of science (4) **5**, 1-13.

Während bei den bisher construirten harmonischen Analysatoren die Anzahl der Glieder der Fourier'schen Reihe, für welche die Instrumente ausreichten, eine geringe war, haben die Verf. jetzt einen Apparat gebaut, welcher der Summe von 80 Gliedern der Reihe entspricht. Sie erreichen dies durch einen eigentümlichen Mechanismus, in welchem 80 einzelne Spiralfedern die jedem Gliede der Reihe zugehörige Bewegung mit Hülfe eines Cylinders, an dessen Umfang sie als Hebel wirken, zu einer einzigen resultirenden Bewegung summiren. Die erste Leistung des Analysators ist also eine graphische Summirung gegebener Fourier'scher Reihen, und die mit solchen graphischen Darstellungen angefüllten Seiten 5-8 zeigen die Genauigkeit, mit welcher der Apparat arbeitet. Die zweite Leistung besteht in der Angabe der Coefficienten in der Fourier'schen Reihe für eine gegebene Function von x. Auch hierfür werden zuerst bekannte Beispiele ($\varphi(x) =$ const. von 0 bis a, sonst Null; $\varphi(x) = e^{-a^2x^2}$) gegeben; die Fehler der ermittelten Coefficienten sind hierbei durchschnittlich 0,65 und 0,7 Procent des grössten Gliedes bei einer Entwickelung bis zu 20, resp. 12 Gliedern. Zuletzt wird eine graphisch gegebene Function $\varphi(x)$ bis $a_{20} \cos 20\Theta + b_{20} \sin 20\Theta$ hin entwickelt. Wegen der erheblichen Ersparnis an Arbeit empfehlen die Verf. ihren Apparat für solche Zwecke, bei denen ein Fehler von 1 bis 2 Procent nicht in Betracht kommt. Die Ausdehnung auf Hunderte von Gliedern, ja auf tausend halten sie für sehr wohl ausführbar (vergl. S. 652). Lp.

Weitere Litteratur.

C. Allan. Formulario di matematica. P. I. Torino: Rosenberg e Sellier. 207 S. 8°.

R. G. Blame. Quick and easy methods of calculating. A simple explanation of the theory and use of the slide-rule. London: E. and F. N. Spon. [Nature **59**, 196-197.]

F. Bolte. Sammlung von mathematischen, physikalischen und technischen Tafeln für den Unterricht an Schulen für Seedampfschiffs-Maschinisten. Hamburg: Eckardt & Messtorff. III + 47 S. hoch 4°.

O. Th. Bürklen. Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Leipzig: G. J. Göschen. 229 S. 8°.

F. Červený und V. Řehořovský. Technisches Vademecum für Ingenieure und Baumeister. I. Bd. Prag 1896. (Böhmisch). Sda.

G. Diakow. Multiplications-Tabelle. In russischer, französischer und deutscher Sprache. St. Petersburg: K. L. Ricker. 32 + 1000 S. Quer-4°.

J. Dupuis. Tables de logarithmes à cinq décimales, d'après J. de Lalande, disposées à double entrée et revues. Édition stéréotype. Paris: Hachette. IV + 230 S. 16mo.

F. G. Gauss. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet. 2 Teile. Halle: E. Strien.

1. 55. Aufl. 166 + XXXV S. gr. 8°.
2. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für Decimalteilung des Quadranten. 2. Aufl. 140 + XVIII S.

E. Hammer. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studirende und für Praktiker. Stuttgart: Metzler. 60 S. 8°.

H. G. Köhler. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 16. Ausgabe. Leipzig. XXXVI + 388 S. 8°.

K. Ludwig. Prüfungsaufgaben aus der allgemeinen Mathematik und deren Auflösungen. Leipa. 119 S. 8°.

E. Lüling. Mathematische Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. Vierte erweiterte Auflage. Berlin. 41 + 64 S. 8°.

R. Mather. Yale University entrance examinations in mathematics 1884-1898. New Haven: Judd. 146 S.

M. Meyer. Katechismus der Logarithmen. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig. VIII + 181 S. 8°.

E. Mougin. Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques. Blois: Migault. 38 S. 4°.

C. A. Müller. Multiplikations-Tabeller, äfven anwändbara för Division, efter en ny plan utgifna. Autoriserad svensk upplaga. Lund. 201 S. 8°.

J. W. Nicholson. Five place logarithms and trigonometric tables, with the elementary principles of logarithms and examples for their use in computations. New York: Macmillan. 8°.

J. Petersen. Matematiske Opgaver i det polytekniske Pensum med et tillaeg indeholdende de seneste Aars Eksamenopgaven. Kjöbenhavn. 104 S. 8°.

J. L. Robinson. Mathematical examination papers for use in navy classes in schools. London: Rivingtons. VII + 143 S. [Nature 58, 568.]

M. Rusch. Anleitung zum Gebrauche des Rechenstabes. Auch für solche, welche nur die Kenntnisse der Volksschule besitzen. Wien: A. Pichler's Wwe. u. Sohn. 19 S. 8°.

E. SAILER. Die Aufgaben aus der Elementarmathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den k. bayerischen humanistischen und technischen Unterrichtsanstalten in den Jahren 1873 bis 1893 gestellt wurden, bearbeitet von E. S. München: Ackermann. III + 167 S. 8°.

H. C. SCHMIDT. Zahlenbuch. Producte aller Zahlen bis 1000 mal 1000. Entworfen von C. Cario. Ausgeführt und hrsg. von S. 2. Aufl. Aschersleben: O. Bennewitz. VI + 279 S. Lex.-8°.

E. SCHULTZ. Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. 3. Aufl. Essen: G. D. Bädeker. 31 S. 16°.

E. E. SCOTT. Short table of logarithms and anti-logarithms to ten places. London. 8°.

S. STAMPFER. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln und Formeln, nebst verschiedenen anderen nützlichen Tafeln und Formeln. 18. Aufl. Wien. XXIV + 122 S. 8°.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Hrsg. vom akademischen Verein „Hütte". 17. Aufl. 2 Abteilungen. Berlin: W. Ernst und Sohn. 1. Lieferung. 608 + 464 S. 8°.

Mathematics. Matriculation model answers. London University papers from July, 1890, to January, 1898. (University tutorial series.) London: Clive. 228 S. 8°.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite	77,	Zeile	1	von	oben	lies	Russell	statt	Russel.
„	340,	„	4	„	unten	„	P. Fulco	„	F. Paolino.
„	341,	„	13	„	oben	„	P. Fulco	„	F. Paolino.
„	359,	„	9	„	unten	„	(3)	„	(1).
„	360,	„	7	„	oben	„	$n \geqq \bar{n}$	„	$n = \bar{n}$.
„	360,	„	16	„	oben	„	$m, m_1, \cdots, m_{n-1}$	„	$m_1, m_2, \cdots, m_n$.
„	360,	„	14	„	unten	„	$(\lim\limits_{n=\infty} g_n(x))$	„	$(\lim\limits_{\mu=\infty} g_n(x))$.
„	400,	„	3	„	oben	„	alcune	„	alcuni.
„	464,	„	10	„	unten	„	Wasson	„	Watson.
„	489,	„	3	„	unten	„	leurs points	„	leurs courbes.
„	507,	„	9	„	oben	„	A. Sauve	„	Cl. Sauve
„	519,	„	2	„	unten	„	Bezeichnungsweise	„	Beziehungsweise.
„	529,	„	2	„	oben ff.	„	Heegard	„	Hugard.
„	611,	„	7	„	unten	„	— 3	„	— r.
„	786,	„	6	„	oben	„	P. Straneo	„	D. Straneo.